Математический анализ

Тема: ***Определенный интеграл***
Несобственные интегралы

Лектор Пахомова Е.Г.

2017 г.

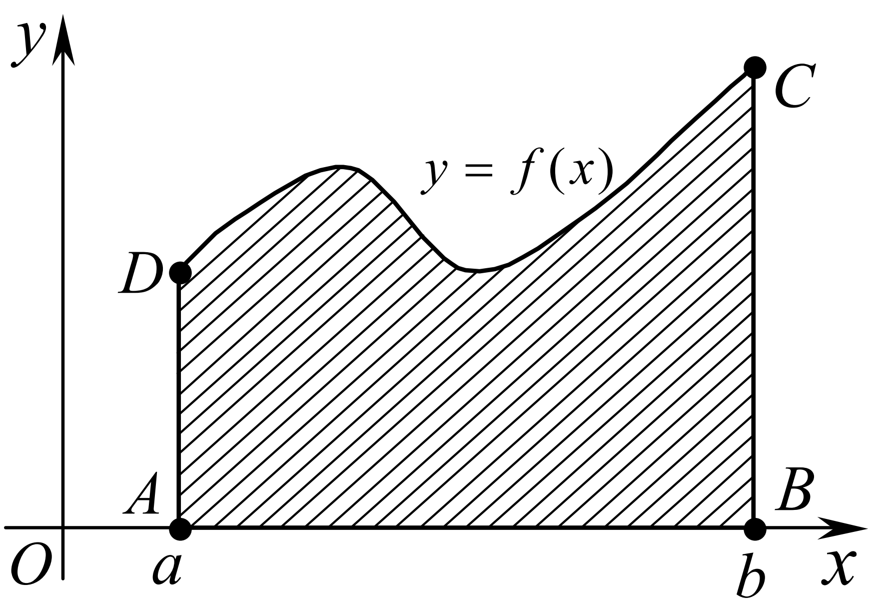
ГЛАВА II. Определенный интеграл и его приложения

§1. Определенный интеграл и его свойства

1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла

Пусть $f(x)$ – непрерывная на отрезке $[a;b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Область* $(\sigma) \in xOy$, *ограниченная отрезком* $[a;b]$ *оси* Ox, *прямыми* $x = a$, $x = b$ *и кривой* $y = f(x)$, *называется* ***криволинейной трапецией с основанием*** $[a;b]$.

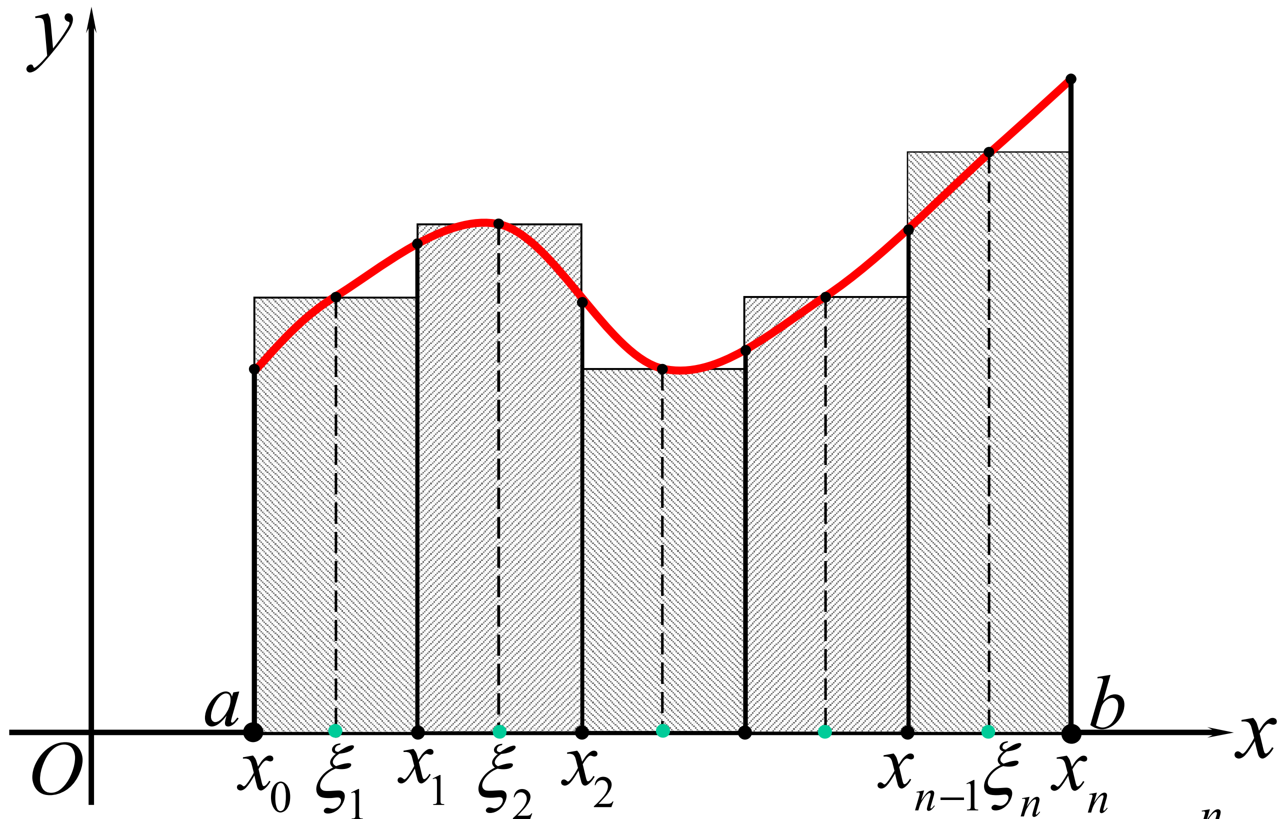


Замечание. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки

ЗАДАЧА 1 (о площади криволинейной трапеции).

