

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: *Плоскость*

Лектор Пахомова Е.Г.

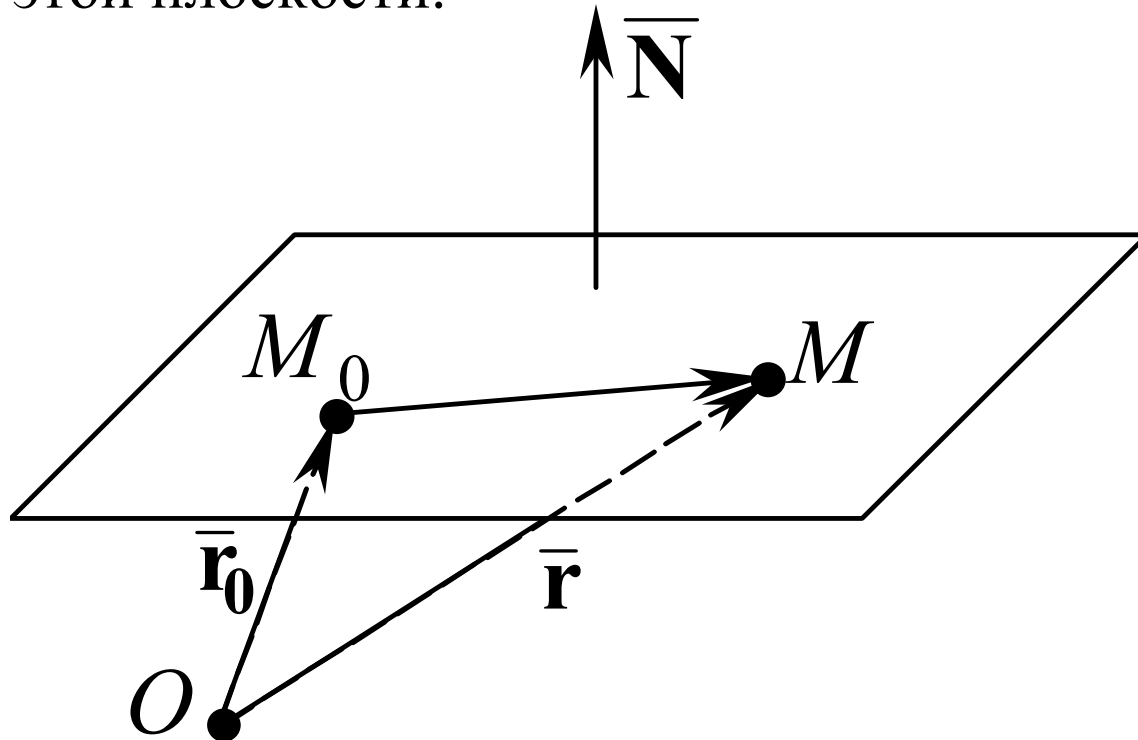
2012 г.

§ 13. Плоскость

1. Общее уравнение плоскости и его исследование

ЗАДАЧА 1. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, перпендикулярно вектору $\vec{N} = \{A; B; C\}$.

Вектор, перпендикулярный плоскости, называют **нормальным вектором** этой плоскости.



Уравнения $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{N}}) = 0$ (1*)

и $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ (1)

называют **уравнением плоскости, проходящей через точку**

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ **перпендикулярно вектору** $\bar{\mathbf{N}} = \{A; B; C\}$ (в векторной и координатной форме соответственно).

Уравнения $(\bar{\mathbf{r}}, \bar{\mathbf{N}}) + D = 0$ (2*)

и $Ax + By + Cz + D = 0$ (2)

называют **общим уравнением плоскости** (в векторной и координатной форме соответственно).

ВЫВОДЫ:

