

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: ***Нелинейные операции
на множестве свободных векторов
(смешанное произведение)
Понятие евклидова пространства***

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

3. Смешанное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Смешанным произведением* трех векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на векторное произведение векторов $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, [\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}]) .$$

Обозначают: $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}})$ или $\bar{\mathbf{a}} \bar{\mathbf{b}} \bar{\mathbf{c}}$.

СВОЙСТВА СМЕШАННОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) При циклической перестановке векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ их смешанное произведение не меняется, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{c}}, \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}).$$

2) При перестановке любых двух векторов их смешанное произведение меняет знак.

3) Числовой множитель любого из трех векторов можно вынести за знак смешанного произведения, т.е.

$$(\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \lambda \bar{\mathbf{c}}) = \lambda (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}).$$

4) Если один из векторов записан в виде суммы, то смешанное произведение тоже можно записать в виде суммы.

А именно:

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1, \bar{\mathbf{c}}) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2, \bar{\mathbf{c}}),$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1 + \bar{\mathbf{c}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}_2).$$

5) Критерий компланарности векторов.

Ненулевые векторы \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} компланарны \Leftrightarrow их смешанное произведение равно нулю .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

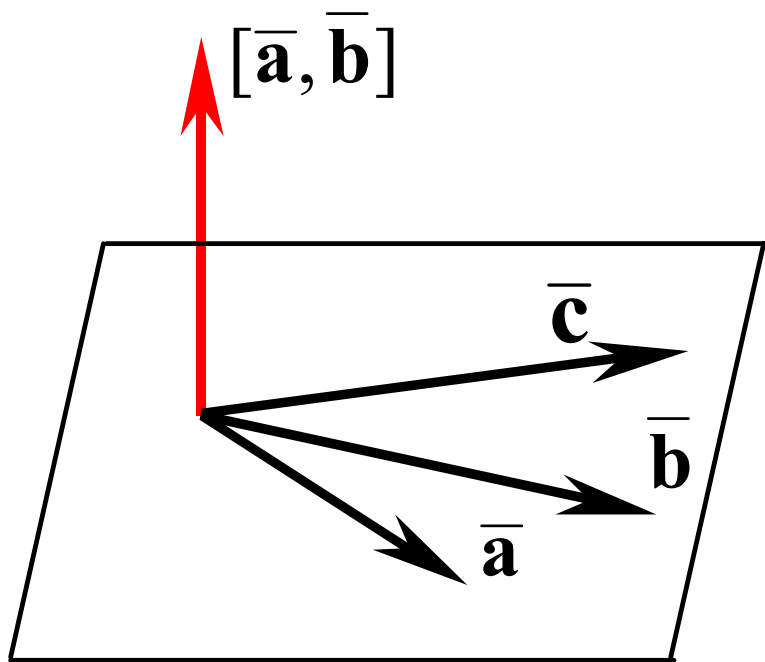


рис. 1

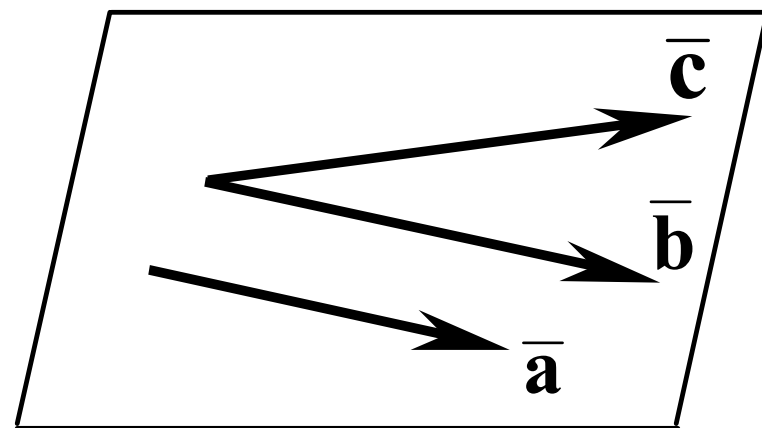


рис. 2

б) Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) > 0$, то $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ образуют правую тройку.