Пусть $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$.

Найти площадь S криволинейной трапеции (σ) .



Если $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_{i-1}\,;\, x_i]$, то $S \approx \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$

Пусть $\lambda = \max |\, [x_{i-1}\,;\, x_i]\,|$. Тогда

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

ЗАДАЧА 2 (о пройденном пути).

Пусть точка движется по кривой и ее скорость изменяется по закону $v = f(t)$.

Найти путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1 \,;\, T_2]$.

РЕШЕНИЕ.

1) Разобьем $[T_1 \,;\, T_2]$ на n частей точками

$$t_0 = T_1\,,\ t_1\,,\ t_2\,,\ \ldots\,,\ t_n = T_2 \quad (\text{где } t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n\,)$$

2) Выберем на $[t_{i-1} \,;\, t_i]$ $(i = 1,2,\ldots n)$ произвольную точку τ_i .

Если $[t_{i-1};\, t_i]$ мал, то можно считать, что точка двигалась в течение этого времени равномерно со скоростью $f(\tau_i)$.

$\Rightarrow$ пройденное расстояние: $f(\tau_i) \cdot \Delta t_i$, где $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.

$$\Rightarrow \quad S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$$

3) Пусть $\lambda = \max |\, [t_{i-1};\, t_i] \,|$. Тогда

$$S = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)\Delta t_i$$

2. Определенный интеграл: определение и условие его существования

Пусть $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ.

1) Разобьем $[a;b]$ на n частей точками

$$x_0 = a\ ,\ x_1\ ,\ x_2\ ,\ \ldots\ ,\ x_n = b\ ,$$

где $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$.

2) На каждом отрезке $[x_{i-1}\ ;\ x_i]$ $(i = 1,2,\ldots n)$ выберем произвольную точку ξ_i и найдем произведение

$$f(\xi_i)\cdot\Delta x_i\ ,$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ – длина отрезка $[x_{i-1}\ ;x_i]$.

Сумма

$$I_n(x_i,\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Пусть $\lambda = \max\limits_{1 \le i \le n} \left| [x_{i-1}; x_i] \right|$

Число I называется ***пределом интегральных сумм*** $I_n(x_i, \xi_i)$ *при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого разбиения отрезка $[a;b]$ у которого $\lambda < \delta$, при любом выборе точек ξ_i выполняется неравенство*

$$|I_n(x_i, \xi_i) - I| < \varepsilon .$$

Если существует предел интегральных сумм $I_n(x_i, \xi_i)$ при $\lambda \to 0$, то его называют ***определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$*** (*или* ***в пределах от a до b***).

ОБОЗНАЧАЮТ: $\int\limits_a^b f(x)dx$

Называют: $[a;b]$ – ***промежуток интегрирования***,

a и b – ***нижний*** и ***верхний предел интегрирования***,

$f(x)$ – ***подынтегральная функция***,

$f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение***,

x – ***переменная интегрирования***.

Функция $f(x)$, для которой на $[a;b]$ существует определенный интеграл, называется ***интегрируемой*** на этом отрезке.

ТЕОРЕМА 1 (необходимое условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

Если функция $f(x)$ *интегрируема на отрезке* $[a;b]$ *, то она на этом отрезке ограничена.*

ТЕОРЕМА 2 (достаточное условие интегрируемости функции на $[a;b]$).

Для интегрируемости функции $f(x)$ *на* $[a;b]$ *, достаточно выполнения одного из условий:*

1) $f(x)$ *непрерывна на* $[a;b]$;
2) $f(x)$ *ограничена на* $[a;b]$ *и имеет на* $[a;b]$ *конечное число точек разрыва*;
3) $f(x)$ *монотонна и ограничена на* $[a;b]$.

Замечание. Определяя определенный интеграл, полагали $a < b$. Полагаем, что:

1) если $a > b$, то

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

2) если $a = b$, то

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Такое расширение определения согласуется с определением определенного интеграла и его геометрическим (физическим) смыслом.

3. Свойства определенного интеграла

1) Геометрический смысл определенного интеграла.

Если $f(x)$ – непрерывна на $[a;b]$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = S,$$

где S – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ и ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.

2) Физический смысл определенного интеграла

Если функция $v = f(t)$ задает скорость движущейся точки в момент времени t , то

$$\int_{T_1}^{T_2} v(t)dt$$

определяет путь S, пройденный точкой за промежуток времени $[T_1 ; T_2]$.

3) Постоянный множитель k $(k \neq 0)$ можно выносить за знак определенного интеграла, т.е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

4) Определенный интеграл от алгебраической суммы двух (конечного числа) функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b \varphi(x)dx$$

5) Если отрезок интегрирования $[a;b]$ разбит точкой c на две части $[a;c]$ и $[c;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (1)$$

Замечание. Формула (1) будет иметь место и в том случае, когда точка c лежит не внутри отрезка $[a;b]$, а вне его.

