Таблица производных основных элементарных функций

1) $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;

2) $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

3) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;

4) $(e^x)' = e^x$;

5) $(a^x)' = a^x \ln a$;

6) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

7) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$;

8) $(\sin x)' = \cos x$;

9) $(\cos x)' = -\sin x$;

10) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

11) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

12) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

13) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

14) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

15) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

16) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;

17) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;

18) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;

19) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

Таблица основных интегралов

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $(n \neq -1)$,

2. $\int \dfrac{1}{x} dx = \ln|x| + C$,

3. $\int \cos x dx = \sin x + C$,

4. $\int \sin x dx = -\cos x + C$,

5. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$,

6. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$,

7. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$,

8. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$,

9. $\int e^x dx = e^x + C$,

10. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $(a > 0, \quad a \neq 1)$,

11. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$ $(a \neq 0)$,

12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$ $(a > 0)$,

13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{a^2 + x^2}\right| + C$ $(a \neq 0)$

14. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C$ $(a \neq 0)$

15. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$,

16. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$,

17. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$,

18. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$,

Интегрирование тригонометрических функций

1. Интегралы $\int \cos kx \sin mx dx$ **,** $\int \cos kx \cos mx dx$ **,** $\int \sin kx \sin mx dx$ **.**

Использовать формулы $\cos kx \sin mx = \frac{1}{2}[\sin(m-k)x + \sin(m+k)x]$,

$$\cos kx \cos mx = \frac{1}{2}[\cos(m-k)x + \cos(m+k)x],$$

$$\sin kx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(m-k)x - \cos(m+k)x].$$

2. Интегралы вида $\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx$**, где** m, n **– целые неотрицательные числа.**

а) Только **одно из чисел** m **и** n **– нечетное:** от нечетной степени отделить один множитель и взять кофункцию в качестве новой переменой;

б) **Оба числа** m **и** n **– нечетные:** от меньшей нечетной степени отделить один множитель и взять кофункцию в качестве новой переменной;

в) **Оба числа** m **и** n **– четные:** понизить степень функций с помощью формул

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

3. Интегралы $\int R(\sin x, \cos x) dx$**, где** R **– рациональная функция.**

а) **функция** $R(\sin x, \cos x)$ **нечетная относительно** $\sin x$, т.е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Замена $t = \cos x$ $\Rightarrow$ $x = \arccos t$, $dx = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\sin x = \sqrt{1-t^2}$.

б) **функция** $R(\sin x, \cos x)$ **нечетная относительно** $\cos x$, т.е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x).$$

Замена $t = \sin x$ $\Rightarrow$ $x = \arcsin t$, $dx = \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$, $\cos x = \sqrt{1-t^2}$.

в) **функция** $R(\sin x, \cos x)$ **четная относительно** $\sin x$ **и** $\cos x$, т.е.

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x).$$

Замена $t = \operatorname{tg} x$ $\Rightarrow$ $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$.

г) **Общий случай**. Замена $tg\frac{x}{2} = t$ (ее называют ***универсальной подстановкой***).

$$\Rightarrow \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

4. Интегралы вида $\int R(\operatorname{tg} x) dx$ **и** $\int R(\operatorname{ctg} x) dx$ **.**

Замены: $t = tgx$ $\Rightarrow$ $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$,

$t = ctgx$ $\Rightarrow$ $x = \operatorname{arc\,ctg} t$, $dx = -\frac{dt}{1+t^2}$.

Интегрирование иррациональностей

1. Интегралы

$$\int R(x, x^{\beta_1}, x^{\beta_2}, \ldots, x^{\beta_k})dx, \quad \int R[x, (ax+b)^{\beta_1}, (ax+b)^{\beta_2}, \ldots, (ax+b)^{\beta_k}]dx,$$

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_1}, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_2}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\beta_k}\right]dx,$$

где $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ **– рациональные числа.**

Замены соответственно: $x = t^s$, $ax + b = t^s$, $\dfrac{ax+b}{a_1x+b_1} = t^s$,

где s – общий знаменатель дробей $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$

2. Интегралы $\int x^m(a+bx^n)^p dx$**.** (Выражение вида $x^m(a+bx^n)^p$, где m, n, p – рациональные числа, a, b – действительные числа, называется дифференциальным биномом)

1) p – целое число. Замена: $x = t^s$.
где s – общий знаменатель m и n.

2) $\dfrac{m+1}{n}$ – целое число. Замена: $a + bx^n = t^s$.
где s – знаменатель дроби p.

3) $\dfrac{m+1}{n} + p$ – целое число. Замена: $\dfrac{a+bx^n}{x^n} = t^s$
где s – знаменатель дроби p.

В других случаях этот интеграл неберущийся.

3. Интегралы $\int R(x, \sqrt{a^2 \pm x^2})dx$**,** $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2})dx$**.**

Замены: 1) $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$) для $R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$;

2) $x = a\,\mathrm{tg}\,t$ (или $x = a\,\mathrm{ctg}\,t$) для $R(x, \sqrt{a^2 + x^2})$;

3) $x = \dfrac{a}{\cos t}$ (или $x = \dfrac{a}{\sin t}$) для $R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$.

4. Интегралы $\int \dfrac{Ax + B}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}dx$ **.**

Выделить полный квадрат под знаком радикала:

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right) + c} = \sqrt{a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{a(x+p)^2 + s},$$

сделать замену $t = x + p$ и расписать на сумму двух интегралов.

5. Интегралы $\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n \cdot \sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Применить «обратную подстановку» $x-\alpha=\frac{1}{t}$ и свести к интегралу

$$\int \frac{P_{n-1}(t)}{\sqrt{a_1t^2+b_1t+c_1}}dt,$$

где $P_{n-1}(t)$ – многочлен степени $n-1$, a_1, b_1, c_1 – некоторые числа.

6. Интегралы $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$.

<u>Первый способ.</u>

1) Выделить полный квадрат под знаком радикала:

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}\cdot x\right)+c}=\sqrt{a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+c-\frac{b^2}{4a^2}}=\sqrt{a(x+p)^2+s}.$$

2) Сделать замену $u=\sqrt{|a|}\cdot(x+p)$.

В результате получим один из следующих интегралов:

$$\int R(u,\sqrt{q^2\pm u^2})du \quad \text{или} \quad \int R(u,\sqrt{x^2-q^2})du$$

(рассмотрены выше).

<u>Второй способ.</u>

1) Привести к сумме интегралов вида

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx,$$

где $P_n(x)$ – многочлен степени n.

2) Расписать каждый из интегралов по формуле:

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=Q(x)\cdot\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},$$

где λ – неопределенный коэффициент, а $Q(x)$ – многочлен степени $n-1$ с неопределенными коэффициентами.

3) Дифференцируем обе части записанного равенства и умножаем обе части получившегося выражения на $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

4) Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x многочленов слева и справа, находим коэффициенты многочлена $Q(x)$ и λ.

Таким образом, интеграл будет сведен к интегралу $\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ (рассмотрен выше).