Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Кривые второго порядка*** **(*продолжение*)**

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

4. Общее определение эллипса, гиперболы и параболы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Прямые* $\ell_{1,2} : x = \mp \dfrac{a}{\varepsilon}$ *называются* ***директрисами*** *эллипса* $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *и гиперболы* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Пусть M – произвольная точка эллипса или гиперболы.

$$r_{\mathrm{i}} = |MF_{\mathrm{i}}|, \qquad d_{\mathrm{i}} = d(M, \ell_{\mathrm{i}})$$

ТЕОРЕМА. *Для любой точки* M *эллипса (гиперболы) имеет место равенство* $\dfrac{r_i}{d_i} = \varepsilon$

Замечание. По определению параболы $r = d$.

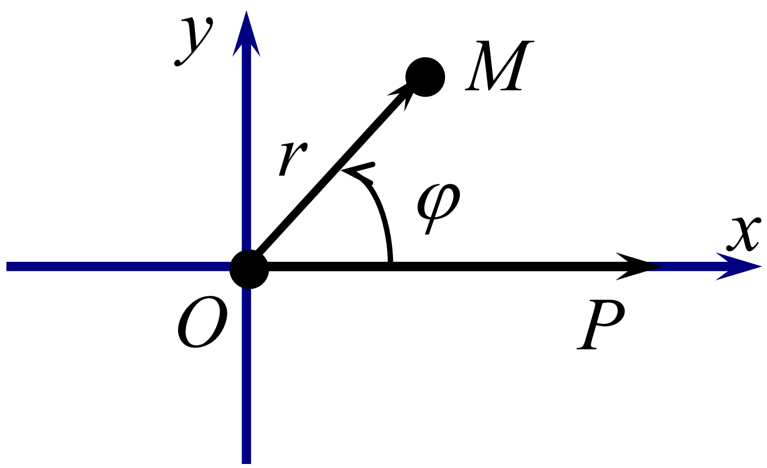
$\Rightarrow$ параболу можно считать кривой, у которой эксцентриситет $\varepsilon = 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Геометрическое место точек, для которых отношение расстояния до фиксированной точки (фокуса) к расстоянию до фиксированной прямой (директрисы) есть величина постоянная и равная* ε *, называется*

1) *эллипсом, если* $\varepsilon<1$;
2) *гиперболой, если* $\varepsilon>1$;
3) *параболой, если* $\varepsilon = 1$.

5. Полярное уравнение эллипса, параболы и ветки гиперболы

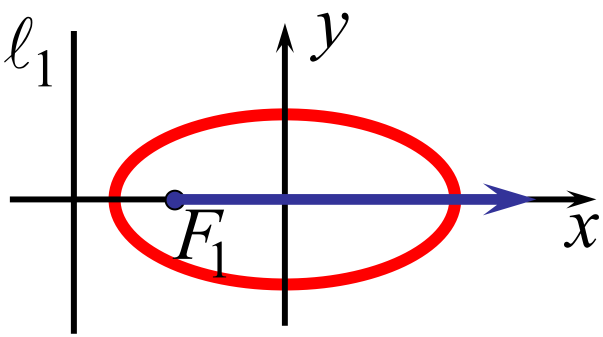
Полярная система координат:

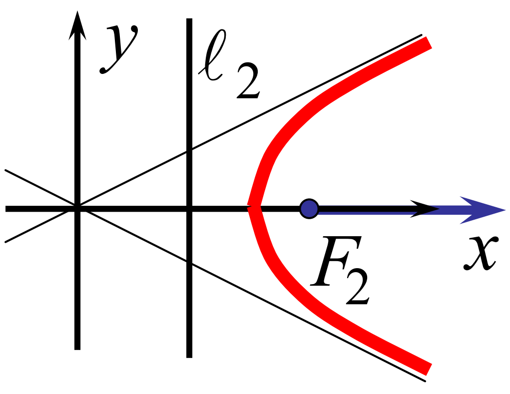


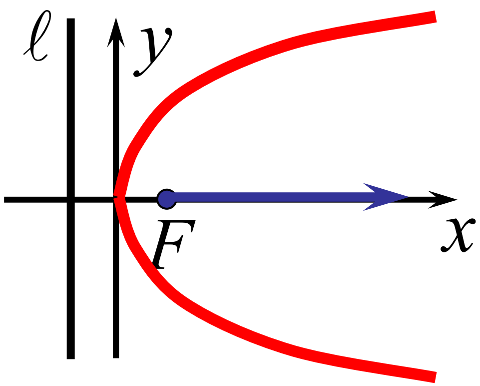
O – полюс; OP – полярная ось.
r – полярный радиус точки M;
φ – полярный угол точки M.

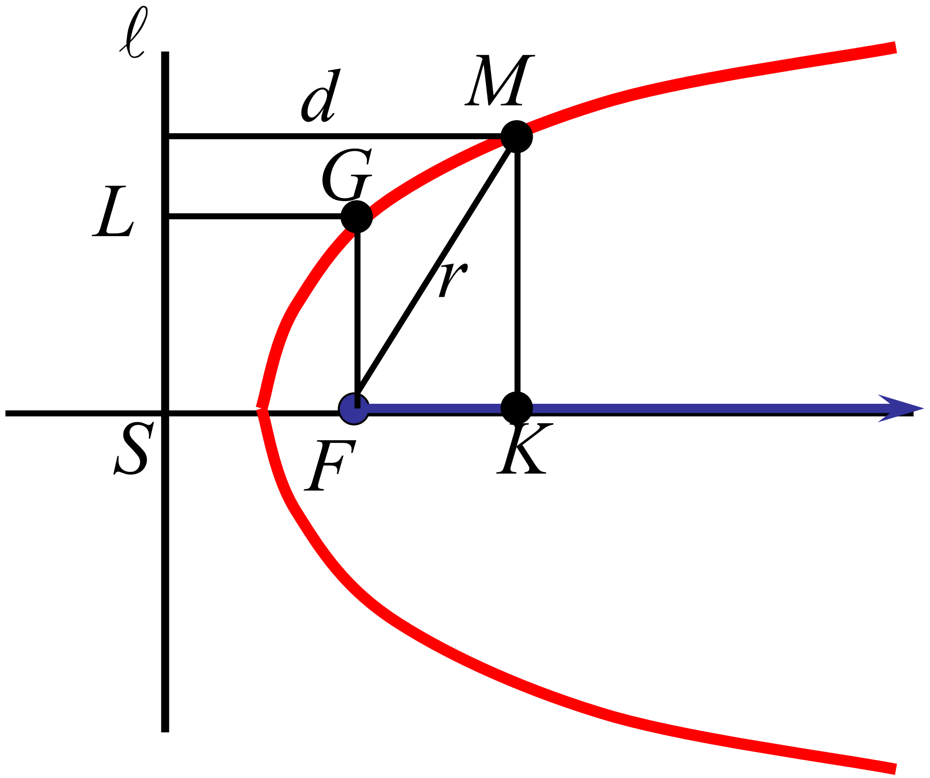
Связь декартовых и полярных координат:
$x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

Введем на плоскости полярную систему координат иначе:



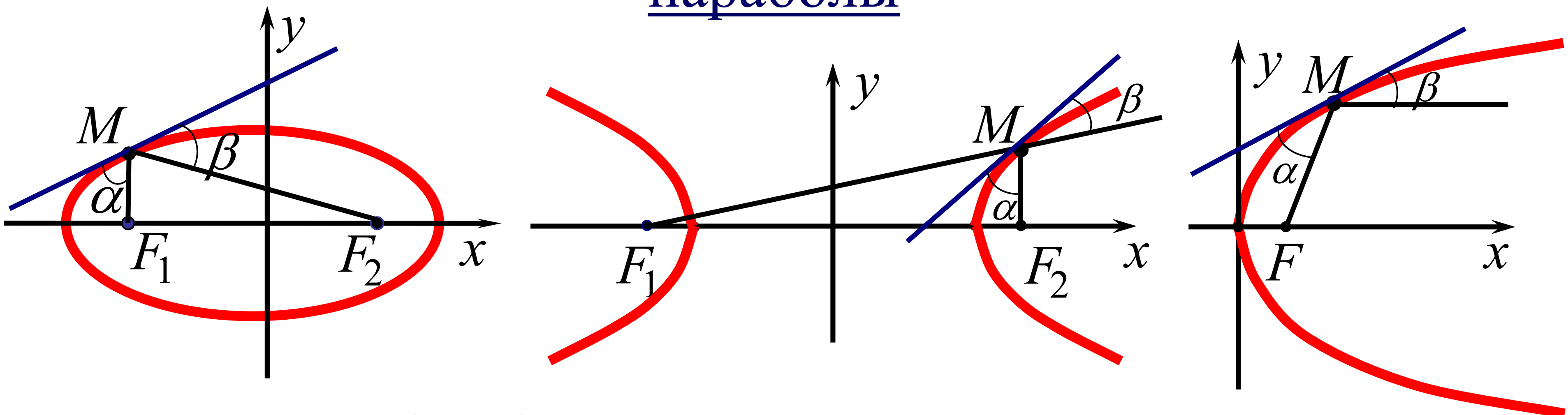






Уравнение $r = \dfrac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$ – уравнение эллипса, параболы и ветви гиперболы в полярной системе координат (***полярное уравнение кривой***).

6. Оптическое свойство эллипса, гиперболы и параболы

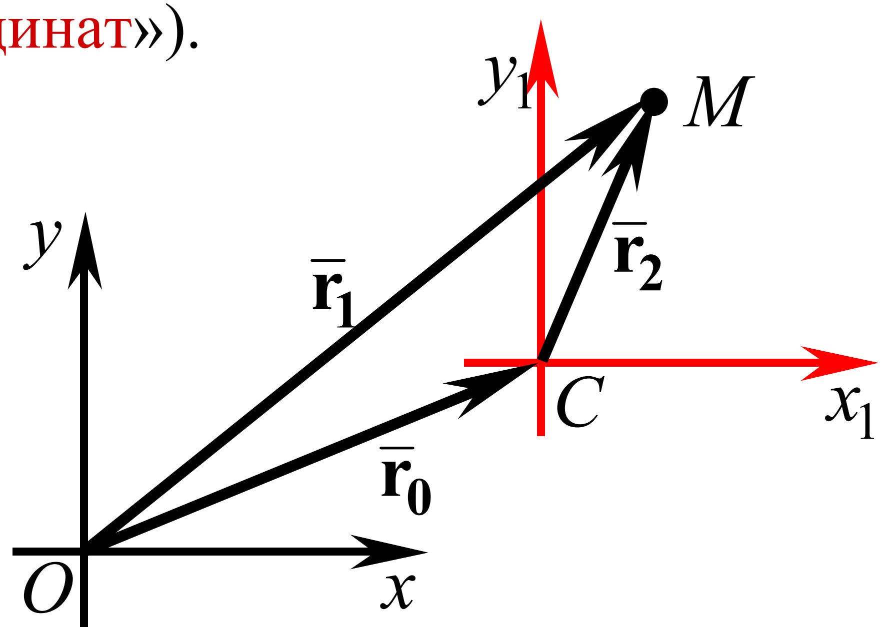


Получаем: α = β .С физической точки зрения это означает:

1) Если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.
2) Если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса.
3) Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее параллельно оси.

7. Координаты точки в разных системах координат Общее уравнение кривой второго порядка

а) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и x_1Cy_1 такие, что $Ox \uparrow\uparrow Cx_1$, $Oy \uparrow\uparrow Cy_1$ («параллельные системы координат»).



