ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ

(III семестр)

ЧАСТЬ II

Лектор: Пахомова Е.Г.

Замечание. 1) вопросы, не содержащие доказательства;
2) вопросы, с серьезным доказательством;
3) вопросы с небольшим доказательством (самостоятельно)

ФУНКЦИЯ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Комплексные числа: определение, сложение, вычитание, умножение, деление комплексных чисел в алгебраической форме. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел, умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической форме, извлечение корня из комплексного числа.
2. Определение последовательности комплексных чисел и ее предела, геометрическая интерпретация предела последовательности, необходимое и достаточное условие сходимости последовательности (доказать), достаточное условие сходимости последовательности (доказать). Свойства сходящихся последовательностей комплексных чисел.
3. Достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел (без доказательства). Доказать сходимость последовательности $\left\{\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right\}$. Определение числа e^z.
4. Определение числа e^z и $Ln(z)$. Получить вычислительную формулу для $Ln(z)$. Определение $\sin z$, $\cos z$, shz, chz. Связь между гиперболическими и тригонометрическими функциями (доказать).
5. Бесконечно большая последовательность комплексных чисел: определение, геометрический смысл, теорема о связи бесконечно больших последовательностей $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$.
6. Определение функции комплексного переменного. Элементарные ФКП.
7. Определение функции комплексного переменного. Предел ФКП, необходимое и достаточное условие существования предела ФКП.
8. Определение функции комплексного переменного. Непрерывность ФКП, необходимое и достаточное условие непрерывности ФКП. Аналог теоремы Вейерштрасса для ФКП.
9. Производная функции комплексного переменного, дифференцируемость ФКП, связь дифференцируемости с существованием производной (доказать).

10. Производная функции комплексного переменного: определение, необходимое и достаточное условие дифференцируемости ФКП (доказать). Эквивалентность условий Коши-Римана условию $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ (доказать).
11. Аналитические функции и их свойства.
12. Интеграл от функции комплексного переменного: определение, теорема существования (доказать).
13. Интеграл от функции комплексного переменного: определение, свойства. Доказать, что $\left| \int\limits_{(AB)} f(z)dz \right| \le \int\limits_{(AB)} |f(z)| d\ell$.
14. Интеграл от функции комплексного переменного: определение, теорема существования (без доказательства). Доказать, что $\int\limits_{(\ell)} f(z)dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot z'(t)dt$.
15. Интеграл от аналитических функций: теорема Коши для односвязной области (доказать); независимость от пути интегрирования (доказать), в) теорема Коши для многосвязной области (доказать).
16. Первообразная, теорема о существовании первообразной и теорема о связи первообразных (доказать). Неопределенный интеграл и формула Ньютона – Лейбница (доказать).
17. Интегральная формула Коши (доказать).
18. Интеграл типа Коши. Теорема об аналитичности интеграла типа Коши. Производные высших порядков от аналитической функции.
19. Числовые ряды в комплексной плоскости: определение, сходящиеся и расходящиеся ряды, сумма ряда. Связь сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$ со сходимостью $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ (доказать). Свойства сходящихся рядов.
20. Абсолютная и условная сходимость, признак абсолютной сходимости (доказать). Связь абсолютной сходимости рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_n + iy_n)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n$ (доказать). Свойства абсолютно сходящихся рядов.
21. Функциональные ряды в комплексной плоскости: определение, область сходимости, сумма.
22. Равномерная сходимость комплексных функциональных рядов: определение, критерий Коши, критерий Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Доказать, что при умножении равномерно сходящегося ряда на ограниченную функцию равномерная сходимость

сохраняется. Доказать свойство об аналитичности суммы равномерно сходящегося ряда аналитических функций.

