УПРАЖНЕНИЯ
по теме «Функция комплексного переменного»

1. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = r_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi_0$, то
$$\lim_{n\to\infty} r_n(\cos\varphi_n + i\sin\varphi_n) = r_0(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0).$$

2. Доказать, что $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}\cdot e^{z_2}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

3. Доказать, что $$\cos^2 z + \sin^2 z = 1,$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2,$$
$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2$$

4. Доказать $$\cos iz = \operatorname{ch} z, \quad \operatorname{ch} iz = \cos z,$$
$$\sin iz = i\operatorname{sh} z, \quad \operatorname{sh} iz = i\sin z,$$
$$e^{iz} = \cos z + i\sin z.$$

5. Доказать $$\operatorname{Arcsin} z = -i\operatorname{Ln}\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right),$$
$$\operatorname{Arccos} z = -i\operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$
$$\operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right), \quad \operatorname{Arctg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{iz-1}{iz+1}\right),$$
$$\operatorname{Arcsh} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2+1}\right),$$
$$\operatorname{Arcch} z = \operatorname{Ln}\left(z + \sqrt{z^2-1}\right),$$
$$\operatorname{Arcth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{1-z}\right), \quad \operatorname{Arccth} z = \frac{1}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+z}{z-1}\right),$$

6. Доказать, что действительная (мнимая) часть аналитической функции является функцией гармонической.

7. Доказать, что $$\left|\int\limits_{(AB)} f(z)dz\right| \le \int\limits_{(AB)} |f(z)|d\ell.$$

8. Доказать, что
$$\int\limits_{(\ell)} f(z)dz = \left[\int\limits_{(\ell)} u(x,y)dx - v(x,y)dy\right] + i\left[\int\limits_{(\ell)} v(x,y)dx + u(x,y)dy\right].$$

9. Доказать, что
$$\int\limits_{(\ell)} f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t))\cdot z'(t)dt.$$