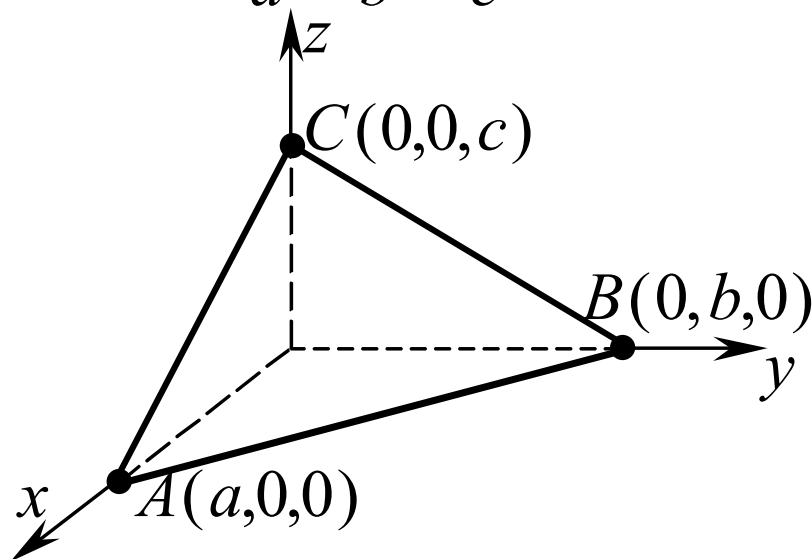
- 1) Плоскость является поверхностью первого порядка. В общем случае она задается уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D – числа.
- 2) Коэффициенты A, B, C не обращаются в ноль одновременно, так как с геометрической точки зрения это координаты вектора, перпендикулярного плоскости.

ИССЛЕДОВАНИЕ ОБЩЕГО УРАВНЕНИЯ ПЛОСКОСТИ

Если в уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ все коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то уравнение называют **полным**; если хотя бы один из коэффициентов равен нулю – **неполным**.

1) Пусть общее уравнение плоскости – полное. Тогда его можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad (3)$$

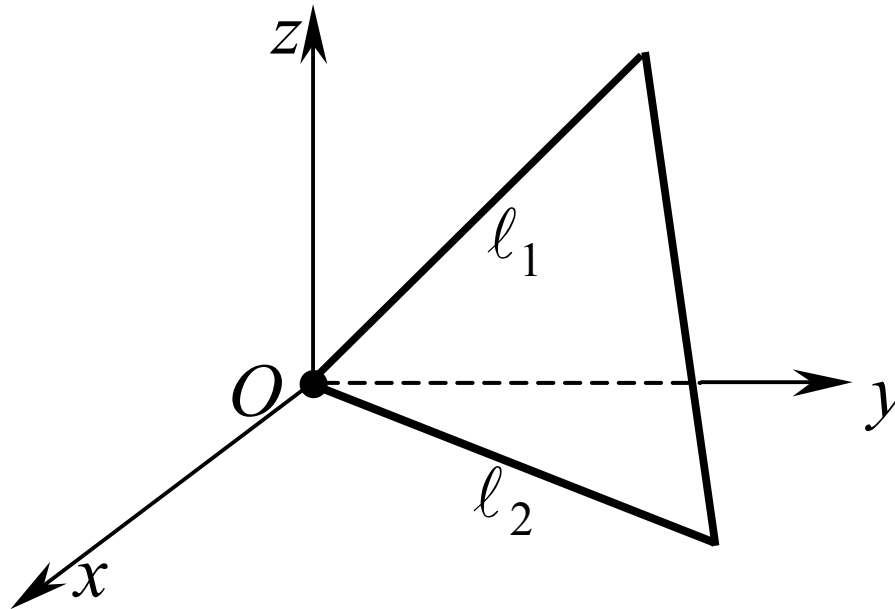


С геометрической точки зрения a , b и c – отрезки, отсекаемые плоскостью на координатных осях Ox , Oy и Oz соответственно. Уравнение (3) называют **уравнением плоскости в отрезках**.

2) Пусть в общем уравнении плоскости коэффициенты A , B и C – ненулевые, а $D = 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Такая плоскость проходит через начало координат $O(0;0;0)$.



$\ell_1: By + Cz = 0$ (пересечение с плоскостью Oyz)

$\ell_2: Ax + By = 0$ (пересечение с плоскостью Oxy)

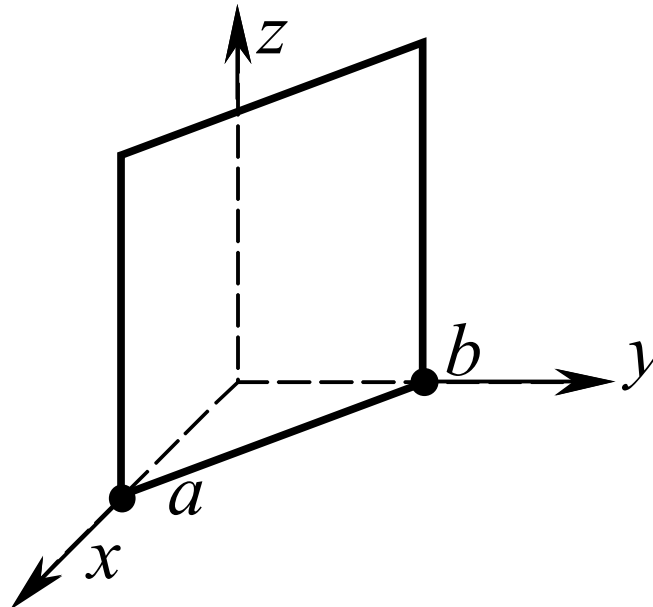
3) Пусть в общем уравнении плоскости один из коэффициентов A , B или C – нулевой, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости один из следующих трех видов:

