ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

(IV семестр)

ЧАСТЬ II

Лектор: Пахомова Е.Г.

Замечание. 1) вопросы, не содержащие доказательства;
2) вопросы, с серьезным доказательством;
3) вопросы с небольшим доказательством (примером).

1. Системы дифференциальных уравнений: общий вид системы, решение системы, канонические и нормальные системы. Показать на примере как можно перейти от канонической системы к нормальной.
2. Определение нормальной системы, задача Коши, теорема существования и единственности решения нормальной системы.
3. Определение нормальной системы, метод решения нормальной системы путем сведения к одному уравнению порядка n.
4. Линейные однородные системы дифференциальных уравнений: определение, матричная и операторная форма записи, доказать, что линейная комбинация решений системы снова является ее решением.
5. Линейное пространство $D_n[a,b]$ матриц-столбцов непрерывно дифференцируемых на $[a,b]$ функций: определитель Вронского n элементов пространства $D_n[a,b]$, необходимое условие линейной зависимости n векторов пространства $D_n[a,b]$ (доказать).
6. Линейное пространство $S_n[a,b]$ решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений, условие линейной независимости n решений системы (доказать).
7. Линейное пространство $S_n[a,b]$ решений линейной однородной системы дифференциальных уравнений, теорема о размерности пространства $S_n[a,b]$ (доказать), фундаментальная система решений.
8. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, метод вариации постоянных (получить формулу).
9. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, теорема о структуре общего решения (доказать), теорема о наложении решений (без доказательства).
10. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений, теорема о структуре общего решения (без доказательства), теорема о наложении решений (доказать).
11. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, метод Эйлера. Нахождение ф.с.р. в случае, когда характеристические корни матрицы действительны и различны.
12. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, метод Эйлера. Нахождение ф.с.р. в случае, когда характеристические корни матрицы различны, но среди них есть комплексные.
13. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, метод Эйлера. Нахождение ф.с.р. в случае, когда действительный характеристический корень имеет кратность ℓ и $n-r=\ell$.

14. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, метод Эйлера. Нахождение ф.с.р. в случае, когда действительный характеристический корень имеет кратность ℓ и $n-r \neq \ell$. Рассмотреть подробно случай $\ell = 2$, $n-r=1$.
15. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, метод Эйлера. Нахождение ф.с.р. в случае, когда действительный характеристический корень имеет кратность ℓ и $n-r \neq \ell$. Рассмотреть подробно случай $\ell = 3$, $n-r=1$.
16. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами, метод Эйлера. Нахождение ф.с.р. в случае, когда действительный характеристический корень имеет кратность ℓ и $n-r \neq \ell$. Рассмотреть подробно случай $\ell = 3$, $n-r=2$.
17. Устойчивость решения дифференциального уравнения: определение; проверить, будет ли устойчивым решение … уравнения … .
18. Устойчивость решения системы дифференциального уравнения: определение; проверить, будет ли устойчивым решение … системы уравнений … .
19. Устойчивость автономных систем: точки покоя, устойчивые и неустойчивые точки покоя (определения). Исследовать точку покоя системы $\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases}$ если ее характеристические корни действительные и одного знака.
20. Устойчивость автономных систем: точки покоя, устойчивые и неустойчивые точки покоя (определения). Исследовать точку покоя системы $\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases}$ если ее характеристические корни действительные и разного знака.
21. Устойчивость автономных систем: точки покоя, устойчивые и неустойчивые точки покоя (определения). Исследовать точку покоя системы $\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases}$ если ее характеристические корни $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ и $\alpha \neq 0$.
22. Устойчивость автономных систем: точки покоя, устойчивые и неустойчивые точки покоя (определения). Исследовать точку покоя системы $\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases}$ если ее характеристические корни $\lambda_{1,2} = \pm \beta i$.
23. Устойчивость автономных систем: точки покоя, устойчивые и неустойчивые точки покоя (определения). Исследовать точку покоя системы $\begin{cases} y' = a_{11}y + a_{12}z, \\ z' = a_{21}y + a_{22}z, \end{cases}$ если она имеет кратные характеристические корни.
24. Уравнения в частных производных: определение, порядок уравнения в частных производных, решение уравнения в частных производных, задача Коши для уравнения в частных производных.
25. Первые интегралы системы обыкновенных дифференциальных уравнений, симметричная форма записи системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Аналитический признак первого интеграла системы (в обычной и симметричной форме).
26. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка и их интегрирование. Решение задачи Коши для линейного однородного уравнения в частных производных первого порядка.
27. Линейные неоднородные уравнения в частных производных первого порядка и их интегрирование.

28. Норма в векторном пространстве. Расстояние на множестве. Показать, что нормированное пространство метризуемо. Норма и расстояние в пространствах $C[a,b]$ и $C_1[a,b]$.
29. Определение функционала, непрерывный функционал, линейный функционал. Установить непрерывность (или линейность) функционала … .
30. Вариация функционала в смысле первого определения. Доказать, что вариация функционала (если она существует), определяется единственным образом.
31. Вариация функционала в смысле первого определения. Найти вариацию функционала для простейшей задачи вариационного исчисления.
32. Два определения вариации функционала. Доказать, что если существует вариация в смысле первого определения, то существует вариация и в смысле второго определения и они равны.
33. Экстремумы функционала: определения, необходимое условие экстремума (доказать).
34. Простейшая задача вариационного исчисления (формулировка). Необходимое условие экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления (доказать).
35. Простейшая задача вариационного исчисления (формулировка). Необходимое условие экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления (без доказательства). Рассмотреть уравнение Эйлера в случае, когда $F = F(x, y')$, $F = F(y, y')$, $F = F(x, y)$.
36. Простейшая задача вариационного исчисления (формулировка). Необходимое условие экстремума для простейшей задачи вариационного исчисления (без доказательства). Рассмотреть уравнение Эйлера в случае, когда $F = F(y')$, $F = F(y)$, $F = M(x, y) + N(x, y) \cdot y'$.