§ 13. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

1. Интегрирование произведения синусов и косинусов различных аргументов

Тригонометрические формулы

$$\cos kx \sin mx = \frac{1}{2}\left[\sin(m-k)x + \sin(m+k)x\right], \tag{1}$$

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-k)x + \cos(m+k)x\right], \tag{2}$$

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}\left[\cos(m-k)x - \cos(m+k)x\right] \tag{3}$$

дают возможность представить произведение тригонометрических функций в виде суммы, причем каждое слагаемое легко интегрируется.

ПРИМЕР. Найти $\int \sin 7x \sin 2x dx$.

Используя формулу (3), получим

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 5x - \cos 9x) dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{5}\sin 5x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}\sin 9x + C.$$

Будем в дальнейшем символом $R(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ обозначать выражение, рациональное относительно $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$, т.е. такое, в котором над $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ производятся только рациональные действия (сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую степень). Ясно, что если каждая из величин $\alpha,\beta,\gamma,\ldots$ является рациональной функцией некоторой переменной t, то и все выражение $R(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)$ тоже будет рациональной функцией от t.

2. Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$

Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$ приводятся к интегралам от рациональных функций. Это всегда можно сделать с помощью подстановки

$$tg\frac{x}{2} = t. \tag{4}$$

Действительно, в этом случае

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \tag{5}$$

$$\sin x = \frac{\sin\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \tag{6}$$

$$\cos x = \frac{\cos\left(2\cdot\frac{x}{2}\right)}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \tag{7}$$

Итак, получили, что $\sin x$, $\cos x$ и dx выражаются через t в виде рациональных дробей. Следовательно, после их замены выражениями (5), (6) и (7) под знаком интеграла действительно окажется рациональная дробь.

ПРИМЕР. Найти интеграл $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

Подынтегральная функция рационально зависит от $\sin x$ и $\cos x$. Сделаем замену $tg\frac{x}{2} = t$. Тогда

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

и $$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2} + C.$$

Подстановка $tg\frac{x}{2} = t$ дает возможность проинтегрировать любую функцию вида $R(\sin x, \cos x)$, поэтому ее называют ***универсальной подстановкой.*** Однако на практике она часто приводит к сложным вычислениям, так как $\sin x$ и $\cos x$ выражаются через t в виде рациональных дробей, содержащих t^2. В ряде случаев интеграл можно найти быстрее, если воспользоваться другими подстановками. Рассмотрим некоторые из таких случаев подробнее.

1) **Функция $\boldsymbol{R(\sin x, \cos x)}$ нечетная относительно $\boldsymbol{\sin x}$**, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Преобразуем функцию $R(\sin x, \cos x)$ следующим образом:

$$R(\sin x, \cos x) = \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \cdot \sin x.$$

Так как $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\sin x$, то функция $\dfrac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x}$ является четной относительно $\sin x$ и будет содержать $\sin x$ только в четных степенях, т.е.

$$\frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} = R_1(\sin^{2n} x, \cos x).$$

Но
$$\sin^{2n} x = \left(\sin^2 x\right)^n = \left(1 - \cos^2 x\right)^n.$$

Следовательно,

$$R_1(\sin^{2n} x, \cos x) = R_1\left((1 - \cos^2 x)^n, \cos x\right) = R_2(\cos x).$$

Но тогда

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int \frac{R(\sin x, \cos x)}{\sin x} \cdot \sin x dx =$$

$$= \int R_2(\cos x) \cdot \sin x dx = -\int R_2(t)dt,$$

где $t = \cos x$.

Таким образом, получили, что *если функция $R(\sin x, \cos x)$ – нечетная относительно $\sin x$, то интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ всегда можно привести к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $t = \cos x$. В этом случае*

$$x = \arccos t, \qquad dx = -\frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}},$$

$$\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - t^2}.$$

ПРИМЕР. Найти интеграл $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}$.