а) $Ax + By + D = 0$ б) $Ax + Cz + D = 0$ в) $By + Cz + D = 0$.

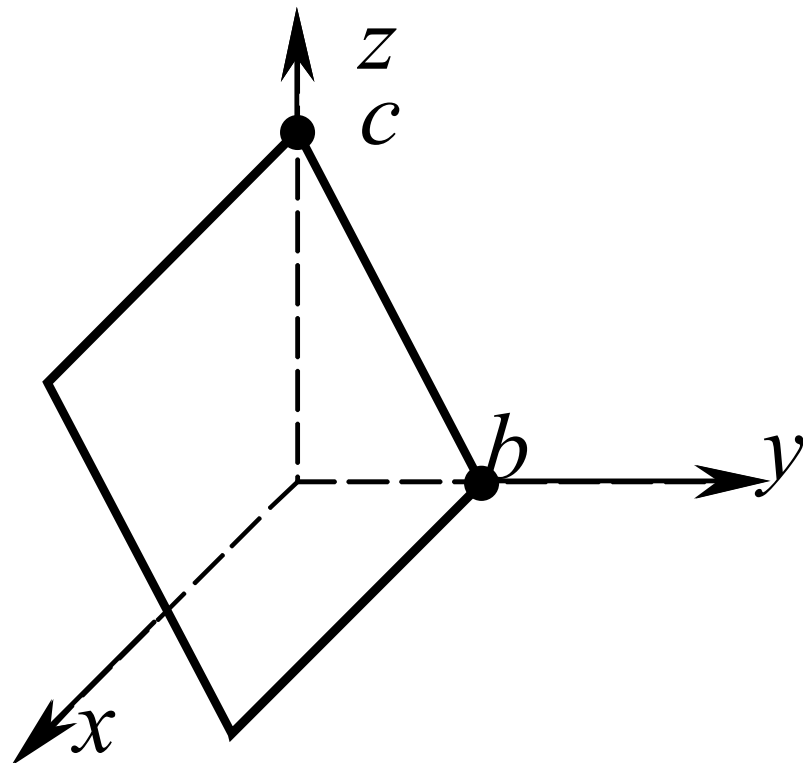
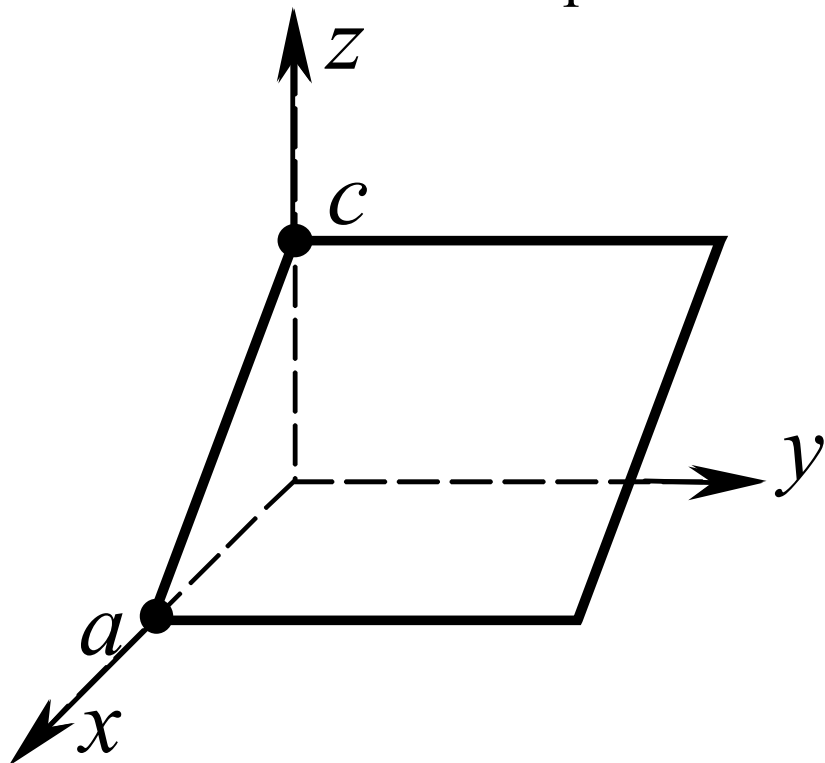
Эти уравнения можно записать соответственно в виде

а) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ б) $\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = 1$ в) $\frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на осях Ox и Oy отрезки a и b соответственно и параллельна оси Oz ;



- б) плоскость отсекает на осях Ox и Oz отрезки a и c соответственно и параллельна оси Oy ;
- в) плоскость отсекает на осях Oy и Oz отрезки b and c соответственно и параллельна оси Ox .



Таким образом, *плоскость, в уравнении которой отсутствует одна из координат, параллельна оси отсутствующей координаты.*

4) Пусть в уравнении плоскости (2) два из трех коэффициентов A , B или C – нулевые, а $D \neq 0$, т.е. уравнение плоскости имеет вид: а) $Ax + D = 0$ или б) $Bu + D = 0$ или в) $Cz + D = 0$.

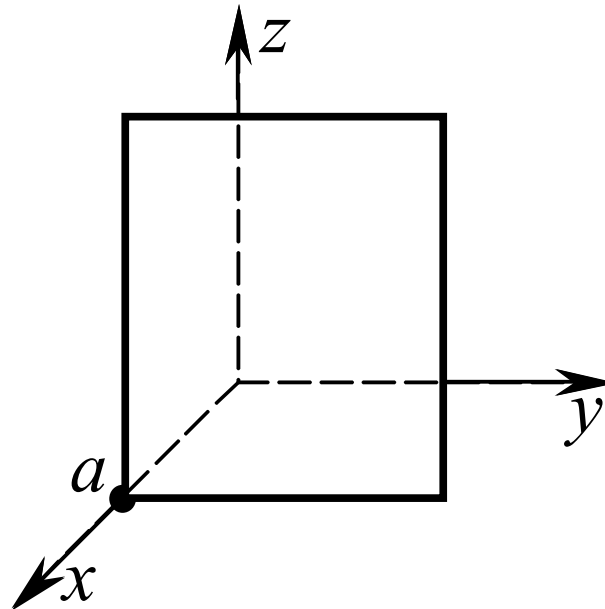
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $\frac{x}{a} = 1$

