

Линейная алгебра и аналитическая геометрия

Тема: *Нелинейные операции
на множестве свободных векторов*

Лектор Пахомова Е.Г.

2012 г.

§9. Нелинейные операции на множестве векторов

1. Скалярное произведение векторов
2. Векторное произведение векторов
3. Смешанное произведение векторов

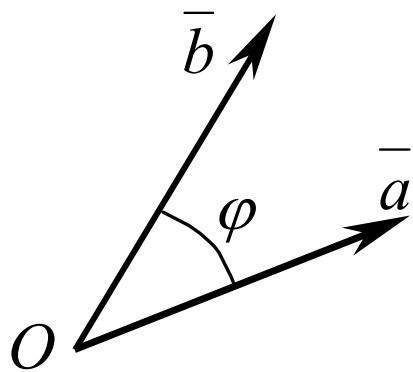
1. Скалярное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Скалярным произведением*

двух ненулевых векторов \vec{a} и \vec{b} называется число, равное произведению их модулей на косинус угла между ними, т.е. число

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$$

Если $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, то скалярное произведение векторов \vec{a} и \vec{b} полагают равным нулю.



Обозначают: (\vec{a}, \vec{b}) , $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

СВОЙСТВА СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

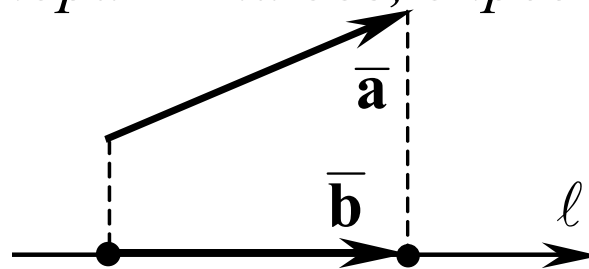
1) Скалярное произведение векторов коммутативно, т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}})$$

2) Скалярное произведение ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равно произведению длины вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на проекцию вектора $\bar{\mathbf{b}}$ на вектор $\bar{\mathbf{a}}$ (длины вектора $\bar{\mathbf{b}}$ на проекцию $\bar{\mathbf{a}}$ на $\bar{\mathbf{b}}$). Т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{a}}}\bar{\mathbf{b}} = |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \text{Пр}_{\bar{\mathbf{b}}}\bar{\mathbf{a}}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Проекцией вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на вектор $\bar{\mathbf{b}}$** называется проекция вектора $\bar{\mathbf{a}}$ на ось, определяемую вектором $\bar{\mathbf{b}}$.



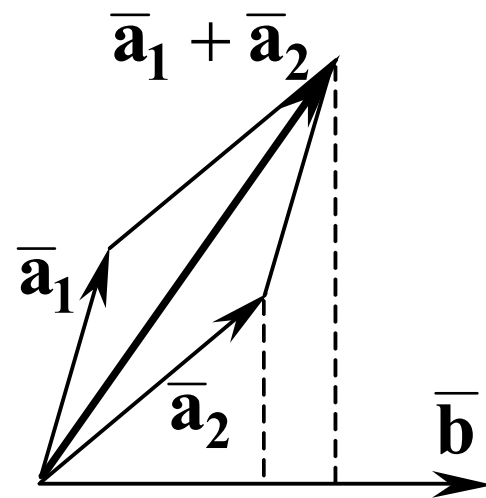
3) Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак скалярного произведения. Т.е.

$$(\lambda \bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}, \lambda \bar{\mathbf{b}}) = \lambda (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}})$$

4) Если один из векторов записан в виде суммы, то их скалярное произведение тоже можно записать в виде суммы. Т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}) = (\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}) + (\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}})$$

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2) = (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1) + (\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2)$$



5) Скалярное произведение вектора на себя (скалярный квадрат вектора) равно квадрату его длины. Т.е.

$$(\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{a}}) = |\bar{\mathbf{a}}|^2$$

6) *Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю .*
(критерий перпендикулярности векторов).

7) *Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ имеют координаты: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то*
$$(\bar{\mathbf{a}} , \bar{\mathbf{b}}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \quad (1)$$

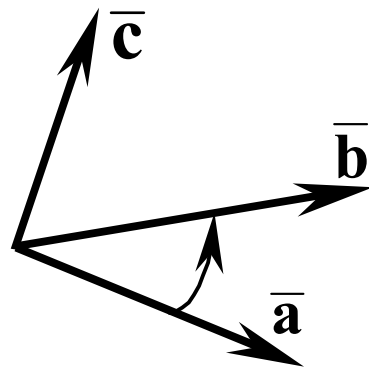
Формулу (1) называют ***выражением скалярного произведения через декартовы координаты векторов.***

8) *Если под действием постоянной силы $\bar{\mathbf{F}}$ точка перемещается по прямой из точки M_1 в M_2 , то работа силы $\bar{\mathbf{F}}$ будет равна*
$$A = (\bar{\mathbf{F}} , \overline{M_1 M_2})$$

(физический смысл скалярного произведения).

2. Векторное произведение векторов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Тройка некопланарных векторов \bar{a} , \bar{b} и \bar{c} называется **правой**, если поворот от вектора \bar{a} к вектору \bar{b} на меньший угол виден из конца вектора \bar{c} против часовой стрелки.



В противном случае тройка векторов называется **левой**

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. **Векторным произведением** двух ненулевых векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ называется вектор $\bar{\mathbf{c}}$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) $|\bar{\mathbf{c}}| = |\bar{\mathbf{a}}| \cdot |\bar{\mathbf{b}}| \cdot \sin\varphi$, где φ – угол между векторами $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;
- 2) вектор $\bar{\mathbf{c}}$ ортогонален векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$;
- 3) тройка векторов $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ – правая.

