

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: *Линейные операторы*

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§ 11. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Определение линейного оператора

Пусть L и V – линейные пространства над F (где F – множество рациональных, действительных или комплексных чисел).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функция, заданная на L и имеющая область значений $V_1 \subseteq V$ называется **оператором (преобразованием), действующим из L в V .**

Оператор, действующий из L в L , называют **оператором пространства L .**

Если оператор $\varphi: L \rightarrow V$, $\varphi: x \rightarrow y$, то y называется **образом элемента (вектора) x** и обозначается $\varphi(x)$ или φx , x называют **прообразом элемента (вектора) y .**

Оператор φ называется *линейным*, если для любых $x_1, x_2 \in L$ и любого $\alpha \in F$ выполнены следующие условия:

$$1) \varphi(x_1 + x_2) = \varphi(x_1) + \varphi(x_2),$$

$$2) \varphi(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \varphi(x).$$

Первое условие называется *свойством аддитивности*, второе – *свойством однородности* оператора. Вместе оба эти свойства называются *свойствами линейности оператора* и могут быть записаны в виде

$$\varphi(\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2) = \alpha \cdot \varphi(x_1) + \beta \cdot \varphi(x_2)$$

где $x_1, x_2 \in L$, $\alpha, \beta \in F$.

ЛЕММА 1. Если φ – линейный оператор, то $\varphi(o) = o$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

2. Линейные операторы конечномерных пространств

Пусть φ – оператор n -мерного пространства L_n ,
 e_1, \dots, e_n – базис L_n

Разложим векторы $\varphi(e_i)$ по базису e_1, e_2, \dots, e_n :

$$\varphi(e_1) = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n,$$

$$\varphi(e_2) = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n,$$

.....

$$\varphi(e_n) = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n.$$

Матрицу \mathbf{A}

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

составленную из координат векторов $\varphi(e_i)$ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n называют **матрицей линейного оператора φ** в базисе e_1, e_2, \dots, e_n (относительно базиса e_1, e_2, \dots, e_n)

Если \mathbf{A} – матрица линейного оператора φ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n , то вектор x и его образ $y = \varphi(x)$ будут связаны соотношением:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{X},$$

где \mathbf{X}, \mathbf{Y} – матрицы-столбцы из координат векторов x и y в базисе e_1, e_2, \dots, e_n .

ТЕОРЕМА 2. Пусть φ – оператор n -мерного пространства L_n , e_1, e_2, \dots, e_n и f_1, f_2, \dots, f_n – два базиса пространства, причем

$$f_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + \dots + c_{n1}e_n,$$

$$f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + \dots + c_{n2}e_n,$$

.....

$$f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + \dots + c_{nn}e_n.$$

Если $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица оператора φ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n ,

$\mathbf{B} = (b_{ij})$ – матрица оператора φ в базисе f_1, f_2, \dots, f_n ,

то

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{C},$$

где $\mathbf{C} = (c_{ij})$ – матрица перехода от базиса e_1, e_2, \dots, e_n к базису f_1, f_2, \dots, f_n , т.е.

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

Квадратные матрицы A и B , для которых найдется невырожденная матрица C такая, что имеет место равенство $B=С^{-1}АС$, называются **подобными**.

3. Диагонализируемость линейного оператора. Собственные значения и собственные векторы

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оператор φ n -мерного пространства L_n называется **диагонализуемым**, если в L_n существует базис, в котором матрица линейного оператора диагональная.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть φ – оператор пространства L . Если для некоторого ненулевого вектора $x \in L$ и числа λ имеем

$$\varphi(x) = \lambda \cdot x,$$

то число λ называется **собственным значением оператора** φ , а вектор x называется **собственным вектором оператора φ , относящимся к собственному значению λ .**

СВОЙСТВА СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ

1. ЛЕММА 3. *Каждый собственный вектор x оператора φ относится к единственному собственному значению.*
2. ЛЕММА 4. *Если x_1 и x_2 – собственные векторы оператора φ , относящиеся к одному и тому же собственному значению λ , то их линейная комбинация $\alpha \cdot x_1 + \beta \cdot x_2$ – собственный вектор оператора φ , относящийся к тому же собственному значению.*

Следствия ЛЕММЫ 4:

- а) *каждому собственному значению λ соответствует бесконечное множество собственных векторов;*
- б) *если к множеству всех собственных векторов x оператора φ , относящихся к собственному значению λ , присоединить нулевой вектор, то получится подпространство пространства L . Оно называется **собственным подпространством оператора** и обозначается L_λ .*

3. ЛЕММА 5. Собственные векторы x_1, x_2, \dots, x_k оператора φ , относящиеся к различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$, линейно независимы.

Следствия ЛЕММЫ 5:

- а) линейный оператор, действующий в n -мерном линейном пространстве L_n , не может иметь более n собственных значений;
- б) в пространстве может существовать базис, хотя бы часть которого – собственные векторы оператора.

ТЕОРЕМА 6 (необходимое и достаточное условие диагональности матрицы оператора).

Матрица A оператора φ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n имеет диагональный вид \Leftrightarrow все базисные векторы e_i являются собственными векторами этого оператора.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

КРИТЕРИЙ ДИАГОНАЛИЗИРУЕМОСТИ ОПЕРАТОРА:

оператор φ диагонализируем тогда и только тогда, когда в пространстве L_n существует базис из собственных векторов оператора .

Этот базис составляется из базисов собственных подпространств.

ВЫВОД: если система векторов, составленная из базисов собственных подпространств оператора, является базисом линейного пространства, то оператор диагонализируем.

5. Нахождение собственных значений и собственных векторов линейного оператора

Пусть φ – оператор n -мерного пространства L_n , x – собственный вектор оператора φ , относящийся к собственному значению λ , т.е.

$$\varphi(x) = \lambda \cdot x.$$

Пусть e_1, e_2, \dots, e_n – базис L_n ,

A – матрица линейного оператора φ в базисе e_1, e_2, \dots, e_n

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$$

Получили:

- 1) x – собственный вектор оператора φ , относящийся к собственному значению $\lambda \Leftrightarrow$ его координаты $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ являются решением (нетривиальным) системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda E)X = O$.
- 2) Подпространство L_λ является конечномерным, а его базис образуют собственные векторы x_1, x_2, \dots, x_k , координатами которых являются решения из фундаментальной системы решений СЛОУ $(A - \lambda E)X = O$.

Матрица $A - \lambda E$ называется ***характеристической матрицей оператора φ*** (матрицы A).

Определитель характеристической матрицы, т.е. $\det(A - \lambda E)$ – многочлен степени n относительно переменной λ .

Многочлен $\det(A - \lambda E)$ называют ***характеристическим многочленом оператора φ*** (матрицы A).

Корни многочлена $\det(A - \lambda E)$ называют ***характеристическими корнями оператора φ*** (матрицы A).

Таким образом, число λ является собственным значением оператора φ тогда и только тогда, когда оно является его характеристическим корнем.