Если $(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) < 0$, то тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ – левая.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

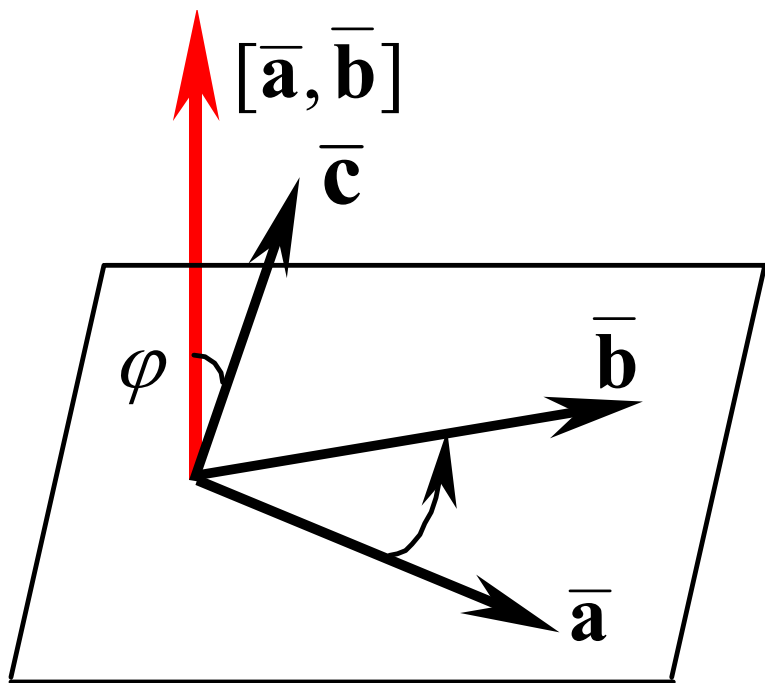


рис. 3

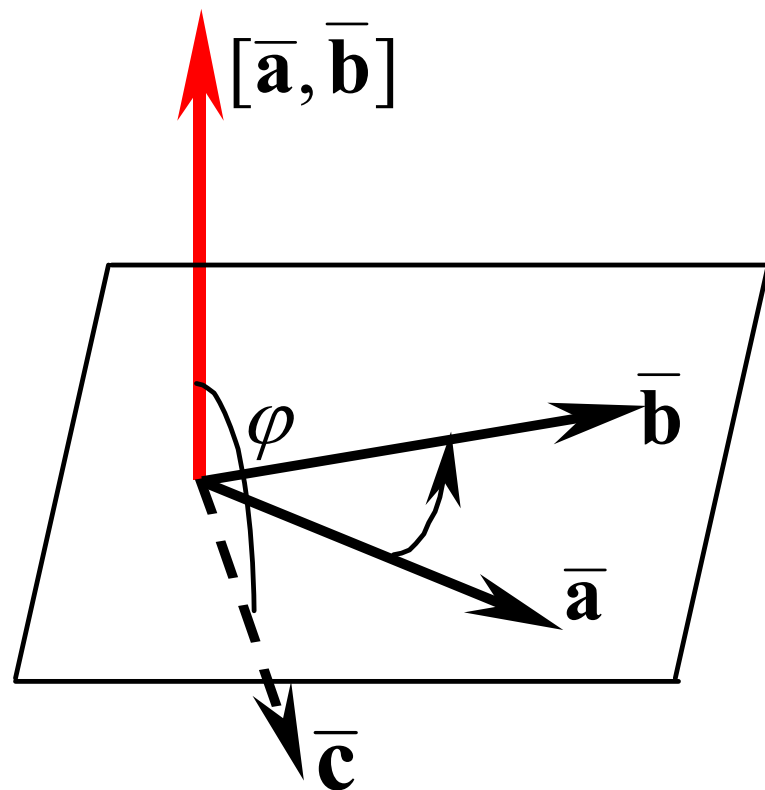


рис.4

7) Геометрический смысл смешанного произведения .
Модуль смешанного произведения некопланарных векторов \bar{a} , \bar{b} , \bar{c} равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