23. Степенные ряды в комплексной плоскости: определение, терема Абеля (доказать). Радиус сходимости, круг сходимости, формулы для нахождения радиуса сходимости, свойства.
24. Степенные ряды в комплексной плоскости: определение, терема о разложении ФКП в степенной ряд (доказать).
25. Ряд Лорана: определение, область сходимости (получить формулы), аналитичность суммы, теорема о разложении аналитичной ФКП в ряд Лорана (доказать).
26. Особые точки функции: определение, классификация, связь вида особой точки с рядом Лорана функции в окрестности этой точки (для устранимой особой точки и полюса – доказать).
27. Нуль функции: определение, теорема о виде ряда Тейлора в окрестности точки нуль (доказать). Связь нулей и полюсов функций $f(x)$ и $\dfrac{1}{f(x)}$ (доказать).
28. Характер точки бесконечнось. Разложение функции в ряд Лорана в окрестности ∞. Связь характера точки ∞ с рядом Лорана функции в окрестности ∞.
29. Вычеты относительно z_0: определение, связь с коэффициентом a_{-1} ряда Лорана в окрестности точки z_0 (доказать), формулы для вычисления вычетов относительно полюсов (доказать все формулы).
30. Вычеты относительно точки ∞: определение, связь с коэффициентом a_{-1} ряда Лорана в окрестности точки ∞, формулы для вычисления вычетов относительно ∞, если ∞ – устранимая особая точка или полюс (обе формулы доказать).
31. Основная теорема о вычетах и ее следствие (обе доказать).
32. Применение вычетов при вычислении интегралов вида $\int\limits_a^{a+2\pi} R(\sin x, \cos x)dx$.
33. Применение вычетов при вычислении интегралов вида
$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x}\cdot f(x)dx, \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos\lambda x dx \quad \text{и} \quad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin\lambda x dx .$$
34. Применение вычетов при вычислении интегралов вида $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{P_n(x)}{P_m(x)}dx$.

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1. Интегральное преобразование Лапласа: определение оригинала; проверить, является ли заданная функция … оригиналом.
2. Интегральное преобразование Лапласа: определение изображения; найти по определению изображение функций $f(t)=\eta(t)$ и $e^{\omega t}$; зная изображение функций $e^{\omega t}$, найти изображение $\sin\omega t$, $ch\omega t$.
3. Интегральное преобразование Лапласа: определение изображения; вывести формулу $F(p)=\dfrac{1}{1-e^{-pT}}\displaystyle\int_0^T e^{-pt}\cdot f(t)dt$, где $f(t)$ – периодическая, с периодом T (на положительной полуоси).
4. Интегральное преобразование Лапласа: доказать, что изображение $F(p)$ является аналитической функцией.
5. Свойства преобразования Лапласа:
   а) доказать теорему подобия; с помощью теоремы подобия найти изображение функции … .
   б) доказать теорему запаздывания; с помощью теоремы запаздывания найти изображение функции … .
   в) доказать теорему запаздывания; с помощью теоремы запаздывания найти изображение функции … .
   г) доказать теорему смещения; с помощью теоремы смещения найти изображение функции … .
   д) доказать теорему о дифференцировании оригинала.
   е) дифференцирование изображения (без доказательства). Найти изображение функции $f(t)=t^n$.
   ж) интегрирование оригинала (доказать свойство); найти изображение функции … .
   з) теорема об интегрировании изображения; найти изображение функции … .
   и) теорема Бореля (доказать).
   к) доказать формулу Дюамеля.
6. Интегральное преобразование Лапласа: определение изображения; вторая теорема разложения (без доказательства); найти оригинал функции … . Первая теорема разложения (без доказательства).
7. Дискретное преобразование Лапласа: определение решетчатой функции и ее преобразования Лапласа; найти по определению изображения функций $f(n)=\eta(n)$ и $f(n)=e^{\omega n}$; зная изображение функций $e^{\omega n}$, найти изображение $\sin\omega n$ и $ch\omega n$.
8. Свойства дискретного преобразования Лапласа:

а) теоремы опережения и запаздывания; найти изображение функции … .
б) теорема смещения; найти изображение функции … .
в) дифференцирование изображения; найти изображение функции $f(n) = n^2$.
г) интегрирование изображения; найти изображение функции … .
д) дифференцирование оригинала по параметру; найти изображение функции … .
е) интегрирование оригинала по параметру; найти изображение функции … .

9. Дискретное преобразование Лапласа: определение конечной разности (1-го, 2-го, …, k-го порядка); выражение конечной разности k-го порядка через значения функции; изображение конечных разностей.
10. Дискретное преобразование Лапласа: определение решетчатой функции и ее преобразования Лапласа; формула обращения.