6) Если $f(x) > 0$ $(f(x) \geq 0)$ $\forall x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx > 0 \qquad \left(\int_a^b f(x)dx \geq 0\right)$$

7) Если $f(x) \leq \varphi(x)$ $\forall x \in [a;b]$, то $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$

8) Следствие свойств 8 и 3.

Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

9) Если $f(x)$ – нечетная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0.$

Если $f(x)$ – четная функция, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$

10) Теорема о среднем.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, то в интервале $(a;b)$ найдется такая точка c, что справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

§2. Вычисление определенных интегралов

1. Формула Ньютона-Лейбница

Справедлива следующая теорема:

ТЕОРЕМА 3 (Формула Ньютона – Лейбница).

Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $[a;b]$. Тогда справедливо равенство

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a). \qquad (2)$$

Формула (2) называется ***формулой Ньютона – Лейбница***.

Разность $F(b) - F(a)$ принято сокращенно записывать в виде

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b .$$

Символ $\Big|_a^b$ называют *знаком двойной подстановки*.

Используя это обозначение, формулу (2) можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Замечание. В формуле (2) можно взять любую из первообразных функции $f(x)$, так как $F(b) - F(a)$ не зависит от выбора первообразной.

ПРИМЕР. Вычислить интегралы:

$$1)\ \int_1^2 (3x^2 - 1)dx; \qquad 2)\ \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx.$$

2. Замена переменной в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 3 (о замене переменной в определенном интеграле). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$ (или $[b;a]$) *и функция* $x = \varphi(t)$ *удовлетворяет условиям*

1) $\varphi(t)$ *непрерывно дифференцируема на отрезке с концами* α *и* β;
2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *и значения* $\varphi(t)$ *при изменении* t *от* α *до* β *не выходят за пределы отрезка с границами* a *и* b.

Тогда функция $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$ *интегрируема на* $[\alpha;\beta]$ (или $[\beta;\alpha]$) *и справедлива формула*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (3)$$

Формула (3) называется ***формулой замены переменной в определенном интеграле***.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Замечание. Замена переменной в определенном интеграле чаще производится по формуле (3), прочитанной справа налево:

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)dx = \int\limits_{a}^{b} f(t)dt,$$

где $t=\varphi(x)$, $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$.

ПРИМЕР. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 \frac{e^x dx}{e^{2x}+6e^x+34}$

3. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле

ТЕОРЕМА 4.

Пусть функции $u(x)$ *и* $v(x)$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a;b]$. *Тогда существуют интегралы*

$$\int_a^b u dv \quad \text{и} \quad \int_a^b v du$$

и справедливо равенство

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du. \qquad (4)$$

Формула (4) называется ***формулой интегрирования по частям в определенном интеграле***.

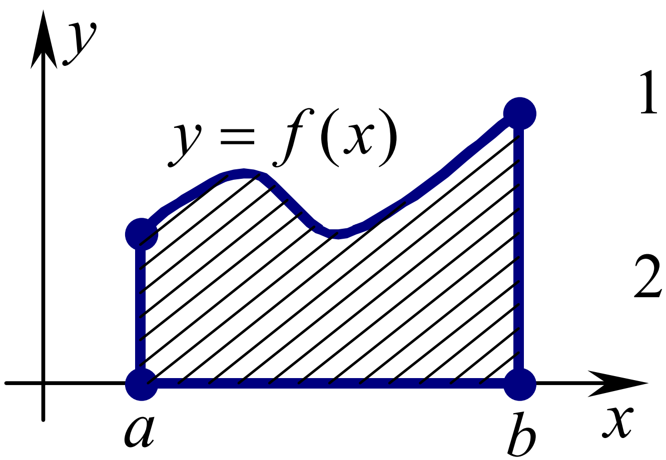
§3. Геометрические приложения определенных интегралов

1. Площадь плоской области

I) ***Плоская область в декартовой системе координат***

В ДСК основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***криволинейная трапеция***.

Возможны 3 случая ее расположения на плоскости:

а) 

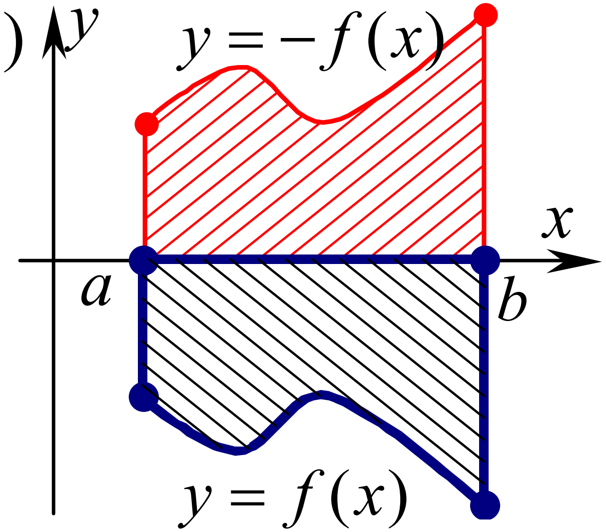
1) $$S = \int_a^b f(x)dx;$$

2) если $y = f(x)$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то $$S = \int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt,$$

где $x(\alpha) = a, \;\; x(\beta) = b$.