Запишем интеграл в виде

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos^2 x - \sin^2 x}.$$

Так как подынтегральная функция нечетна относительно $\sin x$, то полагаем $\cos x = t$. Тогда $\sin x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ и

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2} + (\sqrt{1-t^2})^3\right)\cdot\left(-\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\right)}{t^2 - (\sqrt{1-t^2})^2} =$$

$$= -\int \frac{1+(1-t^2)}{2t^2-1}dt = \int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt.$$

Итак, в результате замены мы получили под интегралом неправильную рациональную дробь. Запишем ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\int \frac{t^2-2}{2t^2-1}dt = \int\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2t^2-1}\right)dt = \frac{t}{2} - \frac{3}{2}\int\frac{dt}{2t^2-1}.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, раскладываем правильную рациональную дробь в сумму простейших и получаем:

$$\int \frac{dt}{2t^2-1} = \int\left(\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}t-1} - \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}t+1}\right)dt = \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2}t-1} - \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{2}t+1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}t-1)}{\sqrt{2}t-1} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\int\frac{d(\sqrt{2}t+1)}{\sqrt{2}t+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t-1\right| - \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\sqrt{2}t+1\right| + C =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C.$$

Таким образом,

$$\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C =$$

$$= \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x - 1}{\sqrt{2}\cos x + 1}\right| + C.$$

2) **Функция $\boldsymbol{R(\sin x, \cos x)}$ нечетная относительно $\boldsymbol{\cos x}$**, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Рассуждая также как в 1) можно доказать, что в *этом случае интеграл* $\int R(\sin x, \cos x)dx$ *всегда можно привести к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки* $t = \sin x$. *Для такой подстановки*

$$x = \arcsin t, \quad dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = \sqrt{1-t^2}.$$

НАПРИМЕР. Найти интеграл $\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx$.

Так как подынтегральная функция нечетна относительно $\cos x$, то полагаем $\sin x = t$. Тогда $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ и

$$\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx = \int \frac{\left(\sqrt{1-t^2} + (\sqrt{1-t^2})^3\right)}{1+t^2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$$

$$= \int \frac{1+(1-t^2)}{1+t^2} dt = \int \frac{2-t^2}{1+t^2} dt.$$

Итак, в результате замены мы получили под интегралом неправильную рациональную дробь. Запишем ее в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби:

$$\int \frac{2-t^2}{1+t^2} dt = \int \left(-1 + \frac{3}{1+t^2}\right) dt = -t + 3\int \frac{dt}{1+t^2} = -t + 3\operatorname{arctg} t + C.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим

$$\int \frac{\cos x + \cos^3 x}{1+\sin^2 x} dx = -\sin x + 3\operatorname{arctg}(\sin x) + C.$$

3) **Функция $R(\sin x, \cos x)$ четная относительно $\sin x$ и $\cos x$**, т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

Преобразуем функцию $R(\sin x, \cos x)$ следующим образом:

$$R(\sin x, \cos x) = R\left(\frac{\sin x}{\cos x} \cdot \cos x, \cos x\right) = R(\operatorname{tg} x \cdot \cos x, \cos x)$$

$$\Rightarrow \quad R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, \cos x).$$

Так как $R(\sin x, \cos x)$ – четная относительно $\sin x$ и $\cos x$, то функция $R_1(\operatorname{tg} x, \cos x) = R(\operatorname{tg} x \cdot \cos x, \cos x)$ является четной относительно $\cos x$. Действительно,

$$R_1(tgx, -\cos x) = R(\underbrace{\operatorname{tg} x \cdot (-\cos x)}_{-\sin x}, -\cos x) = R(-\sin x, -\cos x) =$$

$$= R(\sin x, \cos x) = R_1(\operatorname{tg} x, \cos x)$$

Следовательно, функция $R_1(\operatorname{tg} x, \cos x)$ будет содержать $\cos x$ только в четных степенях, т.е.

$$R_1(\operatorname{tg} x, \cos x) = R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x).$$

Но

$$\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}.$$

$$\Rightarrow \quad R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x) = R_2\left(\operatorname{tg} x, \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}\right) = R_3(\operatorname{tg} x).$$

Но тогда

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(\operatorname{tg} x, \cos x) dx = \int R_2(\operatorname{tg} x, \cos^2 x)\, dx =$$

$$= \int R_3(\operatorname{tg} x) dx = \int R_3(t) \cdot \frac{dt}{1 + t^2},$$

где $t = \operatorname{tg} x$.

Таким образом, получили, что *если функция* $R(\sin x, \cos x)$ – *четная относительно* $\sin x$ *и* $\cos x$, *то интеграл* $\int R(\sin x, \cos x) dx$ *всегда можно привести к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки* $t = \operatorname{tg} x$. *В этом случае*

$$x = \operatorname{arctg} t, \qquad dx = \frac{dt}{1 + t^2},$$

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}, \quad \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

ПРИМЕР. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x}$.

