Глава I. Элементы линейной алгебры

Линейная алгебра – часть алгебры, изучающая линейные пространства и подпространства, линейные операторы, линейные, билинейные и квадратичные функции на линейных пространствах. Но исторически первым разделом линейной алгебры была теория линейных уравнений. Именно с этим разделом линейной алгебры мы и познакомимся в этой главе.

Построение общей теории систем линейных уравнений потребовало введения новых понятий – понятий матрицы, определителя и ранга матрицы.

§ 1. МАТРИЦЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

1. Определение и некоторые виды матриц

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Матрицей размера* $m \times n$[1] *называется таблица, образованная из элементов некоторого множества (например, чисел или функций) и имеющая* m *строк и* n *столбцов.*

Если $m \neq n$, то матрицу называют *прямоугольной*, а если $m = n$ – *квадратной, порядка* n.

Элементы, из которых составлена матрица, называются *элементами матрицы*. Их обычно обозначают маленькой латинской буквой с нижним индексом из двух цифр. Он указывает положение элемента в матрице: первая цифра индекса – номер строки, в которой стоит элемент, а вторая – номер столбца.

Например, a_{24} – элемент второй строки и четвертого столбца, a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца.

Матрицы обозначают обычно большими латинскими буквами и при записи заключают в круглые или квадратные скобки:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Используются также следующие сокращенные записи:

$\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ – для прямоугольной матрицы размера $m \times n$

и $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i, j = \overline{1,n})$ – для квадратной матрицы порядка n.

Две матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ считаются *равными*, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на одинаковых местах, равны между собой, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

---

[1] Читают: «размера эм на эн».

В этой главе будем рассматривать матрицы, элементами которых являются числа (их называют *числовыми матрицами*). В дальнейшем нам встретятся матрицы, элементами которых являются функции (*функциональные матрицы*).

Укажем НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ МАТРИЦ, которые в дальнейшем будут часто встречаться.

1) Матрицу $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix} = (a_{i1})$, размера $m \times 1$ называют *матрицей-столбцом длины* m.

2) Матрицу $\mathbf{A} = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}) = (a_{1i})$, размера $1 \times n$ называют *матрицей-строкой длины* n.

3) *Нулевой* матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю. Ее обозначают обычно буквой $\mathbf{O}$, т.е.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$. Элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{kk} (где $k = \min\{m,n\}$ [1]) будем называть *элементами главной диагонали матрицы*. Квадратная матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

у которой все элементы главной диагонали равны 1, называется *единичной*. Единичную матрицу принято обозначать буквой $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{E}_n$, если требуется указать порядок матрицы).

5) Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Элементы a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, …, a_{n1} будем называть *элементами побочной диагонали матрицы*.

---

[1] $\min\{m,n\}$ обозначает меньшее из двух чисел m и n.

Квадратные матрицы

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1,n-2} & b_{1,n-1} & b_{1n} \\ b_{21} & \dots & b_{2,n-2} & b_{2,n-1} & 0 \\ b_{31} & \dots & b_{3,n-2} & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & \dots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \dots & 0 \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & c_{n3} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}=\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & d_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & d_{2,n-1} & d_{2n} \\ 0 & \dots & d_{3,n-2} & d_{3,n-1} & d_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n1} & \dots & d_{n,n-2} & d_{n,n-1} & d_{nn} \end{pmatrix}$$

у которых все элементы выше (ниже) главной или побочной диагонали равны нулю, называются *треугольными* ($\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *верхними треугольными*, а $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ – *нижними треугольными*).

6) Прямоугольную матрицу размера $m \times n$ будем называть *трапециевидной*, если все ее элементы ниже главной диагонали равны нулю, т.е. если она имеет вид

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Линейные операции над матрицами

Линейными операциями над матрицами называется умножение матрицы на число и сложение матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Произведением матрицы* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *на число* α *называется такая матрица* $\mathbf{B}=(b_{ij})$, *элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы* $\mathbf{A}$ *на число* α, *т.е.* $b_{ij}=\alpha \cdot a_{ij}$.

Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на число α обозначают $\alpha\mathbf{A}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, то

$$2\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}, \qquad (-3)\mathbf{A}=\begin{pmatrix} -3 & -6 & -9 \\ 0 & 3 & -12 \end{pmatrix}.$$

Частным случаем произведения матрицы $\mathbf{A}$ на число является произведение $(-1)\mathbf{A}$. Так как все элементы этой матрицы противоположны соответствующим элементам матрицы $\mathbf{A}$, то матрицу $(-1)\mathbf{A}$ называют *противоположной матрице* $\mathbf{A}$ и обозначают $-\mathbf{A}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, то $-\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -3\\ 0 & 1 & -4\end{pmatrix}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Суммой двух матриц* $\mathbf{A}=(a_{ij})$ *и* $\mathbf{B}=(b_{ij})$ *одинакового размера, называется такая матрица* $\mathbf{C}=(c_{ij})$, *элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$, *т.е.* $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Сумму матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ обозначают $\mathbf{A}+\mathbf{B}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}$, то

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix}0 & 5 & 3\\ 2 & -5 & 1\end{pmatrix}.$$