б)



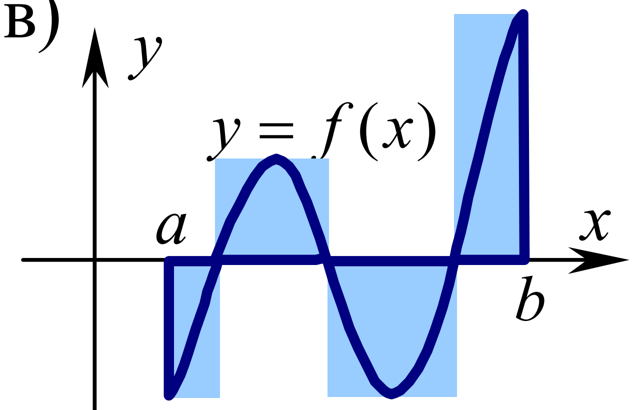
1) $S = -\int\limits_a^b f(x)\,dx,$

2) если $y = f(x)$: $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

то $S = -\int\limits_\alpha^\beta y(t)\cdot x'(t)\,dt,$

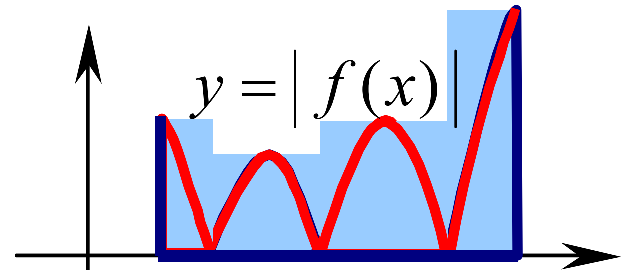
где $x(\alpha) = a,\; x(\beta) = b$.

в)



$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4$

$\Rightarrow$



$S = \int\limits_a^b |f(x)|\,dx,$

Кроме того, в ДСК с помощью определенного интеграла можно найти площадь области, правильной в направлении оси Oy .

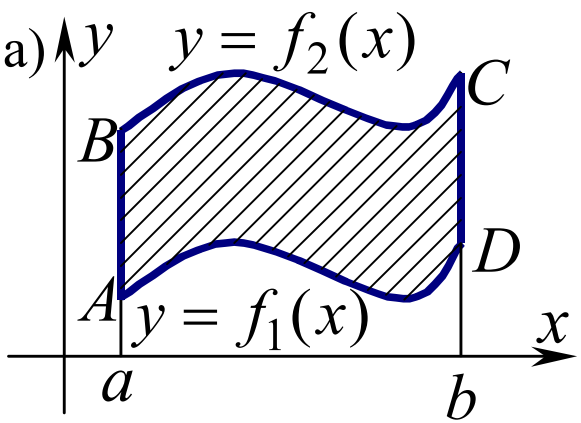
Правильной в направлении оси Oy является область (σ), ограниченная линиями

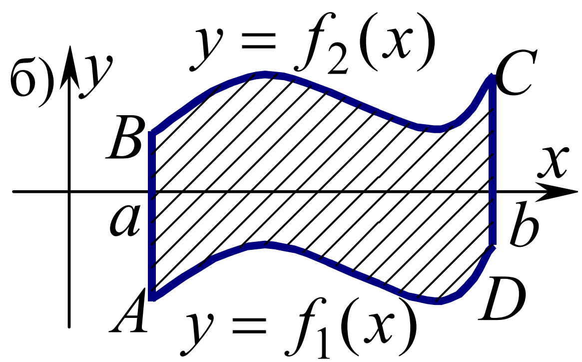
$$x = a\ ,\ x = b\ ,\ y = f_1(x)\ ,\ \ y = f_2(x)\ ,$$

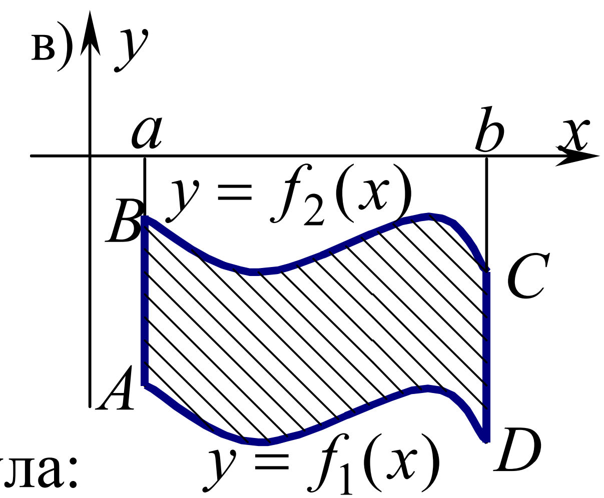
где $a < b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$, $\forall x \in [a;b]$.

Замечание. Прямые $x = a$ и $x = b$ могут вырождаться в точки.

Возможны 3 случая расположения области (σ) на плоскости:







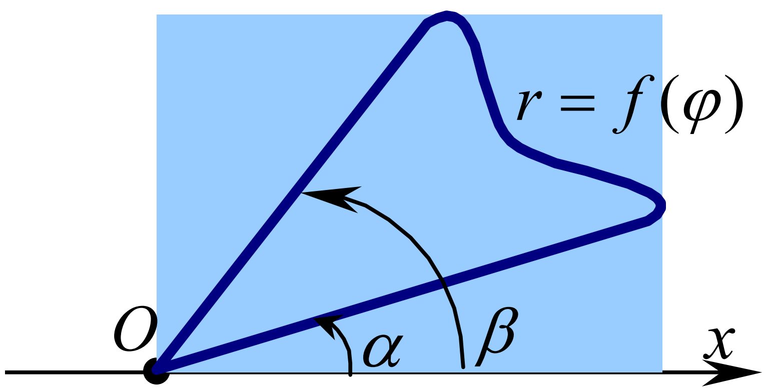
Во всех трех случаях справедлива формула:

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx .$$

II) ***Плоская область в полярной системе координат***

В ПСК основная область, площадь которой находят с помощью определенного интеграла – ***криволинейный сектор***.