Так как подынтегральная функция четна относительно $\sin x$ и $\cos x$, то полагаем $\operatorname{tg} x = t$. Тогда

$$x = \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{dt}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}.$$

и

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x} = \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} + 2 \cdot \frac{1}{1+t^2}} =$$

$$= \int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2}.$$

Получили правильную рациональную дробь, причем эта дробь простейшая III типа. Выделим полный квадрат в знаменателе и получим:

$$\int \frac{dt}{t^2 + 2t + 2} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 + 1} = \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2 + 1} = \operatorname{arctg}(t+1) + C.$$

Итак, $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + 2\cos^2 x} = \operatorname{arctg}(t+1) + C = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x + 1) + C$.

4) Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$, где m, n – целые неотрицательные числа.

Интегралы такого вида – частный случай интегралов $\int R(\sin x, \cos x)dx$. Но при нахождении интеграла $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$ рекомендуется придерживаться следующего правила:

а) если только одно из чисел m и n – нечетное, то следует от нечетной степени отделить один множитель и взять кофункцию в качестве новой переменой;

б) если оба числа m и n – нечетные, то следует от меньшей нечетной степени отделить один множитель и взять кофункцию в качестве новой переменной;

в) если оба числа m и n – четные, то следует понизить степень функций с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

ПРИМЕР 1. Найти $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$.

Подынтегральная функция удовлетворяет условию пункта а). Чтобы найти интеграл, рекомендуется сделать замену

$$t = \sin x.$$

Тогда $\cos x dx = dt$

и $\int \sin^4 x \cos^5 x dx = \int \sin^4 x \cos^4 x \cos x dx = \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^2 \cos x dx =$

$$= \int t^4 (1 - t^2)^2 dt = \int (t^4 - 2t^6 + t^8) dt = \frac{t^5}{5} - 2 \cdot \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} + C =$$

$$= \frac{\sin^5 x}{5} - 2 \cdot \frac{\sin^7 x}{7} + \frac{\sin^9 x}{9} + C.$$

ПРИМЕР 2. Найти $\int \sin^3 x \cos^5 x dx$.

Подынтегральная функция удовлетворяет условию пункта б). Чтобы найти интеграл, рекомендуется сделать замену

$$t = \cos x.$$

Тогда $-\sin x dx = dt \quad \Rightarrow \quad \sin x dx = -dt$

и $\int \sin^3 x \cos^5 x dx = \int \sin^2 x \cos^5 x \cdot \sin x dx = \int (1 - \cos^2 x) \cos^5 x \cdot \sin x dx =$

$$= \int (1 - t^2) t^5 (-dt) = -\int (t^5 - t^7) dt = -\frac{t^6}{6} + \frac{t^8}{8} + C =$$

$$= -\frac{\cos^6 x}{6} + \frac{\cos^8 x}{8} + C.$$

ПРИМЕР 3. Найти $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

Подынтегральная функция удовлетворяет условию пункта в). Чтобы найти интеграл, преобразуем ее следующим образом:

$$\sin^2 x \cos^4 x = (\sin x \cos x)^2 \cdot \cos^2 x = \left(\frac{1}{2} \sin 2x\right)^2 \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} =$$

$$= \frac{1}{8} \sin^2 2x \cdot (1 + \cos 2x) = \frac{1}{8} \sin^2 2x + \frac{1}{8} \sin^2 2x \cos 2x.$$

Тогда $\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx.$

Подынтегральная функция в первом из полученных интегралов требует дальнейшего преобразования. К ней необходимо снова применить формулу понижения степени. В результате получим:

$$\int \sin^2 2x dx = \int \frac{1-\cos 4x}{2} dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 4x) dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + C .$$

Второй интеграл легко найти, если внести функцию $\sin 2x$ под знак дифференциала:

$$\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \int \sin^2 2x \cos 2x \cdot \frac{d(\sin 2x)}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + C .$$

Окончательно получаем:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^3 2x}{3} + C =$$

$$= \frac{1}{16}\left(x - \frac{1}{4}\sin 4x \right) + \frac{\sin^3 2x}{48} + C .$$