Получаем:

$$\begin{cases} x_1 = x - x_0, \\ y_1 = y - y_0 \end{cases} \qquad (8)$$

Формулу (8) называют ***формулой преобразования координат точки при переносе начала координат в точку*** $C(x_0;y_0)$.

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (9)$$

С помощью элементарных преобразований, уравнение (9) может быть приведено к виду:

$$\left.\begin{array}{ll} 1)\ \text{при}\ AC \neq 0: & \dfrac{(x-x_0)^2}{\alpha} + \dfrac{(y-y_0)^2}{\beta} = 1 \\ 2)\ \text{при}\ C = 0: & (x-x_0)^2 = \alpha(y-y_0) \\ 3)\ \text{при}\ A = 0: & (y-y_0)^2 = \alpha(x-x_0) \end{array}\right\} \qquad (10)$$

ВЫВОД: Уравнение (9) определяет кривую, каноническая система координат которой параллельна заданной, но имеет начало в точке $C(x_0, y_0)$.

Говорят: *уравнение* (9) *определяет кривую со смещенным центром (вершиной)*, а уравнение (10) называют ***каноническим уравнением кривой со смещенным центром (вершиной)***.

Замечание. Приводить уравнение (9) к виду (10) необходимо, если мы хотим построить кривую. Тип кривой можно определить и без уравнения (10). А именно:

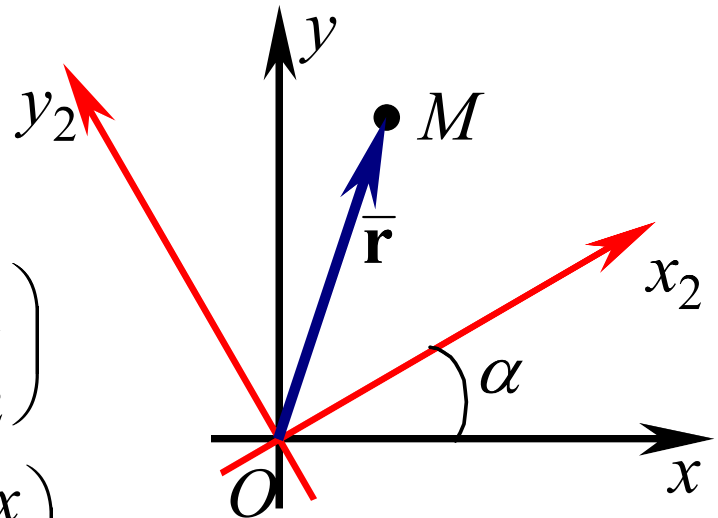
1) если $AC = 0$, то кривая является параболой;

2) если $AC < 0$, то кривая является гиперболой;

3) если $AC > 0$, $A \neq C$ – эллипсом;

4) если $AC > 0$, $A = C$ – окружностью.

б) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и x_2Oy_2 такие, что угол поворота от Ox к Ox_2 равен α («x_2Oy_2 ***развернута по отношению к*** xOy»).



Получаем:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x_2 = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y, \\ y_2 = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y. \end{cases} \qquad (11)$$

Формулу (11) называют ***формулой преобразования координат точки при повороте координатных осей.***

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + F = 0 \qquad (12)$$

Каноническая система координат x_2Oy_2 кривой (12) развернута относительно заданной на угол α . Ее можно найти следующим образом.

Пусть $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$

$\mathbf{Q}$ – матрица диагонализируемого оператора φ пространства $V^{(2)}$.

