Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Занятие 14

Понятие линейного оператора

Преподаватель Пахомова Елена Григорьевна

§ 16. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Определение линейного оператора

Пусть L и V – линейные пространства над $\boldsymbol{F}$ (где $\boldsymbol{F}$ – множество рациональных, действительных или комплексных чисел).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Функция, заданная на* L *и имеющая областью значений* $V_1 \subseteq V$ *называется* ***оператором (преобразованием), действующим из*** L ***в*** V. *Оператор, действующий из* L *в* L, *называют* ***оператором пространства*** L.

Если оператор $\varphi{:}L \to V$, $\varphi{:}x \to y$, то y называется ***образом элемента (вектора)*** x и обозначается $\varphi(x)$ или φx, x называют ***прообразом элемента (вектора)*** y.

Оператор φ называется ***линейным***, если для любых $x_1, x_2 \in L$ и любого $\alpha \in \boldsymbol{F}$ выполнены следующие условия:

1) $\varphi(x_1+x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2)$,

2) $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x)$.

Первое условие называется *свойством* ***аддитивности***, второе – *свойством* ***однородности*** оператора. Вместе оба эти свойства называются ***свойствами линейности оператора*** и могут быть записаны в виде

$$\varphi(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot \varphi(x_1) + \beta \cdot \varphi(x_2)$$

где $x_1, x_2 \in \mathrm{L}$, $\alpha, \beta \in \boldsymbol{F}$.

ЛЕММА 1. Если φ – линейный оператор, то $\varphi(o) = o$.

ПРИМЕРЫ линейных операторов.

1) Пусть $\varphi : L \to L$, $\varphi(x) = o, \forall x \in L$.

Имеем: 1) $\varphi(x+y) = o$, $\varphi(x) + \varphi(y) = o + o = o$, $\forall x,y \in L$;

$$\Rightarrow \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y);$$

2) $\varphi(\alpha \cdot x) = o$, $\alpha \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot o = o,$ $\forall x \in L, \ \forall \alpha \in \boldsymbol{F}$;

$$\Rightarrow \quad \varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x) .$$

Таким образом, оператор является линейным. Его называют ***нулевым*** и обозначают обычно Θ .

2) Пусть $\varphi: L \to L$, $\varphi(x) = x, \forall x \in L$.

Имеем: 1) $\varphi(x+y) = x + y$, $\varphi(x) + \varphi(y) = x + y$, $\forall x,y \in L$;

$$\Rightarrow \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y);$$

2) $\varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot x$, $\alpha \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot x$, $\forall x \in L, \ \forall \alpha \in \boldsymbol{F}$;

$$\Rightarrow \quad \varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x) .$$

Таким образом, оператор является линейным. Его называют ***тождественным оператором*** пространства L и обозначают обычно I.

3) Пусть $\varphi\colon L \to L$, λ – фиксированное число

$$\varphi(x) = \lambda \cdot x, \quad \forall x \in L.$$

Имеем: 1) $\varphi(x+y) = \lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

$$\varphi(x) + \varphi(y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y \ , \quad ;$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad \forall x, y \in L;$$

2) $\varphi(\alpha \cdot x) = \lambda \cdot (\alpha \cdot x) = (\lambda\alpha) \cdot x$,

$$\alpha \cdot \varphi(x) = \alpha \cdot (\lambda \cdot x) = (\alpha\lambda) \cdot x \ ,$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x) \ , \quad \forall x \in L, \ \forall \alpha \in \boldsymbol{F}.$$

Таким образом, оператор является линейным. Его называют ***оператором подобия***.

ЗАДАЧА 1. Проверить, является ли линейным оператор:

$$\varphi_1\colon V^{(3)} \to V^{(3)}, \quad \varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}}, \text{ где } \overline{\mathbf{a}} \neq \overline{\mathbf{0}}.$$

РЕШЕНИЕ

Имеем:

1) $\varphi_1(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = \big((\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}) + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{a}})\big)\overline{\mathbf{a}} = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}},$

$\varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) + \varphi_1(\overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} + (\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}},$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = \varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) + \varphi_1(\overline{\mathbf{y}}).$$

2) $\varphi_1(\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}}) = (\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = \boldsymbol{\alpha} \cdot (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}},$

$\alpha \cdot \varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) = \alpha \cdot (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}},$

$$\Rightarrow \quad \varphi_1(\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}}) = \alpha \cdot \varphi_1(\overline{\mathbf{x}}).$$

Следовательно, φ_1 – линейный.