Если хотя бы один из векторов $\bar{\mathbf{a}}$ или $\bar{\mathbf{b}}$ нулевой, то их векторное произведение полагают равным нулевому вектору.

Обозначают: $[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}]$ или $\bar{\mathbf{a}} \times \bar{\mathbf{b}}$.

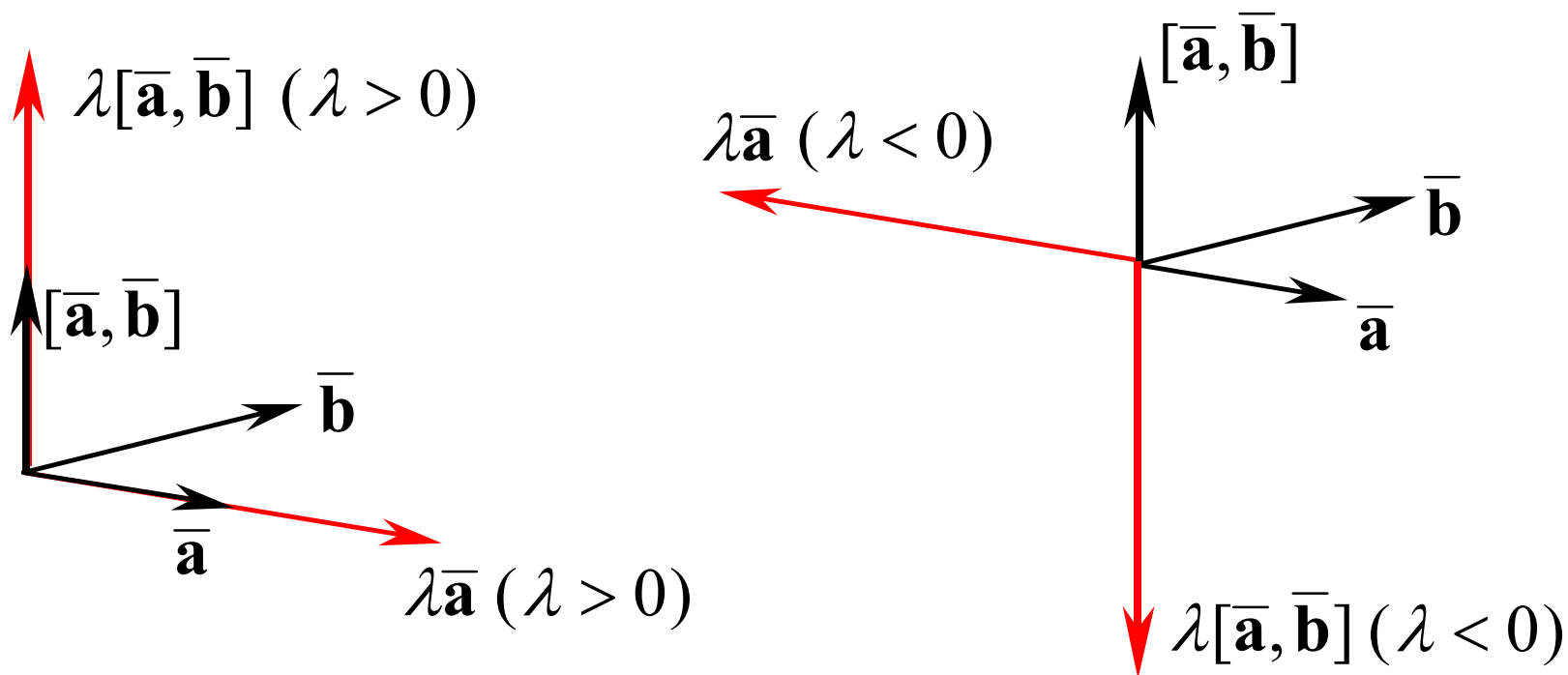
СВОЙСТВА ВЕКТОРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

1) При перестановке векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ их векторное произведение меняет знак, т.е.

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = -[\bar{\mathbf{b}}, \bar{\mathbf{a}}].$$

2) Числовой множитель любого из двух векторов можно вынести за знак векторного произведения, т.е.

$$[\lambda\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}, \lambda\bar{\mathbf{b}}] = \lambda[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}].$$



3) Если один из векторов записан в виде суммы, то векторное произведение тоже можно записать в виде суммы.

А именно:

$$[\bar{\mathbf{a}}_1 + \bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}] = [\bar{\mathbf{a}}_1, \bar{\mathbf{b}}] + [\bar{\mathbf{a}}_2, \bar{\mathbf{b}}].$$
$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_2] = [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_1] + [\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}_2].$$

4) Критерий коллинеарности векторов .

Ненулевые векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ коллинеарные \Leftrightarrow их векторное произведение равно нулевому вектору .

5) Геометрический смысл векторного произведения .

Модуль векторного произведения неколлинеарных векторов $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах .

6) Если в декартовом прямоугольном базисе векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ имеют координаты: $\bar{\mathbf{a}} = \{a_x; a_y; a_z\}$, $\bar{\mathbf{b}} = \{b_x; b_y; b_z\}$, то

$$[\bar{\mathbf{a}}, \bar{\mathbf{b}}] = \left\{ \begin{array}{l} \left| \begin{array}{cc} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{array} \right|; \left| \begin{array}{cc} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{array} \right| \end{array} \right\} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО – самостоятельно

7) Механический смысл векторного произведения.

Если вектор $\bar{\mathbf{F}}$ это сила, приложенная к точке M , то векторное произведение

$$[\overline{\mathbf{OM}}, \bar{\mathbf{F}}]$$

представляет собой момент силы $\bar{\mathbf{F}}$ относительно точки O .