Контрольная работа по векторной алгебре

ОБРАЗЕЦ

1. Доказать, что векторы

$$\overline{\mathbf{p}} = \{2; -1; 3\},\quad \overline{\mathbf{q}} = \{0; 1; -1\},\quad \overline{\mathbf{r}} = \{1; 0; -2\}$$

образуют базис и найти координаты вектора $\overline{\mathbf{a}} = \{5; -5; 7\}$ в этом базисе.

2. Найти координаты точек A и B, если известно, что точки $C(-15;12)$ и $D(-11;10)$ делят отрезок AB в отношении 3 : 2 : 3.

3. Вершины пирамиды $ABCD$ имеют следующие координаты: $A(3;1;4)$, $B(-1;6;1)$, $C(-1;1;6)$, $D(0;4;-1)$.

Найти: 1) Угол между векторами $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$.
2) Высоту треугольника BCD, опущенную из вершины C.
3) Объем пирамиды $ABCD$.

4. Оператор φ пространства $\mathbb{R}^3$ задан своим действием на произвольный вектор $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$:

$$\varphi\,\mathbf{x} = (-5x_1 + 3x_2 + 3x_3,\ -12x_1 + 7x_2 + 6x_3,\ 6x_1 - 3x_2 - 2x_3).$$

а) Найти матрицу этого оператора в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

б) Определить, является ли оператор диагонализируемым. Если да – то указать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

5. Упражнение по векторной алгебре.
6. Упражнение по линейным пространствам и операторам.