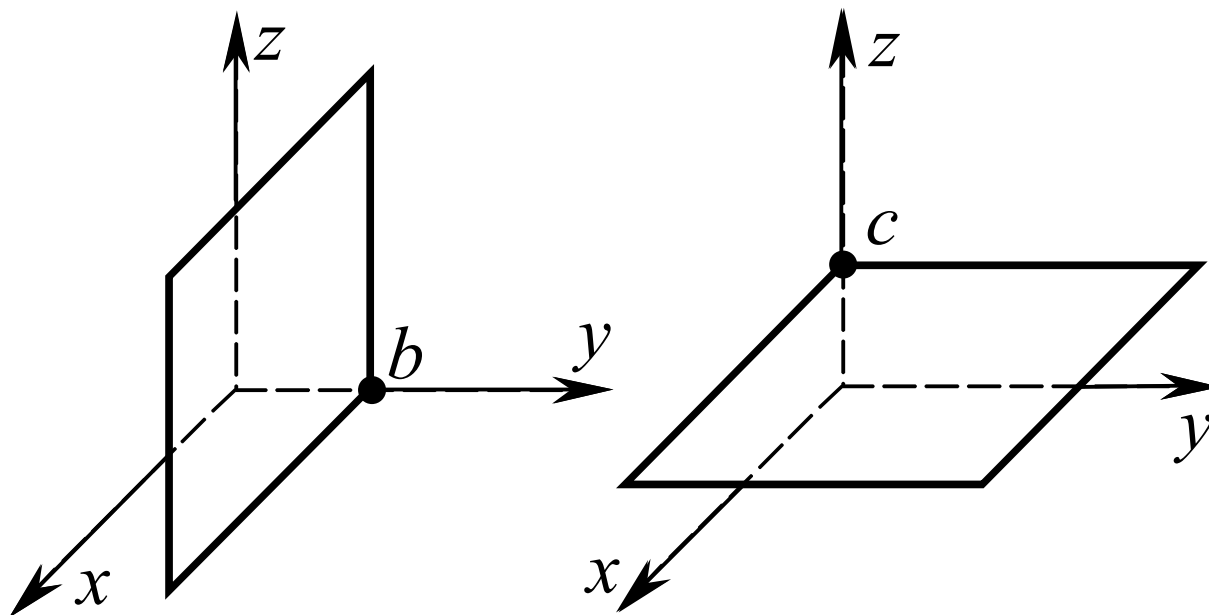
б) $\frac{y}{b} = 1$

в) $\frac{z}{c} = 1$

а) плоскость отсекает на оси Ox отрезок a и параллельна осям Oy и Oz (т.е. параллельна плоскости Oyz);



- б) плоскость $y / b = 1$ отсекает на Oy отрезок b и параллельна осям Ox и Oz (т.е. параллельна плоскости Oxz);
- в) плоскость $z / c = 1$ отсекает на Oz отрезок c и параллельна осям Ox и Oy (т.е. параллельна плоскости Oxy).

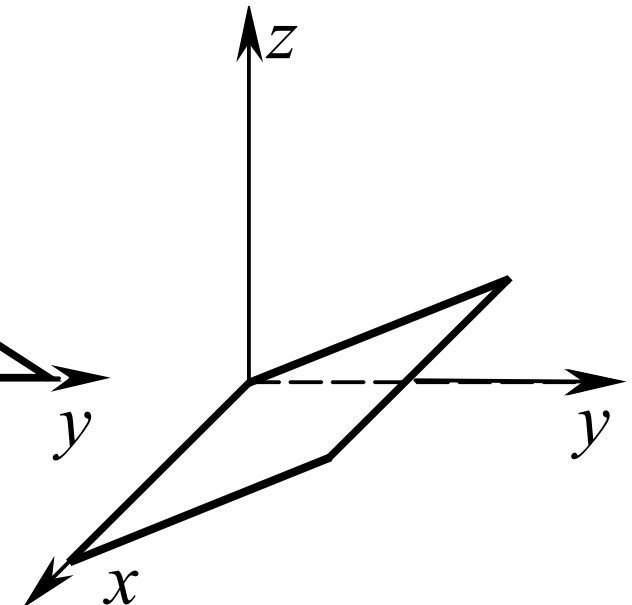
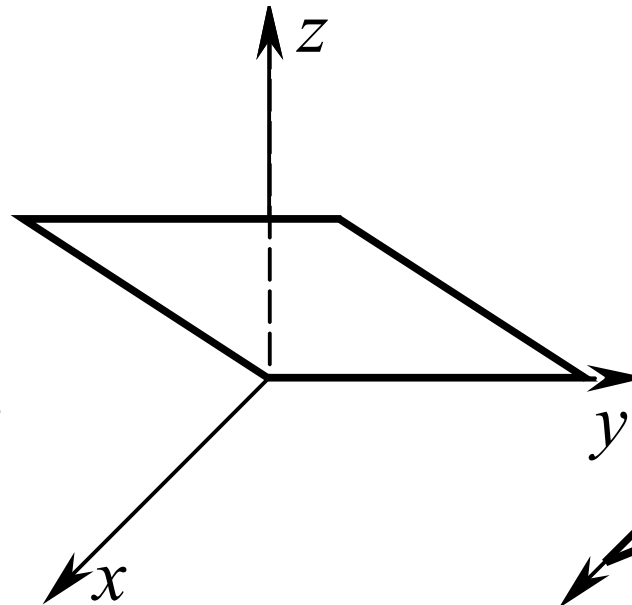
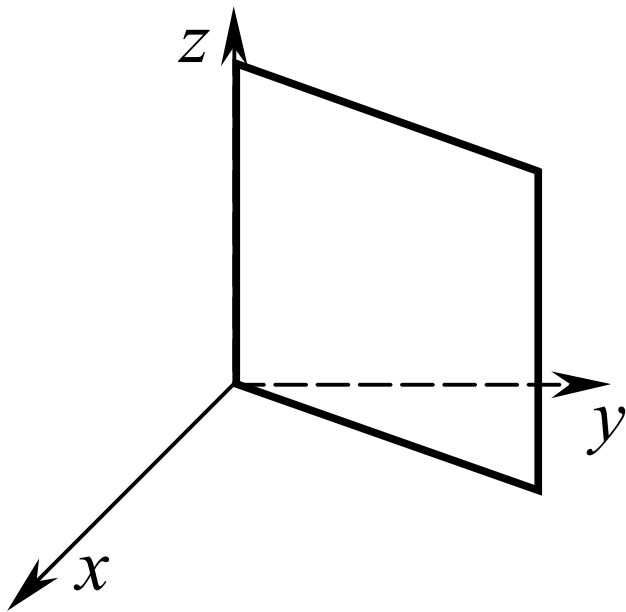


