Домашнее задание по теме: «Линейные операторы – 1»

1. Доказать, что оператор пространства $V^{(3)}$, действующий на произвольный вектор $\overline{\mathbf{x}}$ по формуле $\varphi\overline{\mathbf{x}} = [\overline{\mathbf{x}}, \overline{\mathbf{a}}]$, где $\overline{\mathbf{a}}$ – фиксированный ненулевой вектор, является линейным. Найти матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, если вектор $\overline{\mathbf{a}}$ имеет в этом базисе координаты $\overline{\mathbf{a}} = \{a_1, a_2, a_3\}$.

   Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & a_3 & -a_2 \\ -a_3 & 0 & a_1 \\ a_2 & -a_1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Найти матрицу оператора φ_α поворота плоскости на угол α вокруг начала координат против часовой стрелки в базисе $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$.

   Ответ: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

3. Докажите, что линейный оператор пространства L всегда переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

4. Докажите, что если φ – линейный оператор пространства L, то $\varphi(o) = o$.

5. В базисе e_1, e_2, …, e_n пространства L_n оператор φ имеет матрицу $\mathbf{A}$. Как изменится матрица оператора φ, если а) в базисе поменять местами векторы e_i и e_j; б) записать базисные векторы в обратном порядке?

   Ответ: а) поменяются местами i-й и j-й столбцы и i-я и j-я строчки;
   б) все строки и столбцы запишутся в обратном порядке.