Домашнее задание по теме: «Линейные операторы – 2»

1. В базисе 1, x, x^2 пространства $\mathbb{R}^{(3)}[x]$ оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $f_1(x)=3x^2+2x$, $f_2(x)=5x^2+3x+1$, $f_3(x)=7x^2+5x+3$.

   Ответ: $\mathbf{T}=\begin{pmatrix}0&1&3\\2&3&5\\3&5&7\end{pmatrix}$, $\mathbf{T}^{-1}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix}-4&8&-4\\1&-9&6\\1&3&-2\end{pmatrix}$, $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\-15/4&-4&-5\\9/4&3&4\end{pmatrix}$.

Линейный оператор φ пространства L_3 имеет в некотором базисе e_1,e_2,e_3 матрицу $\mathbf{A}$. Найти собственные подпространства этого оператора. Выяснить, диагонализируем ли линейный оператор, и если да – то записать его диагональную матрицу и базис из собственных векторов.

2) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$ 3) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1&4&6\\-3&-7&-7\\4&8&7\end{pmatrix}$

Ответ: а) Да. $\lambda_1=-1$, $\lambda_{2,3}=2$. $L_{\lambda=-1}=L(f_1)$, $L_{\lambda=2}=L(f_2,f_3)$, где $f_1=\{1;-1;-1\}$, $f_2=\{1;1;0\}$, $f_3=\{1;0;1\}$.

б) Нет. $\lambda_{1,2}=-1$, $\lambda_3=3$. $L_{\lambda=-1}=L(f_1)$, $L_{\lambda=3}=L(f_2)$, где $f_1=\{2;-1;0\}$, $f_2=\{1;-1;1\}$.

4. Докажите, что если x и y – собственные векторы линейного оператора φ, относящиеся к различным собственным значениям, то $\alpha x+\beta y$ ($\alpha\neq0$, $\beta\neq0$) не является собственным вектором оператора φ.