Криволинейным сектором называется область, ограниченная двумя лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ и кривой $r = f(\varphi)$.



Его площадь находится по формуле: $S = \dfrac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[f(\varphi)\right]^2 d\varphi.$

2. Длина плоской кривой

I) ***Плоская кривая в декартовой системе координат***

Пусть $y = f(x)$ – непрерывно дифференцируема на $[a;b]$.
ЗАДАЧА: найти длину ℓ кривой $y = f(x)$, где $x \in [a;b]$.

Справедлива формула: $$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

II) ***Плоская кривая, заданная параметрическими уравнениями***

Пусть кривая (ℓ) не имеет самопересечений и задана параметрическими уравнениями: $$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

где $\varphi(t)$, $\psi(t)$ – непрерывно дифференцируемые на $[\alpha;\beta]$.
ЗАДАЧА. Найти длину ℓ кривой (ℓ) .

Справедлива формула: $$\ell = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt$$

III) ***Плоская кривая в полярных координатах***

Пусть $r = r(\varphi)$ – непрерывно дифференцируема на $[\alpha;\beta]$.

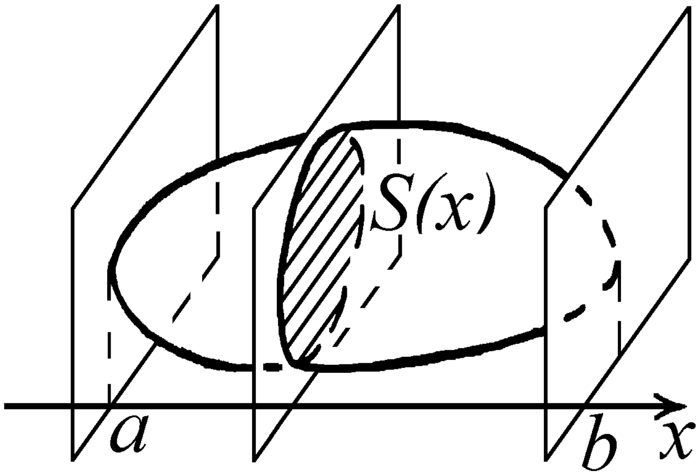
ЗАДАЧА: найти длину кривой $r = r(\varphi)$, где $\varphi\in[\alpha;\beta]$.

Справедлива формула:
$$\ell = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + (r')^2}\, d\varphi$$

3. Вычисление объема тела

I) *По площадям параллельных сечений*

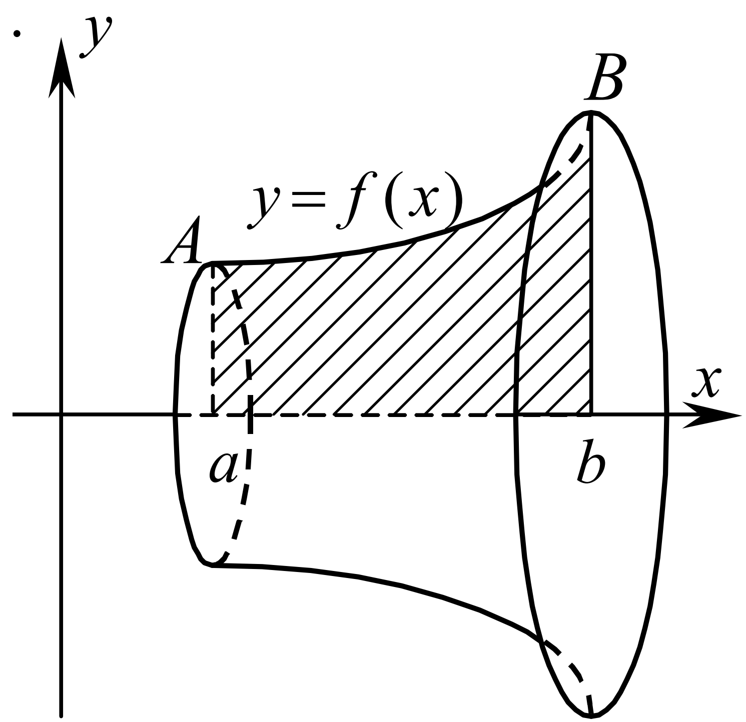
Пусть (V) – замкнутая и ограниченная область в $Oxyz$ (тело). Пусть $S(x)$ $(a \le x \le b)$ – площадь любого сечения тела плоскостью, перпендикулярной оси Ox.



Тогда объем тела (V) : $$V = \int_a^b S(x)dx.$$

II) ***Объем тела вращения***

Пусть (V) – тело, которое получается в результате вращения вокруг Ox криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной $y = f(x)$.