ЗАДАЧА 2. Проверить, является ли линейным оператор:

$$\varphi_2\colon V^{(3)} \to V^{(3)}, \quad \varphi_2(\overline{\mathbf{x}}) = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{a}}, \qquad \text{где } \overline{\mathbf{a}} \neq \overline{\mathbf{0}}.$$

РЕШЕНИЕ

Имеем:

1) $\varphi_2(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) + \overline{\mathbf{a}}$,

$$\varphi_2(\overline{\mathbf{x}}) + \varphi_2(\overline{\mathbf{y}}) = (\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{a}}) + (\overline{\mathbf{y}} + \overline{\mathbf{a}}) = \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} + 2\overline{\mathbf{a}}.$$

Так как $(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) + \overline{\mathbf{a}} \neq \overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} + 2\overline{\mathbf{a}}$, то

$$\varphi_1(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) \neq \varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) + \varphi_1(\overline{\mathbf{y}}).$$

Следовательно, φ_2 – нелинейный.

ЗАДАЧА 3. Проверить, является ли линейным оператор:

$A\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $A(\mathbf{x}) = (x_1+x_2;\ x_2-x_3;\ x_1-3x_3)$, где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$.

РЕШЕНИЕ

Пусть $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$.

Тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$, $\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1;\ \alpha x_2;\ \alpha x_3)$

1) $A(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \big([x_1 + y_1]+[x_2 + y_2];\ [x_2 + y_2]-[x_3 + y_3];\ [x_1 + y_1]-3[x_3 + y_3]\big)$,

$$A(\mathbf{x})+A(\mathbf{y}) = (x_1 + x_2;\ x_2 - x_3;\ x_1 - 3x_3) + (y_1 + y_2;\ y_2 - y_3;\ y_1 - 3y_3) =$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2;\ x_2 - x_3 + y_2 - y_3;\ x_1 - 3x_3 + y_1 - 3y_3).$$

$$\Rightarrow \quad A(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) = A(\overline{\mathbf{x}}) + A(\overline{\mathbf{y}}).$$

2) $A(\alpha\mathbf{x}) = \big(\alpha x_1 + \alpha x_2;\ \ \alpha x_2 - \alpha x_3;\ \ \alpha x_1 - 3 \cdot \alpha x_3\big)$,

$$\alpha \cdot A(\mathbf{x}) = \alpha \cdot (x_1 + x_2;\ x_2 - x_3;\ x_1 - 3x_3) =$$

$$= \big(\alpha[x_1 + x_2];\ \ \alpha[x_2 - x_3];\ \ \alpha[x_1 - 3x_3]\big).$$

$$\Rightarrow \quad A(\alpha \cdot \overline{\mathbf{x}}) = \alpha \cdot A(\overline{\mathbf{x}}).$$

Следовательно, A – линейный.

ЗАДАЧА 4. Проверить, является ли линейным оператор:

$B\colon\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $B(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2;\ x_2 + 2x_3;\ x_3 + 2)$, где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$.

РЕШЕНИЕ

Пусть $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$.

Тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$, $\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; \alpha x_3)$

1) $B(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \big([x_1 + y_1] - [x_2 + y_2];\ [x_2 + y_2] - 2[x_3 + y_3];\ [x_3 + y_3] + 2\big)$,

$$B(\mathbf{x}) + B(\mathbf{y}) = (x_1 - x_2;\ x_2 - 2x_3;\ x_3 + 2) + (y_1 - y_2;\ y_2 - 2y_3;\ y_3 + 2) =$$

$$= (x_1 - x_2 + y_1 - y_2;\ x_2 - 2x_3 + y_2 - 2y_3;\ x_3 + 2 + y_3 + 2).$$

Так как $x_3 + y_3 + 2 \neq x_3 + 2 + y_3 + 2$, то

$$B(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) \neq B(\overline{\mathbf{x}}) + B(\overline{\mathbf{y}}).$$

Следовательно, B – нелинейный.

ЗАДАЧА 5. Проверить, является ли линейным оператор:

C: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $C(\mathbf{x}) = (x_1+x_2;\ (x_2)^2;\ x_1+2x_3)$, где $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$.

РЕШЕНИЕ

Пусть $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $\mathbf{y} = (y_1; y_2; y_3)$.