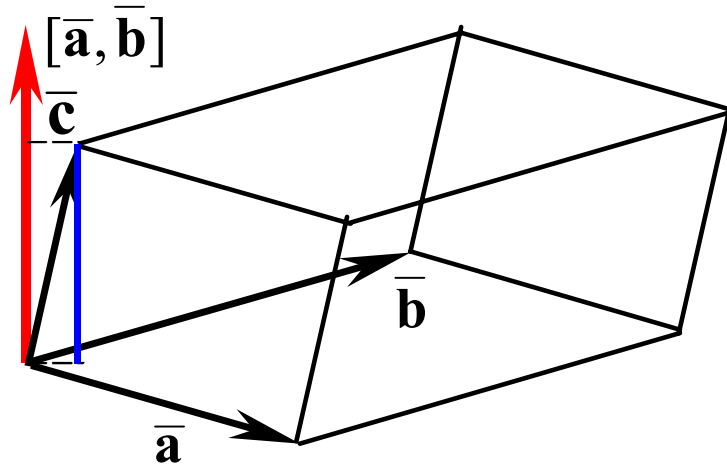


рис. 5

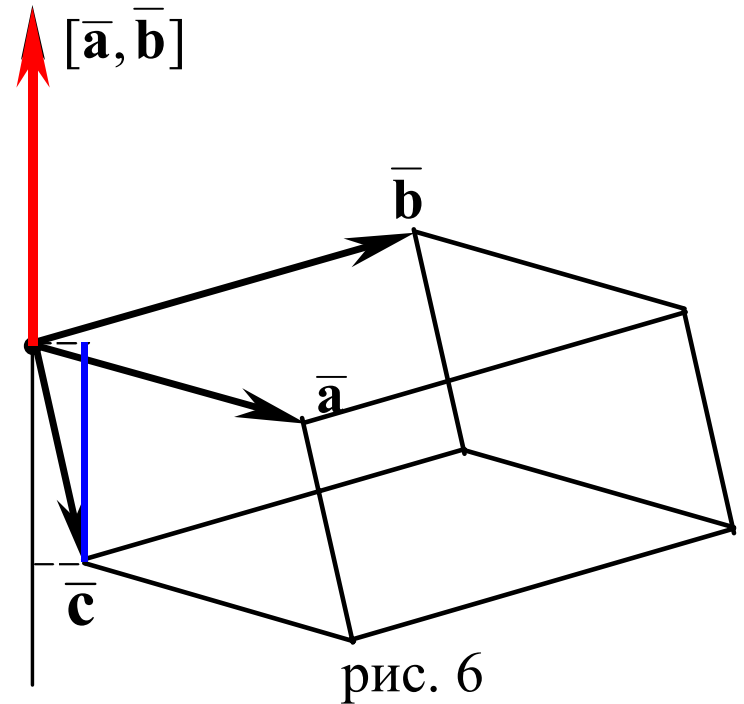


рис. 6

8) Следствие свойства 7.

Объем пирамиды, построенной на векторах $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$, равен $1/6$ модуля их смешанного произведения.

9) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}$ имеют координаты:*

$$\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}, \quad \bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}, \quad \bar{\mathbf{c}} = \{c_x; c_y; c_z\},$$

то

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{c}}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

§10. Евклидовы линейные пространства

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть E – линейное пространство над \mathbb{R} .

Отображение $f:(x,y) \rightarrow \mathbb{R}$, которое каждой паре элементов $x, y \in E$ ставит в соответствие единственный и однозначно определенный элемент $r \in \mathbb{R}$, называется **скалярным произведением**, если выполняются следующие условия:

1) $f(x,y) = f(y,x)$;

2) $f(x_1+x_2,y) = f(x_1,y) + f(x_2,y)$;

3) $f(\lambda x,y) = \lambda f(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$;

4) $f(x,x) > 0$, $\forall x \neq o$; $f(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = o$.

Обозначают: (x,y)

Линейное пространство E , на котором определено скалярное произведение векторов, называется **евклидовым линейным пространством**.

ТЕОРЕМА 2. Любое конечномерное линейное пространство над \mathbb{R} может быть превращено в евклидово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем **длиной вектора** $x \in E$ число $\sqrt{(x, x)}$
Обозначают: $|x|$.

ЛЕММА 3 (неравенство Коши – Буняковского). Для любых $x, y \in E$ справедливо неравенство $(x, y) \leq |x| \cdot |y|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Углом между векторами** $x, y \in E$ ($x \neq 0, y \neq 0$) назовем число $\varphi \in [0; \pi]$, удовлетворяющее условию

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Векторы $x, y \in E$ ($x \neq 0, y \neq 0$) называются **ортогональными**, если $(x, y) = 0$.

Система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ называется **ортогональной**, если все векторы этой системы попарно ортогональны, т.е. если

$$(x_i, x_k) = 0, \quad \forall i \neq k.$$

Ортогональная система векторов $x_1, x_2, \dots, x_n \in E$ называется **ортонормированной**, если длины всех векторов этой системы равны 1, т.е. если

$$(x_i, x_k) = 0, \forall i \neq k \quad \text{и} \quad (x_i, x_i) = 1, \forall i.$$

ЛЕММА 4. Ортогональная система векторов линейно независима.

ТЕОРЕМА 5. В любом конечномерном евклидовом пространстве существуют ортогональные (ортонормированные) базисы.

ТЕОРЕМА 6. Базис e_1, e_2, \dots, e_n евклидова пространства $E^{(n)}$

является ортонормированным $\Leftrightarrow (x, y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i,$

где $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\},$

$y = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \dots + \beta_n e_n = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}.$