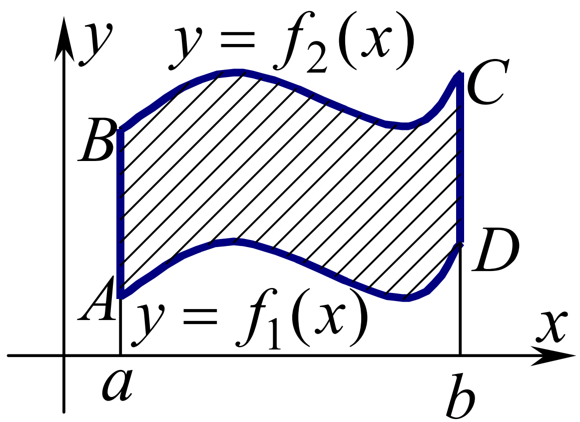
Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Пусть (V) – тело, полученное в результате вращения вокруг Ox области (σ), ограниченной линиями

$$x = a\ ,\ \ x = b\ ,\ y = f_1(x)\ ,\ \ y = f_2(x)\ ,$$

где $0 \le f_1(x) \le f_2(x)\ ,\ \ \forall x \in [a;b]$.



Объем этого тела

$$V_x = \pi \int_a^b \left([f_2(x)]^2 - [f_1(x)]^2 \right) dx.$$

4. Физические приложения определенного интеграла

I) ***Пройденный путь***

Пусть точка движется вдоль некоторой кривой со скоростью $v(t)$
Тогда путь S, пройденный точкой за время $[T_1 ; T_2]$, равен

$$S = \int_{T_1}^{T_2} v(t)dt.$$

II) ***Масса отрезка***

Пусть $\gamma(x)$ – плотность распределения массы на отрезке $[a;b]$.
Тогда масса отрезка равна

$$m = \int_a^b \gamma(x)dx.$$

III) ***Работа переменной силы***

Пусть под действием силы $\bar{\mathbf{F}}$ тело движется вдоль оси Ox из точки $x_1 = a$ в точку $x_2 = b$.
Если $F = F(x)$ и $\bar{\mathbf{F}} \upuparrows Ox$, то работа силы равна

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

Таким образом, с помощью определенного интеграла находятся физические и геометрические величины, которые обладают свойством **аддитивности** (т.е. при разбиении $[a;b]$ на части, величина, соответствующая отрезку $[a;b]$, складывается из величин, соответствующих его частям).

§4. Несобственные интегралы

Для существования $\int\limits_a^b f(x)dx$ необходимы условия:

1) $[a;b]$ – конечен,

2) $f(x)$ – ограничена (необходимое условие существования определенного интеграла).

Несобственные интегралы – обобщение понятия определенного интеграла на случай когда одно из этих условий не выполнено.

1. Несобственные интегралы I рода (по бесконечному промежутку)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall[a;b]$, где $b \geq a$.

$\Rightarrow$ существует $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Имеем: $\int\limits_a^b f(x)dx = I(b)$, $D(I) = [a;+\infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом I рода*** *от функции $f(x)$ по промежутку $[a;+\infty)$ называется предел функции $I(b)$ при $b \to +\infty$.*

Обозначают: $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$

Таким образом, по определению

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} I(b) = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx \qquad (1)$$

При этом, если предел в правой части формулы (1) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(-\infty;b]$, то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;b]$**:**

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, то ***несобственным интегралом*** I *рода для функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $(-\infty;+\infty)$ называют

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx, \qquad (2)$$

где c – любое число.

Несобственный интеграл от $f(x)$ по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (2) сходятся.

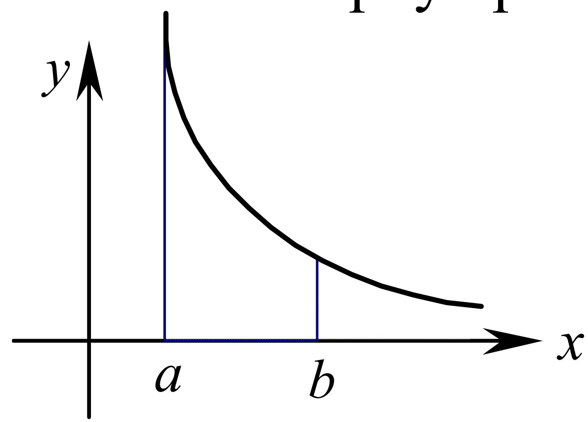
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $(-\infty;+\infty)$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы I рода по промежутку $[a;+\infty)$. Для интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ и $(-\infty;+\infty)$ все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов I рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;+\infty)$.

Тогда $\int\limits_a^b f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;+\infty)$ сходится и равен S, то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямой $x = a$ (криволинейная трапеция с бесконечным основанием) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы I рода переносятся некоторые свойства определенных интегралов (свойства 3, 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;+\infty)$.

Тогда $\forall b \in [a;+\infty)$ имеем

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \left(F(b) - F(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} F(b) - F(a) \qquad (3)$$

Обозначим $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^{+\infty}$.

Тогда (3) примет вид:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{+\infty} = \lim_{x\to+\infty} F(x)-F(a). \qquad (4)$$

Формулу (4) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов по промежутку $[a;+\infty)$.

Аналогично для несобственных интегралов по промежутку $(-\infty;b]$ доказывается справедливость формулы

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{b} = F(b)-\lim_{x\to-\infty} F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

1) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x dx$;

2) $\int\limits_{a}^{+\infty} \frac{dx}{x^n}$; $(a > 0)$

3) $\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$; $(\alpha \neq 0)$

4) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{4 + x^2}$;

5) $\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-\alpha x} dx$; $(\alpha \neq 0)$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{x} dx$.

7) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1 + x^2}$.

2. Признаки сходимости несобственных интегралов I рода

ТЕОРЕМА 1 (первый признак сравнения).

Пусть $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны на* $[a;+\infty)$ *и*

$$0 \le f(x) \le \varphi(x)\,, \quad \forall x \in [c;+\infty) \ \text{(где } c \ge a\text{)}.$$

Тогда:

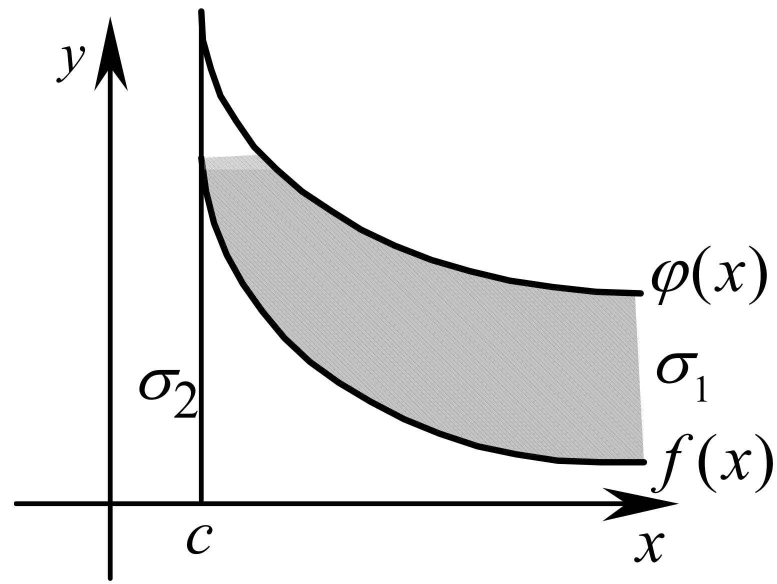
1) *если* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *– сходится, то* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже сходится, причем*

$$\int_c^{+\infty} f(x)dx \le \int_c^{+\infty} \varphi(x)dx;$$

2) *если* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *– расходится, то* $\int_a^{+\infty} \varphi(x)dx$ *тоже расходится.*

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ теоремы 1:

Пусть (σ_1) и (σ_2) – области в xOy , ограниченные осью Ox, прямой $x = c$ и кривыми $y = \varphi(x)$ и $y = f(x)$ соответственно. Неравенство $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ (где $x \in [c;+\infty)$) означает, что область (σ_2) является частью области (σ_1).



$\Rightarrow$ 1) если область (σ_1) имеет площадь, то ее часть (σ_2) тоже имеет площадь;

2) если говорить о площади области (σ_2) нельзя, то и для содержащей ее области (σ_1) тоже нельзя говорить о площади.

ТЕОРЕМА 2 (второй признак сравнения)

Пусть $f(x)$ *и* $\varphi(x)$ *непрерывны и неотрицательны на* $[a;+\infty)$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=h$, *где* h – *действительное число, отличное от нуля, то интегралы*

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad и \qquad \int_a^{+\infty}\varphi(x)dx$$

ведут себя одинаково относительно сходимости.

Замечания.

1) Теорема 2 остается справедливой и в том случае, если $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны и СОХРАНЯЮТ ЗНАК на $[a;+\infty)$.

2) При использовании теорем 1 и 2 в качестве «эталонных» интегралов обычно используют следующие несобственные интегралы:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^n} \quad - \begin{cases} \text{сходится}, & \text{при } n > 1, \\ \text{расходится} & \text{при } n \le 1. \end{cases}$$

$(a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx \quad - \begin{cases} \text{сходится}, & \text{при } \alpha > 0, \\ \text{расходится} & \text{при } \alpha \le 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР. Исследовать на сходимость интегралы

1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+x}\cdot\sqrt[3]{1+x^2}}$; 2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}dx}{1+x}$; 3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a;+\infty)$.
Тогда определены несобственные интегралы

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \qquad \text{и} \qquad \int_a^{+\infty} |f(x)|dx.$$

ТЕОРЕМА 3 (признак абсолютной сходимости).

Если сходится интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$, *то и интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *тоже будет сходиться.*

При этом интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *называется* ***абсолютно сходящимся***.

ПРИМЕР. Абсолютно сходятся интегралы

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} \quad \text{и} \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{1+x^2}.$$

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то об интеграле $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ничего сказать нельзя. Он может расходиться, а может и сходиться.

Если $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ *расходится, а* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *– сходится, то интеграл* $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *называют* ***условно сходящимся***.

ПРИМЕР. Условно сходится интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

3. Несобственные интегралы II рода (от неограниченных функций)

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = +(-)\infty$

$\Rightarrow y = f(x)$ непрерывна на $\forall [a;b_1]$, где $a \le b_1 < b$.

$\Rightarrow$ существует $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$

Имеем: $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx = I(b_1)$, $D(I) = [a;b)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Несобственным интегралом II рода*** *по промежутку* $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, *неограниченной в точке* b, *называется предел функции* $I(b_1)$ *при* $b_1 \to b-0$.

