Домашнее задание по теме: «Линейные пространства и подпространства»

1. Проверить, образуют ли подпространство линейного пространства $\mathbb{R}^n$ следующие подмножества:
   а) $M_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_8 = 0\}$; в) $M_3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_n\}$;
   б) $M_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \alpha_8\}$; г) $M_4 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \forall i\}$;
   Ответы: а) да; б) да; в) да; г) нет.
2. Проверить, образуют ли подпространство линейного пространства $M(3\times 3, \mathbb{R})$ следующие подмножества:
   а) $S(3) = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}\right\}$ б) $S_1 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ b & 1 & e \\ c & e & 1 \end{pmatrix}\right\}$
   в) $KS(3) = \left\{\begin{pmatrix} 0 & b & c \\ -b & 0 & e \\ -c & -e & 0 \end{pmatrix}\right\}$ г) $S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & b & c \\ -b & 1 & e \\ -c & -e & 1 \end{pmatrix}\right\}$
   Ответы: а) да; б) нет; в) да; г) нет.
3. Доказать, что если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.
4. Доказать, что если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.
5. Выяснить, является ли данная система векторов $\mathbb{R}^4$ линейно зависимой:
   $a_1 = (4,-5,2,6)$, $a_2 = (2,-2,1,3)$, $a_3 = (1,-3,3,9)$, $a_4 = (4,-1,5,6)$.
   Ответ: линейно независимая ($D = -45$)
6. Выяснить, является ли данная система векторов $\mathbb{R}[x]$ линейно зависимой: $f_1(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 4$, $f_2(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 5$,
   $f_3(x) = 3x^3 + 4x^2 + 5x + 6$, $f_4(x) = 4x^3 + 5x^2 + 6x + 7$.
   Ответ: линейно зависимая.
7. Проверить, что векторы
   $$f_1(x) = 2x^2 + 2x - 1,\quad f_2(x) = 2x^2 - x + 2,\quad f_3(x) = -x^2 + 2x + 2,$$
   образуют базис пространства $\mathbb{R}^3[x]$ и найти координаты вектора $g(x) = x^2 + x + 1$ в этом базисе. **Ответ**: $\left\{\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right\}$.
8. Проверить, что векторы $e_1 = (1,5)$, $e_2 = (2,7)$ и $f_1 = (3,9)$, $f_2 = (3,3)$ образуют базисы пространства $\mathbb{R}^2$ и найти координаты вектора x в базисе f_1, f_2, если известно, что в базисе e_1, e_2 он имеет координаты $\{4;-2\}$.
   Ответ: $\{1; -1\}$, $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.