Тогда $\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1; x_2 + y_2; x_3 + y_3)$, $\alpha \cdot \mathbf{x} = (\alpha x_1; \alpha x_2; \alpha x_3)$

1) $C(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \left([x_1 + y_1] + [x_2 + y_2];\ [x_2 + y_2]^2;\ [x_1 + y_1] + 2[x_3 + y_3]\right)$,

$$C(\mathbf{x}) + C(\mathbf{y}) = (x_1 + x_2;\ (x_2)^2;\ x_1 + 2x_3) + (y_1 + y_2;\ (y_2)^2;\ y_1 + 2y_3) =$$

$$= (x_1 + x_2 + y_1 + y_2;\ (x_2)^2 + (y_2)^2;\ x_1 + 2x_3 + y_1 + 2y_3).$$

Так как $(x_2 + y_2)^2 \neq (x_2)^2 + (y_2)^2$, то

$$C(\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}}) \neq C(\overline{\mathbf{x}}) + C(\overline{\mathbf{y}}).$$

Следовательно, C – нелинейный.

2. Линейные операторы конечномерных пространств

Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n,

$e_1,\ldots,e_n$ – базис L_n

Разложим векторы $\varphi(e_i)$ по базису $e_1,e_2,\ldots e_n$:

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n ,$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n .$$

Матрицу **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

составленную из координат векторов $\varphi(e_i)$ в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$ называют ***матрицей линейного оператора φ*** в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$ (относительно базиса $e_1,e_2,\ldots e_n$)

ПРИМЕРЫ матриц линейного оператора.

1) Матрица нулевого оператора Θ n-мерного пространства в любом базисе – нулевая.

   Действительно, $\Theta(e_i) = o = \{0; 0; \ldots; 0\}, \ \forall e_i$.

2) Матрица оператора тождественного оператора I n-мерного пространства в любом базисе – единичная.

   Действительно, $I(e_i) = e_i = \{0; 0; \ldots; 1; 0; \ldots; 0\}, \ \forall e_i$.

3) Матрица оператора подобия n-мерного пространства в любом базисе имеет вид

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \ldots. & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \ldots. & 0 \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ 0 & 0 & 0 & \ldots. & \lambda \end{pmatrix}.$$

   Действительно, $\varphi(e_i) = \lambda e_i = \{0; 0; \ldots; \lambda; 0; \ldots; 0\}, \ \forall e_i$.

ЗАДАЧА 6. Найти матрицу оператора $\varphi_1 \colon V^{(3)} \to V^{(3)}$,

$$\varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}}, \quad \text{где } \overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\} \neq \overline{\mathbf{0}}.$$

в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

РЕШЕНИЕ

Имеем: $\varphi_1(\mathbf{i}) = (\mathbf{i}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = a_x \overline{\mathbf{a}} = \{(a_x)^2;\ a_x a_y;\ a_x a_z\}$,

$$\varphi_1(\mathbf{j}) = (\mathbf{j}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = a_y \overline{\mathbf{a}} = \{a_y a_x;\ (a_y)^2;\ a_y a_z\},$$

$$\varphi_1(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = a_z \overline{\mathbf{a}} = \{a_z a_x;\ a_z a_y;\ (a_z)^2\};$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (a_x)^2 & a_y a_x & a_z a_x \\ a_x a_y & (a_y)^2 & a_z a_y \\ a_x a_z & a_y a_z & (a_z)^2 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 7. Пусть $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$, $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(\mathbf{x}) = (x_1+x_2;\ x_2-x_3;\ x_1-3x_3).$$

Найти матрицу A в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

РЕШЕНИЕ

Имеем: $\mathbf{e_1} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{e_2} = (0; 1; 0)$, $\mathbf{e_3} = (0; 0; 1)$.

$$\Rightarrow \quad A(\mathbf{e_1}) = (1+0;\ 0-0;\ 1-3\cdot 0) = (1; 0; 1) = \{1; 0; 1\},$$

$$A(\mathbf{e_2}) = (0+1;\ 1-0;\ 0-3\cdot 0) = (1; 1; 0) = \{1; 1; 0\},$$

$$A(\mathbf{e_3}) = (0+0;\ 0-1;\ 0-3\cdot 1) = (0; -1; -3) = \{0; -1; -3\}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Если **A** – матрица линейного оператора φ в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$, то вектор x и его образ $y = \varphi(x)$ будут связаны соотношением:

$$\mathbf{Y=AX},$$

где **X, Y** – матрицы-столбцы из координат векторов x и y в базисе $e_1,e_2,\dots,e_n$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть φ – оператор n-мерного пространства* L_n, $e_1,e_2,\dots,e_n$ *и* $f_1,f_2,\dots,f_n$ *– два базиса пространства , причем*

$$f_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \dots + \tau_{n1}e_n,$$
$$f_2 = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \dots + \tau_{n2}e_n,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$f_n = \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \dots + \tau_{nn}e_n.$$