Частным случаем суммы двух матриц является сумма $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$. Так как все элементы этой матрицы равны разностям соответствующих элементов матрицы $\mathbf{A}$ и матрицы $\mathbf{B}$, то матрицу $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$ называют *разностью матриц* $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ и обозначают $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 0\\ 2 & -4 & -3\end{pmatrix}$, то

$$\mathbf{A}-\mathbf{B}=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -2 & 3 & 7\end{pmatrix}.$$

СВОЙСТВА ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ (коммутативность сложения матриц);
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ (ассоциативность сложения матриц);
3. $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$;
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$ (ассоциативность относительно умножения чисел);
6. $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$ (дистрибутивность умножения на матрицу относительно сложения чисел);
7. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$ (дистрибутивность умножения на число относительно сложения матриц);
8. $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

Заканчивая этот пункт, введем еще одно понятие, которое будет часто встречаться во многих разделах математики – понятие линейной комбинации. Пусть M – некоторое множество, элементы которого можно складывать и умножать на числа (например, множество матриц одинакового размера, множество векторов, множество функций с одинаковой областью определения и т.д.). Пусть m_1, m_2, …, m_k – элементы множества M,

α_1, α_2, …, α_k – числа. Элемент $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k$ [1)] называют *линейной комбинацией* элементов m_1, m_2, …, m_k с коэффициентами α_1, α_2, …, α_k.

Например, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix},$$

то их линейная комбинация с коэффициентами 2, -1, -3 есть матрица

$$\mathbf{D} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B} - 3\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 9 & -3 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 3 \\ -11 & 5 & 17 \end{pmatrix}.$$

3. Нелинейные операции над матрицами

Нелинейными операциями над матрицами называются умножение матриц и транспонирование матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A} = (a_{1i})$ *и* $\mathbf{B} = (b_{i1})$ *– матрица-строка и матрица-столбец одинаковой длины* n. *Произведением матрицы-строки* $\mathbf{A}$ *на матрицу-столбец* $\mathbf{B}$ *называется число* c *(т.е. матрица размера* 1×1*), равное сумме произведений их соответствующих элементов, т.е.*

$$c = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \ldots + a_{1n} \cdot b_{n1}.$$

Например, если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, то произведением $\mathbf{A}$ на $\mathbf{B}$ будет число $c = 1 \cdot (-5) + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 4 = -11$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A} = (a_{ij})$ *– матрица размера* $m \times n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ *– матрица размера* $n \times k$ *(т.е. количество столбцов в матрице* $\mathbf{A}$ *совпадает с количеством строк матрицы* $\mathbf{B}$*). Произведением матрицы* $\mathbf{A}$ *на матрицу* $\mathbf{B}$ *называется матрица* $\mathbf{C} = (c_{ij})$ *размера* $m \times k$ *такая, что каждый ее элемент* c_{ij} *является произведением* i*-й строки матрицы* $\mathbf{A}$ *на* j*-й столбец матрицы* $\mathbf{B}$*, т.е.*

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + a_{i3} \cdot b_{3j} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nj}.$$

Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на матрицу $\mathbf{B}$ обозначают $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ или $\mathbf{AB}$.

ПРИМЕРЫ. 1) Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}$. Так как число столбцов матрицы $\mathbf{A}$ равно числу строк матрицы $\mathbf{B}$, то $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$. В результате получим матрицу

[1)] Выражение $\alpha_1 \cdot m_1 + \alpha_2 \cdot m_2 + \ldots + \alpha_k \cdot m_k$ кратко обозначают $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i m_i$.

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot(-4) & 1\cdot 1+2\cdot(-2)\\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 0\cdot 3+(-1)\cdot(-4) & 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\ -2 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

2) Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$ можно умножить на $\mathbf{A}$. В результате получим матрицы

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6+0 & 7-8+0\\ 3-3-5 & 21-4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -5 & 17\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+21 & -2-7 & 0+35\\ 3+12 & -6-4 & 0+20\\ -1+0 & 2+0 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & -9 & 35\\ 15 & -10 & 20\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Последний пример показывает, что если произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ существуют, то в общем случае $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$ (умножение матриц *некоммутативно*). Но для некоторых матриц равенство $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ возможно. Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$, то $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\cdot$ Матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, для которых $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, называют *перестановочными.*

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ УМНОЖЕНИЯ МАТРИЦ

(при условии, что все записанные произведения имеют смысл)

1. $\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$, $\mathbf{AO}=\mathbf{OA}=\mathbf{O}$;
2. $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$ (ассоциативность умножения матриц);
3. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$
4. $\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{CA}+\mathbf{CB}$

} – дистрибутивность умножения матриц относительно сложения матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Пусть* $\mathbf{A}$ *– матрица размера* $m\times n$. *Матрица размера* $n\times m$, *полученная из* $\mathbf{A}$ *заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется транспонированной к* $\mathbf{A}$ *и обозначается* $\mathbf{A}^T$. *Операция нахождения матрицы* $\mathbf{A}^T$ *называется транспонированием матрицы* $\mathbf{A}$.

Например, если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$, то $\mathbf{A}^T=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{pmatrix}$.

СВОЙСТВА ОПЕРАЦИИ ТРАНСПОНИРОВАНИЯ МАТРИЦ

1. $(\mathbf{A}^T)^T=\mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^T=\mathbf{A}^T+\mathbf{B}^T$;
3. $(\alpha\mathbf{A})^T=\alpha\mathbf{A}^T$;
4. $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^T=\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}^T$.