3. Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Так как матрица линейного оператора, очевидно, зависит от выбранного базиса, то возникает вопрос: как изменится матрица оператора при переходе к другому базису? Выясним это.

Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n. Выберем в L_n два базиса $e_1, e_2, \ldots e_n$ и $f_1, f_2, \ldots f_n$.

Оператор φ в базисе $e_1, e_2, \ldots e_n$ имеет матрицу $\mathbf{A} = (\alpha_{ij})$, в базисе $f_1, f_2, \ldots f_n$ – матрицу $\mathbf{B} = (\beta_{ij})$, т.е.

$$\varphi(e_k) = \alpha_{1k} e_1 + \alpha_{2k} e_2 + \ldots + \alpha_{nk} e_n, \quad \varphi(f_k) = \beta_{1k} f_1 + \beta_{2k} f_2 + \ldots + \beta_{nk} f_n.$$

Установим связь между матрицами $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

Пусть

$$\begin{aligned} f_1 &= \tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \ldots + \tau_{n1} e_n, \\ f_2 &= \tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \ldots + \tau_{n2} e_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n &= \tau_{1n} e_1 + \tau_{2n} e_2 + \ldots + \tau_{nn} e_n. \end{aligned}$$

Обозначим через $\mathbf{T} = (\tau_{ij})$ – матрицу перехода от базиса $e_1, e_2, \ldots e_n$ к базису $f_1, f_2, \ldots f_n$, т.е.

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тогда в силу линейности оператора φ будем иметь

$$\varphi(f_k) = \varphi(\tau_{1k} e_1 + \tau_{2k} e_2 + \ldots + \tau_{nk} e_n) = \tau_{1k}\varphi(e_1) + \tau_{2k}\varphi(e_2) + \ldots + \tau_{nk}\varphi(e_n) =$$

$$= \tau_{1k}(a_{11} e_1 + a_{21} e_2 + \ldots + a_{n1} e_n) + \tau_{2k}(\alpha_{12} e_1 + \alpha_{22} e_2 + \ldots + \alpha_{n2} e_n) \ldots + \tau_{nk}(\alpha_{1n} e_1 + \ldots + \alpha_{nn} e_n) =$$

$$= (\alpha_{11}\tau_{1k} + \alpha_{12}\tau_{2k} + \ldots + \alpha_{1n}\tau_{nk}) e_1 + (\alpha_{21}\tau_{1k} + \alpha_{22}\tau_{2k} + \ldots + \alpha_{2n}\tau_{nk}) e_2 + \ldots + (\alpha_{n1}\tau_{1k} + \ldots + \alpha_{nn}\tau_{nk}) e_n.$$

С другой стороны,

$$\varphi(f_k) = \beta_{1k} f_1 + \beta_{2k} f_2 + \ldots + \beta_{nk} f_n =$$

$$= \beta_{1k}(\tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \ldots + \tau_{n1} e_n) + \beta_{2k}(\tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \ldots + \tau_{n2} e_n) \ldots + \beta_{nk}(\tau_{1n} e_1 + \ldots + \tau_{nn} e_n) =$$

$$= (\tau_{11}\beta_{1k} + \tau_{12}\beta_{2k} + \ldots + \tau_{1n}\beta_{nk}) e_1 + (\tau_{21}\beta_{1k} + \tau_{22}\beta_{2k} + \ldots + \tau_{2n}\beta_{nk}) e_2 + \ldots + (\tau_{n1}\beta_{1k} + \ldots + \tau_{nn}\beta_{nk}) e_n.$$

Отсюда, в силу единственности разложения вектора $\varphi(f_k)$ по базису $e_1, e_2, \ldots e_n$, получаем:

$$\alpha_{11}\tau_{1k}+\alpha_{12}\tau_{2k}+\ldots+\alpha_{1n}\tau_{nk}=\tau_{11}\beta_{1k}+\tau_{12}\beta_{2k}+\ldots+\tau_{1n}\beta_{nk},$$
$$\alpha_{21}\tau_{1k}+\alpha_{22}\tau_{2k}+\ldots+\alpha_{2n}\tau_{nk}=\tau_{21}\beta_{1k}+\tau_{22}\beta_{2k}+\ldots+\tau_{2n}\beta_{nk},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\alpha_{n1}\tau_{1k}+\alpha_{n2}\tau_{2k}+\ldots+\alpha_{nn}\tau_{nk}=\tau_{n1}\beta_{1k}+\tau_{n2}\beta_{2k}+\ldots+\tau_{nn}\beta_{nk},$$

или в матричной форме $\mathbf{AT_k}=\mathbf{TB_k}$,

где $\mathbf{T_k}$, $\mathbf{B_k}$ – k-й столбец матриц $\mathbf{T}$ и $\mathbf{B}$ соответственно. Тогда матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{T}$ будут связаны соотношением

$$\mathbf{AT}=\mathbf{TB}.$$

Так как $\mathbf{T}$ – матрица преобразования базиса, то она невырожденная. Поэтому существует обратная матрица $\mathbf{T^{-1}}$. Умножая матричное равенство $\mathbf{AT}=\mathbf{TB}$ слева на матрицу $\mathbf{T^{-1}}$, получаем:

$$\mathbf{B}=\mathbf{T^{-1}AT}.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 10.1. *Пусть φ – оператор n-мерного пространства L_n, $e_1,e_2,\ldots e_n$ и $f_1,f_2,\ldots f_n$ – два базиса пространства L_n, причем*

$$f_1=\tau_{11}e_1+\tau_{21}e_2+\ldots+\tau_{n1}e_n,$$
$$f_2=\tau_{12}e_1+\tau_{22}e_2+\ldots+\tau_{n2}e_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f_n=\tau_{1n}e_1+\tau_{2n}e_2+\ldots+\tau_{nn}e_n.$$

Если $\mathbf{A}=(\alpha_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе $e_1,e_2,\ldots e_n$,*

$\mathbf{B}=(\beta_{ij})$ *– матрица оператора φ в базисе $f_1,f_2,\ldots f_n$,*

то $$\mathbf{B}=\mathbf{T^{-1}AT},$$

где $\mathbf{T}=(\tau_{ij})$ *– матрица перехода от базиса $e_1,e_2,\ldots e_n$ к базису $f_1,f_2,\ldots f_n$, т.е.*

$$\mathbf{T}=\begin{pmatrix}\tau_{11} & \tau_{12} & \ldots & \tau_{1n}\\ \tau_{21} & \tau_{22} & \ldots & \tau_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn}\end{pmatrix}.$$

Замечание. Квадратные матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, для которых найдется невырожденная матрица $\mathbf{T}$ такая, что имеет место равенство $\mathbf{B}=\mathbf{T^{-1}AT}$, называются *подобными*.