Если $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе* $e_1,e_2,\dots,e_n$,

$\mathbf{B}=(b_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе* $f_1,f_2,\dots,f_n$,

то

$$\mathbf{B=T^{-1}AT},$$

где $\mathbf{T}=(\tau_{ij})$ *– матрица перехода от базиса* $e_1,e_2,\dots e_n$ *к базису* $f_1,f_2,\dots,f_n$*, т.е.*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \dots & \tau_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратные матрицы **A** и **B**, для которых найдется невырожденная матрица **C** такая, что имеет место равенство $\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, называются ***подобными***.

ПРИМЕР.

Пусть $\varphi: L_3 \to L_3$, e_1,e_2,e_3 и f_1,f_2,f_3 – два базиса L_3.

В базисе e_1,e_2,e_3 оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$.

Найти его матрицу **B** в базисе f_1,f_2,f_3, если

$$f_1 = e_1 + e_2 , \quad f_2 = e_1 - e_3 , \quad f_3 = e_2 + 2e_3 .$$

РЕШЕНИЕ

По формуле $\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$, где **T** – матрица перехода от базиса e_1,e_2,e_3 к базису f_1,f_2,f_3.

В нашем случае $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$.

1) Найдем матрицу $\mathbf{T}^{-1}$. Имеем:

$$|\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1,$$

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad T_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad T_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \qquad T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{T}|}\cdot\mathbf{S}^T = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Находим матрицу **B**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+0+0 & 0+2-3 & 1+4-1 \\ 2+0+0 & 0-2+3 & -2-4+1 \\ 1+0+0 & 0-1+3 & -1-2+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 7 \\ 3 & 7 & -9 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Линейные операторы конечномерных пространств

Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n,

$e_1,\ldots,e_n$ – базис L_n

Разложим векторы $\varphi(e_i)$ по базису $e_1,e_2,\ldots e_n$:

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \ldots + a_{n1}e_n\,,$$
$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \ldots + a_{n2}e_n\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \ldots + a_{nn}e_n\,.$$

Матрицу **A**

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots. & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots. & a_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots. & a_{nn} \end{pmatrix}$$

составленную из координат векторов $\varphi(e_i)$ в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$ называют ***матрицей линейного оператора φ*** в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$ (относительно базиса $e_1,e_2,\ldots e_n$)

ПРИМЕРЫ матриц линейного оператора.

1) Матрица нулевого оператора Θ n-мерного пространства в любом базисе – нулевая.

Действительно, $\Theta(e_i) = o = \{0; 0; \ldots; 0\}, \ \forall e_i$.

2) Матрица оператора тождественного оператора I n-мерного пространства в любом базисе – единичная.

Действительно, $I(e_i) = e_i = \{0; 0; \ldots; 1; 0; \ldots; 0\}, \ \forall e_i$.

3) Матрица оператора подобия n-мерного пространства в любом базисе имеет вид

$$\mathbf{A} = \lambda\mathbf{E} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots. & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & \dots. & 0 \\ \dots. & \dots. & \dots. & \dots. & \dots. \\ 0 & 0 & 0 & \dots. & \lambda \end{pmatrix}.$$

Действительно, $\varphi(e_i) = \lambda e_i = \{0; 0; \ldots; \lambda; 0; \ldots; 0\}, \ \forall e_i$.

ЗАДАЧА 6. Найти матрицу оператора $\varphi_1 \colon V^{(3)} \to V^{(3)}$,

$$\varphi_1(\overline{\mathbf{x}}) = (\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}}, \quad \text{где } \overline{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\} \neq \overline{\mathbf{0}}.$$