Таким образом, *плоскость, в уравнении которой отсутствуют две координаты, параллельна координатной плоскости, проходящей через оси отсутствующих координат.*

5) Пусть в общем уравнении плоскости (2) $D = 0$ и один из коэффициентов A , B или C тоже нулевой, т.е. уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax + By = 0$ или б) $Ax + Cz = 0$ или в) $By + Cz = 0$.

Плоскость проходит через начало координат и ось отсутствующей координаты



б) Пусть в общем уравнении плоскости (2) три коэффициента равны нулю, т.е. уравнение плоскости имеет вид

$$\text{а) } Ax = 0 \quad \text{или} \quad \text{б) } By = 0 \quad \text{или} \quad \text{в) } Cz = 0.$$

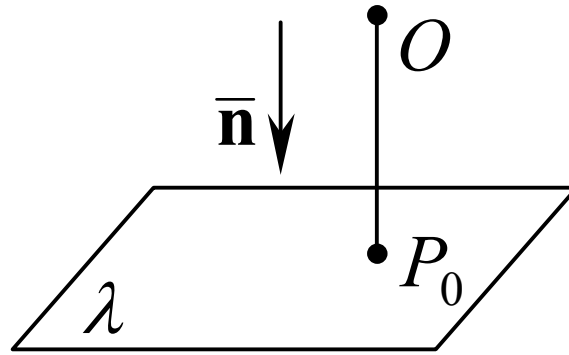
Эти уравнения можно записать соответственно в виде:

а) $x = 0$ – уравнение координатной плоскости Oyz ;

б) $y = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxz ,

в) $z = 0$ – уравнение координатной плоскости Oxy .

Замечание. Пусть плоскость λ не проходит через $O(0;0;0)$.



Обозначим:

- 1) $P_0(x_0; y_0; z_0)$ – основание перпендикуляра, опущенного на λ из начала координат,
- 2) $\bar{n} = \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$ – орт вектора $\overline{OP_0}$,
- 3) $p = \left| \overline{OP_0} \right|$ – расстояние от начала координат до λ .

Тогда уравнение λ можно записать в виде

$$\cos\alpha \cdot x + \cos\beta \cdot y + \cos\gamma \cdot z + D = 0,$$

где $D = -p$ (доказать самим).

Этот частный случай общего уравнения плоскости называется ***нормальным уравнением плоскости.***

2. Другие формы записи уравнения плоскости

Другие формы записи:

Уравнение плоскости, проходящей через точку перпендикулярно вектору (см. уравнение (1) и (1*));

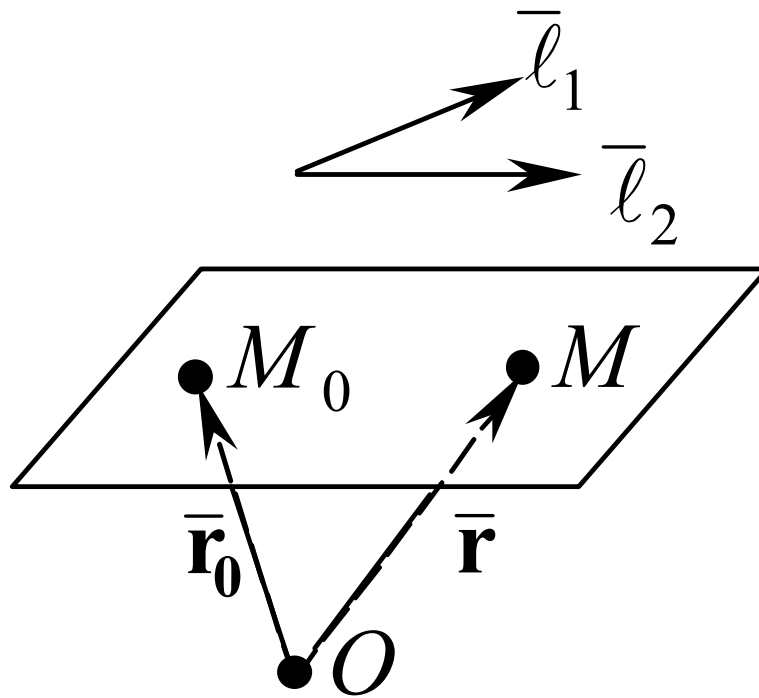
Уравнение плоскости в отрезках (см уравнение (3));

Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам;

Уравнение плоскости, проходящей через три точки;

1) Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам

ЗАДАЧА 2. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$, параллельно неколлинеарным векторам $\vec{l}_1 = \{m_1; n_1; p_1\}$ и $\vec{l}_2 = \{m_2; n_2; p_2\}$



Уравнения

$$(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_0, \bar{\mathbf{l}}_1, \bar{\mathbf{l}}_2) = 0 \quad (4^*)$$

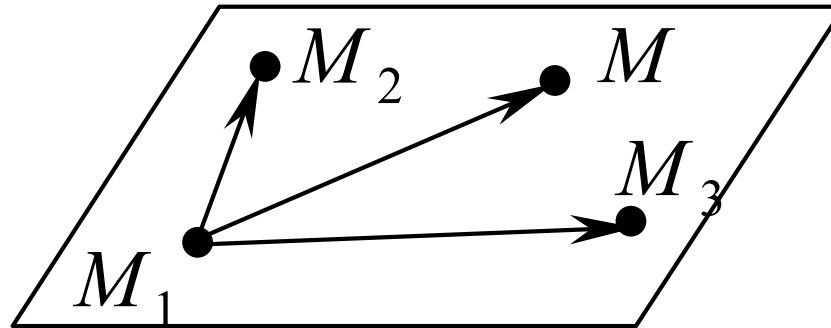
и

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

называют **уравнениями плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам** (в векторной и координатной форме соответственно).

2) Уравнение плоскости, проходящей через три точки, не лежащие на одной прямой – частный случай уравнения (4)

Пусть плоскость проходит через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.



Уравнения $(\bar{\mathbf{r}} - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_2 - \bar{\mathbf{r}}_1, \bar{\mathbf{r}}_3 - \bar{\mathbf{r}}_1) = 0$ (5*)

и
$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
 (5)

называют **уравнениями плоскости, проходящей через три точки** $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ и $M_3(x_3; y_3; z_3)$ (в векторной и координатной форме соответственно).

3. Взаимное расположение плоскостей

В пространстве две плоскости могут:

- а) быть параллельными,
- б) пересекаться.

Пусть уравнения плоскостей λ_1 и λ_2 имеют вид:

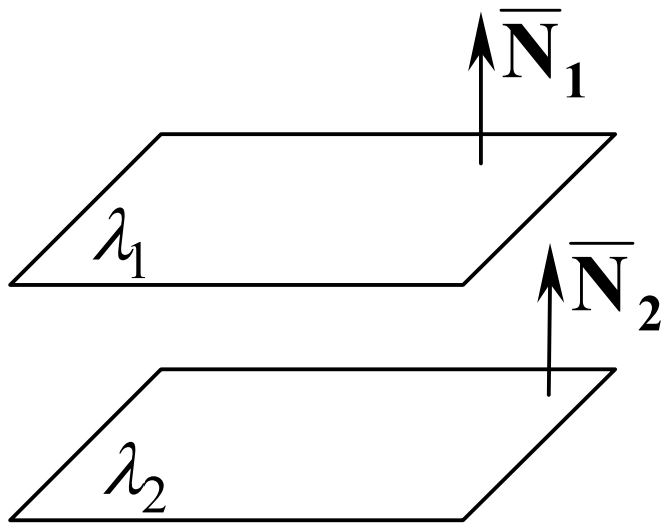
$$\lambda_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\lambda_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда: $\bar{N}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ – нормаль к λ_1 ;

$\bar{N}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ – нормаль к λ_2 .

