УПРАЖНЕНИЯ
по теме «Числовые и функциональные ряды»

1. Доказать, что сумма сходящегося и расходящегося ряда – расходящийся ряд.
2. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно, то их линейная комбинация $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – абсолютно сходящийся ряд.
3. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся условно, то их линейная комбинация $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – условно сходящийся ряд.
4. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходятся, и для любого n имеет место равенство $u_n \le v_n \le w_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – тоже сходится (Подсказка: рассмотреть неравенство $0 \le v_n - u_n \le w_n - u_n$).
5. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \ge 0)$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ – тоже сходится. Показать, что обратное неверно.
6. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n)^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \cdot |v_n|$ – тоже сходится (Подсказка: доказать и использовать неравенство $|u_n v_n| \le (u_n)^2 + (v_n)^2$).
7. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n)^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ – тоже сходится.
8. Пусть знакоположительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$?

9. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно на отрезке $[a;b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ тоже сходится равномерно на этом отрезке.

10. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0, то он сходится абсолютно для любого $x > x_0$.

11. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ – радиус сходимости R_2, то какой радиус сходимости R имеют ряды а) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?

12. Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2000} x^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{2007} x^n$ имеют одинаковый радиус сходимости R. Сходится ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n}$?

13. Вычислить $\sqrt[4]{2007} \cdot \sqrt[8]{2007^2} \cdot \sqrt[16]{2007^3} \cdot \sqrt[32]{2007^4} \cdot \ldots$

14. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

а) $f(-x) = f(x)$, $f(x+\pi) = -f(x)$;

б) $f(-x) = -f(x)$, $f(x+\pi) = -f(x)$.

Какие из ее коэффициентов Фурье равны нулю?