в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

РЕШЕНИЕ

Имеем: $\varphi_1(\mathbf{i}) = (\mathbf{i}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = a_x \overline{\mathbf{a}} = \{(a_x)^2;\ a_x a_y;\ a_x a_z\},$

$$\varphi_1(\mathbf{j}) = (\mathbf{j}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = a_y \overline{\mathbf{a}} = \{a_y a_x;\ (a_y)^2;\ a_y a_z\},$$

$$\varphi_1(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}, \overline{\mathbf{a}})\overline{\mathbf{a}} = a_z \overline{\mathbf{a}} = \{a_z a_x;\ a_z a_y;\ (a_z)^2\};$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} (a_x)^2 & a_y a_x & a_z a_x \\ a_x a_y & (a_y)^2 & a_z a_y \\ a_x a_z & a_y a_z & (a_z)^2 \end{pmatrix}.$$

ЗАДАЧА 7. Пусть $\mathbf{x} = (x_1; x_2; x_3)$, A: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$A(\mathbf{x}) = (x_1+x_2;\ x_2-x_3;\ x_1-3x_3).$$

Найти матрицу A в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^3$.

РЕШЕНИЕ

Имеем: $\mathbf{e_1} = (1; 0; 0)$, $\mathbf{e_2} = (0; 1; 0)$, $\mathbf{e_3} = (0; 0; 1)$.

$$\Rightarrow \quad A(\mathbf{e_1}) = (1+0;\ 0-0;\ 1-3\cdot 0) = (1; 0; 1) = \{1; 0; 1\},$$

$$A(\mathbf{e_2}) = (0+1;\ 1-0;\ 0-3\cdot 0) = (1; 1; 0) = \{1; 1; 0\},$$

$$A(\mathbf{e_3}) = (0+0;\ 0-1;\ 0-3\cdot 1) = (0; -1; -3) = \{0; -1; -3\}.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Если **A** – матрица линейного оператора φ в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$, то вектор x и его образ $y = \varphi(x)$ будут связаны соотношением:

$$\mathbf{Y=AX},$$

где **X, Y** – матрицы-столбцы из координат векторов x и y в базисе $e_1,e_2,\ldots,e_n$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* φ *– оператор n-мерного пространства* L_n, $e_1,e_2,\ldots,e_n$ *и* $f_1,f_2,\ldots,f_n$ *– два базиса пространства , причем*

$$f_1 = \tau_{11}e_1 + \tau_{21}e_2 + \ldots + \tau_{n1}e_n\,,$$
$$f_2 = \tau_{12}e_1 + \tau_{22}e_2 + \ldots + \tau_{n2}e_n\,,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n = \tau_{1n}e_1 + \tau_{2n}e_2 + \ldots + \tau_{nn}e_n\,.$$

Если $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *– матрица оператора* φ *в базисе* $e_1,e_2,\ldots,e_n$,

$\mathbf{B}=(b_{ij})$ *– матрица оператора* φ *в базисе* $f_1,f_2,\ldots,f_n$,

то

$$\mathbf{B=T^{-1}AT},$$

где $\mathbf{T}=(\tau_{ij})$ *– матрица перехода от базиса* $e_1,e_2,\ldots e_n$ *к базису* $f_1,f_2,\ldots,f_n$, *т.е.*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots. & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots. & \tau_{2n} \\ \ldots. & \ldots. & \ldots. & \ldots. \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots. & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратные матрицы **A** и **B**, для которых найдется невырожденная матрица **C** такая, что имеет место равенство $\mathbf{B}=\mathbf{C}^{-1}\mathbf{AC}$, называются ***подобными***.

ПРИМЕР.

Пусть $\varphi: L_3 \to L_3$, e_1,e_2,e_3 и f_1,f_2,f_3 – два базиса L_3.

В базисе e_1,e_2,e_3 оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Найти его матрицу **B** в базисе f_1,f_2,f_3, если

$$f_1=e_1+e_2\,,\quad f_2=e_1-e_3\,,\quad f_3=e_2+2e_3\,.$$

РЕШЕНИЕ

По формуле $\mathbf{B}=\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$, где **T** – матрица перехода от базиса e_1,e_2,e_3 к базису f_1,f_2,f_3.

В нашем случае $\mathbf{T}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Найдем матрицу $\mathbf{T}^{-1}$. Имеем:

$$|\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1,$$

$$T_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \qquad T_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad T_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

$$T_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2, \qquad T_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \qquad T_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$T_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \qquad T_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad T_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{T}|}\cdot\mathbf{S}^T = \frac{1}{-1}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2) Находим матрицу **B**:

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1+0+0 & 0+2-3 & 1+4-1 \\ 2+0+0 & 0-2+3 & -2-4+1 \\ 1+0+0 & 0-1+3 & -1-2+1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -5 & 7 \\ 3 & 7 & -9 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$