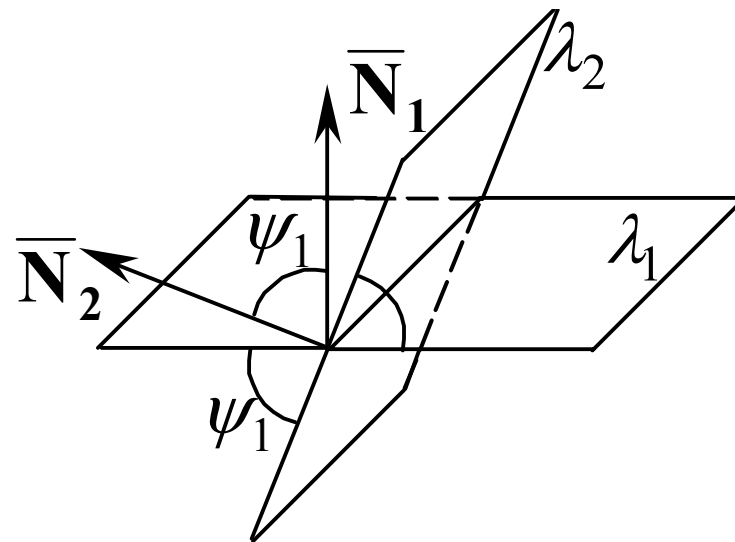
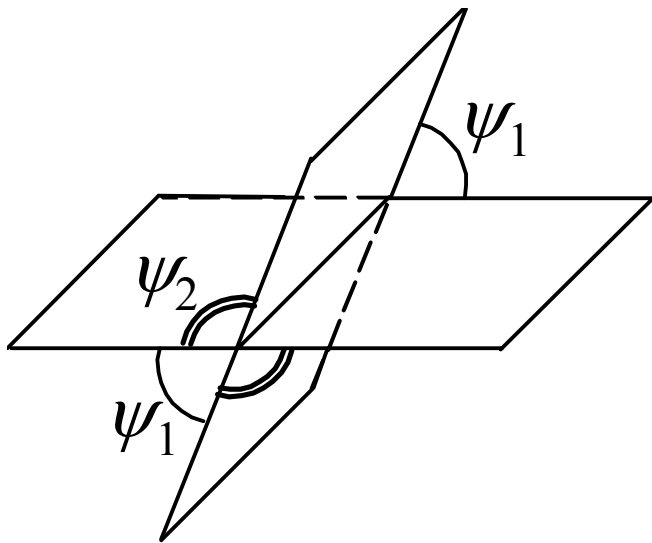
1) Пусть плоскости параллельны:



Получаем, что *плоскости λ_1 и λ_2 параллельны тогда и только тогда, когда в их общих уравнениях коэффициенты при соответствующих неизвестных пропорциональны, т.е.*

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

2) Пусть плоскости пересекаются



$$\cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{N}_1, \bar{N}_2)|}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} = \pm \frac{|A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2|}{\sqrt{(A_1)^2 + (B_1)^2 + (C_1)^2} \cdot \sqrt{(A_2)^2 + (B_2)^2 + (C_2)^2}}$$

где знак плюс берется в том случае, когда надо найти величину острого угла, а знак минус – когда надо найти величину тупого угла.

Частный случай – плоскости перпендикулярны, т.е.

$$\psi_1 = \psi_2 = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \cos \psi_1 = \cos \psi_2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos \psi_{1,2} = \pm \frac{|(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2)|}{|\bar{\mathbf{N}}_1| \cdot |\bar{\mathbf{N}}_2|} = 0$$

Критерий перпендикулярности плоскостей, заданных общими уравнениями:

$$(\bar{\mathbf{N}}_1, \bar{\mathbf{N}}_2) = A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0.$$

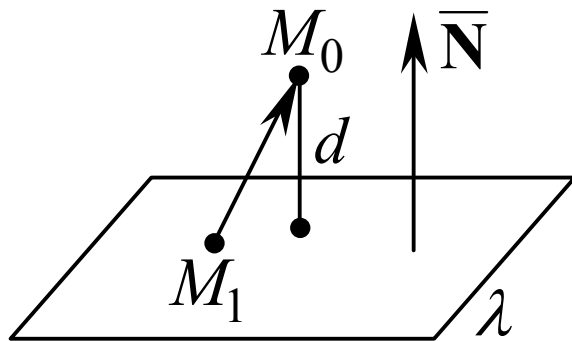
4. Расстояние от точки до плоскости

ЗАДАЧА 3. Пусть плоскость λ задана общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 ,$$

$M_0(x_0; y_0; z_0)$ – точка, не принадлежащая плоскости λ .

Найти расстояние от точки M_0 до плоскости λ .



$$d = \frac{|(\bar{N}, \overline{M_1M_0})|}{|\bar{N}|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$