$\Rightarrow \exists$ базис $\bar{\mathbf{c}}_\mathbf{1}$, $\bar{\mathbf{c}}_\mathbf{2}$ (единичной длины и ортогональные), в котором оператор φ имеет диагональную матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Связь базисов:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{c}}_1 = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \sin\alpha \cdot \mathbf{j}, \\ \bar{\mathbf{c}}_2 = -\sin\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\alpha \cdot \mathbf{j}. \end{cases}$$

Связь координат точки:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \cos\alpha \cdot x_2 - \sin\alpha \cdot y_2, \\ y = \sin\alpha \cdot x_2 + \cos\alpha \cdot y_2. \end{cases} \qquad (13)$$

Преобразуем уравнение (12) с помощью формул (13).

Таким образом в системе координат x_2Oy_2 , оси которой определены векторами $\bar{\mathbf{c}}_1$ и $\bar{\mathbf{c}}_2$, уравнение кривой (12) будет иметь вид:

$$\lambda_1(x_2)^2 + \lambda_2(y_2)^2 + F = 0$$

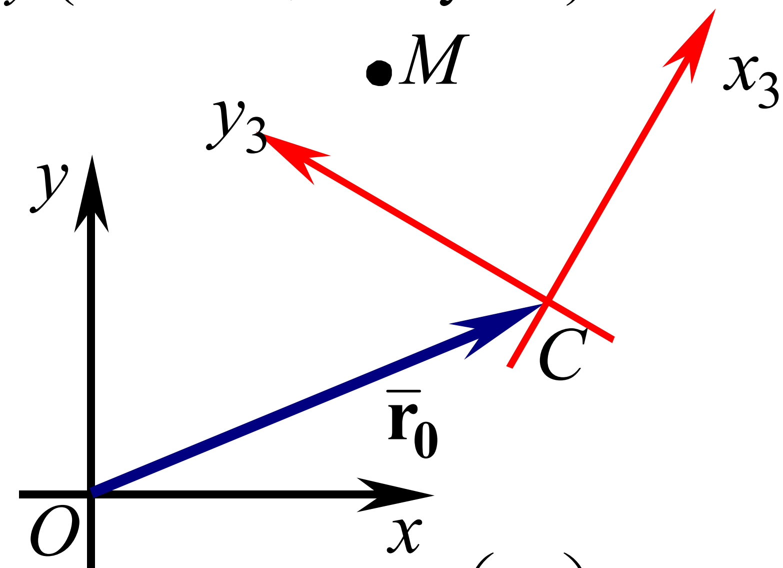
АЛГОРИТМ построения кривой, заданной уравнением (12).

1) записать **Q** и найти ее собственные значения λ_1 , λ_2 ;
2) найти собственные векторы $\bar{\mathbf{c}}_\mathbf{1}$, $\bar{\mathbf{c}}_\mathbf{2}$ (единичной длины и ортогональные), и построить каноническую систему координат x_2Oy_2 ;
3) записать уравнение

$$\lambda_1(x_2)^2 + \lambda_2(y_2)^2 + F = 0$$

и построить кривую.

в) Пусть заданы декартовы прямоугольные системы координат xOy и x_3Cy_3 такие, что x_3Cy_3 смещена и развернута по отношению к xOy (т.е. общий случай)



Из формул (11) и (8) получаем: $\begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \mathbf{T}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = \cos\alpha \cdot x + \sin\alpha \cdot y - x_0, \\ y_3 = -\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y - y_0. \end{cases} \qquad (14)$$

Формулу (14) называют ***формулой преобразования координат точки при переходе к новой системе координат***.

Рассмотрим уравнение

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (15)$$

Каноническая система координат кривой (15) развернута относительно заданной на угол α и ее начало смещено в некоторую точку.

Чтобы построить кривую 2-го порядка в общем случае необходимо найти ее каноническую систему координат и уравнение кривой в этой системе координат.

Это делают в 2 этапа:

1) Ищут систему координат, в которой уравнение кривой не содержит слагаемого с произведением переменных (разворачивают координатные оси на угол α).

2) Приводят полученное в 1) уравнение к виду (10) и сдвигают систему координат в точку C. Полученная система координат – каноническая.