Обозначают: $\int\limits_a^{b} f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} I(b_1) = \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx \qquad (5)$$

При этом, если предел в правой части формулы (5) существует и конечен, то несобственный интеграл называют ***сходящимся***.

В противном случае (т.е. если предел не существует или равен бесконечности) несобственный интеграл называют ***расходящимся***.

Если $y = f(x)$ непрерывна на $(a;b]$ и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = +(-)\infty$,

то аналогично определяется и обозначается ***несобственный интеграл*** II *рода* ***по промежутку*** $[a;b]$ *от функции* $f(x)$, ***неограниченной в точке a*** **:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a_1 \to a+0} \int_{a_1}^b f(x)dx.$$

Если $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b]\backslash\{c\}$ и $x = c$ – точка бесконечного разрыва функции, то ***несобственным интегралом*** II *рода от функции* $f(x)$ ***по промежутку*** $[a;b]$ называют

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \qquad (6)$$

Несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ от функции $f(x)$, неограниченной внутри этого отрезка, называется ***сходящимся***, если **ОБА** интеграла в правой части формулы (6) сходятся.

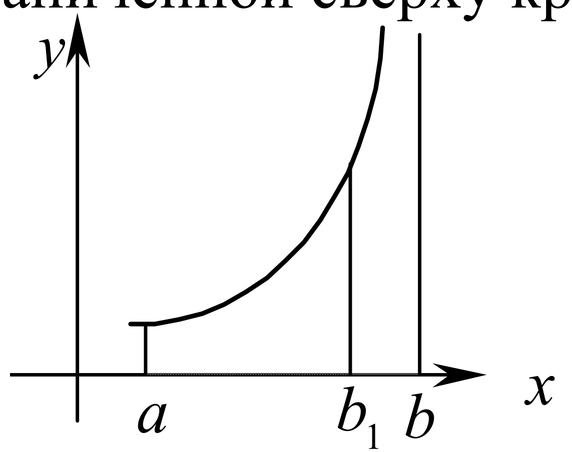
В противном случае, несобственный интеграл по промежутку $[a;b]$ называется ***расходящимся***.

Будем рассматривать несобственные интегралы II рода по промежутку $[a;b]$ от функции, неограниченной в точке b. Для других несобственных интегралов II рода все полученные результаты останутся справедливы.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ сходящихся несобственных интегралов II рода.

Пусть $y = f(x)$ непрерывна на $[a;b)$ и $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a;b)$.

Тогда $\int\limits_a^{b_1} f(x)dx$ – площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b_1]$, ограниченной сверху кривой $y = f(x)$.



$\Rightarrow$ Если несобственный интеграл от $y = f(x)$ по $[a;b]$ сходится и равен S , то полагают, что область, ограниченная Ox, кривой $y = f(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (неограниченная криволинейная трапеция) имеет площадь S.

В противном случае говорить о площади указанной области нельзя.

На сходящиеся несобственные интегралы II рода переносятся те же свойства определенных интегралов, что и для сходящихся интегралов I рода (свойства 4, 5, 6, 7, 8).

Кроме того, для несобственных интегралов II рода также существует обобщение формулы Ньютона – Лейбница.

Пусть $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на $[a;b)$.

Тогда $\forall b_1 \in [a;b)$ имеем

$$\int_a^{b_1} f(x)dx = F(x)\Big|_a^{b_1} = F(b_1) - F(a)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{b_1 \to b-0} \int_a^{b_1} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} \left(F(b_1) - F(a)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \int_a^{b} f(x)dx = \lim_{b_1 \to b-0} F(b_1) - F(a) \qquad (7)$$

Ранее вводили обозначение: $F(b-0)=\lim\limits_{b_1\to b-0}F(b_1)$

$$\Rightarrow \lim_{b_1\to b-0}F(b_1)-F(a)=F(b-0)-F(a)=F(x)\Big|_a^{b-0}.$$

Тогда (7) примет вид:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^{b-0}=\lim_{x\to b-0}F(x)-F(a). \qquad (8)$$

Формулу (8) называют ***обобщением формулы Ньютона – Лейбница*** для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке b.

Аналогично для несобственных интегралов II рода от функций, неограниченных в точке a, доказывается справедливость формулы

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_{a+0}^{b}=F(b)-\lim_{x\to a+0}F(x).$$

ПРИМЕРЫ. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость:

$$1)\ \int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n}; \qquad 2)\ \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n}; \qquad 3)\ \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}.$$

Сформулированные в п.2 признаки сходимости несобственных интегралов (теоремы 1, 2 и 3) останутся справедливы и для несобственных интегралов II рода.

При использовании теорем 1 и 2 в роли «эталонных» интегралов используют интегралы

$$\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^n} \quad - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } n<1, \\ \text{расходится при} & n \ge 1. \end{cases}$$

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^n} \quad - \begin{cases} \text{сходится,} & \text{при } n<1, \\ \text{расходится при} & n \ge 1. \end{cases}$$

Замечание.

Некоторым расходящимся несобственным интегралам можно приписать определенное числовое значение. А именно:

1) Если $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ – расходится, но $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} f(x)dx = A$,

то число A называют ***главным значением*** этого ***несобственного интеграла***.

2) ***Главным значением*** расходящегося интеграла $\int_a^b f(x)dx$

от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке $c \in [a;b]$ называют число A, равное

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx \right) = A.$$

Обозначают соответствено: $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $\quad v.p. \int_a^b f(x)dx$.