ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для подготовки к коллоквиуму

Лектор: Пахомова Е.Г.

Замечание. 1) вопросы, не содержащие доказательства;
2) вопросы, с серьезным доказательством;
3) вопросы с небольшим доказательством (самостоятельно)

1. Определение числового ряда, его суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды. Свойства сходящихся рядов (без доказательства).
2. Определение числового ряда, его суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды. Исследовать на сходимость ряд геометрической прогрессии.
3. Определение числового ряда, его суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды. Доказать расходимость гармонического ряда.
4. Определение числового ряда, его суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды. Доказать, что поведение ряда не измениться, если отбросить (добавить) конечное число членов ряда.
5. Определение числового ряда, его суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды. Доказать теорему об арифметических действиях со сходящимися рядами.
6. Определение числового ряда, его суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды. Доказать необходимый признак сходимости
7. Определение числового ряда, его суммы, сходящиеся и расходящиеся ряды. Доказать закон ассоциативности для сходящихся рядов.
8. Определение знакоположительного и знакоотрицательного ряда. Доказать необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительного ряда.
9. Определение знакоположительного и знакоотрицательного ряда. Доказать первый признак сравнения.
10. Определение знакоположительного и знакоотрицательного ряда. Доказать второй признак сравнения.
11. Определение знакоположительного и знакоотрицательного ряда. Доказать признак Даламбера.
12. Определение знакоположительного и знакоотрицательного ряда. Доказать признак Коши.
13. Определение знакоположительного и знакоотрицательного ряда. Доказать интегральный признак сходимости знакоположительного ряда.
14. Определение знакопеременного и знакочередующегося ряда. Доказать признак Лейбница.
15. Определение знакопеременного и знакочередующегося ряда. Доказать признак абсолютной сходимости.

16. Условная и абсолютная сходимость. Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов (без доказательства). Проиллюстрировать на примере ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$ теорему о перестановке членов ряда.
17. Признаки Дирихле (без доказательства) и Абеля (доказать).
18. Признаки Дирихле и Абеля (без доказательства). С помощью признака Дирихле (Абеля) исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\cdot\sin n^2}{n}$ или $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)}{\ln^2 n}$.
19. Функциональные ряды: определение, область сходимости функционального ряда. Сумма функционального ряда. Найти область сходимости и сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty}ax^n$.
20. Равномерная сходимость функциональных рядов: определение, признак Коши (доказать) и признак Вейерштрасса (без доказательства) равномерной сходимости ряда.
21. Определение равномерно сходящегося ряда. Доказать, что при умножении равномерно сходящегося ряда на ограниченную функцию равномерная сходимость сохраняется.
22. Определение равномерно сходящегося ряда. Доказать, что сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций является функцией непрерывной.
23. Определение равномерно сходящегося ряда. Свойства равномерно сходящихся рядов (без доказательства).
24. Степенной ряд: определение, теорема Абеля (доказать), радиус и интервал сходимости степенного ряда (определения).
25. Степенной ряд: определение, теорема Абеля (без доказательства), радиус и интервал сходимости степенного ряда (определения, вывести формулы для нахождения радиуса сходимости).
26. Степенной ряд: определение, свойства степенных рядов. Доказать, что степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, целиком лежащем внутри его интервала сходимости.
27. Степенной ряд: определение, свойства степенных рядов. Доказать, что интервал сходимости степенного ряда и ряда его производных – одинаковый.
28. Определение ряда Тейлора и Маклорена. Доказать теорему о разложении функции в степенной ряд.

29. Определение ряда Тейлора и Маклорена. Доказать необходимое и достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора.
30. Определение ряда Тейлора и Маклорена. Доказать достаточное условие разложения функции в ряд Тейлора.
31. Разложить в ряд функции $y = e^x$, $y = chx$.
32. Разложить в ряд функции $y = \sin x$, $y = \cos x$.
33. Разложить в ряд функции $y = \ln(1+x)$, $y = arctgx$.
34. Определение тригонометрического ряда Фурье. Доказать теорему о разложении функции в тригонометрический ряд.
35. Достаточные условия разложения функции в тригонометрический ряд Фурье. Записать тригонометрический ряд Фурье функции …. и найти его сумму.
36. Определение тригонометрического ряда Фурье. Тригонометрический ряд Фурье для четных (нечетных) функций, функций заданных на $(-\ell;\ell)$ или $[0;\ell)$. Записать тригонометрический ряд Фурье функции …. и найти его сумму.
37. Тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме.
38. Ортогональная система функций. Ряд Фурье по ортогональной системе функций.
39. Интеграл Фурье (вывод формулы).
40. Интеграл Фурье в комплексной форме.
41. Теорема о представлении функции интегралом Фурье (без доказательства). Записать интеграл Фурье функции … и найти его значение.
42. Интеграл Фурье для четных и нечетных функций. Представление интегралом Фурье функций, заданных на полуоси. Записать интеграл Фурье функции … и найти его значение.

Упражнения

1. Доказать, что сумма сходящегося и расходящегося ряда – расходящийся ряд.
2. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно, то их линейная комбинация $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – абсолютно сходящийся ряд.
3. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся условно, то их линейная комбинация $\alpha \sum_{n=1}^{\infty} u_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – условно сходящийся ряд.
4. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ сходятся, и для любого n имеет место равенство $u_n \le v_n \le w_n$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ – тоже сходится (Подсказка: рассмотреть неравенство $0 \le v_n - u_n \le w_n - u_n$).
5. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ $(u_n \ge 0)$ сходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ – тоже сходится. Показать, что обратное неверно.
6. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n)^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \cdot |v_n|$ – тоже сходится (Подсказка: доказать и использовать неравенство $|u_n v_n| \le (u_n)^2 + (v_n)^2$).
7. Доказать, что если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n)^2$ и $\sum_{n=1}^{\infty} (v_n)^2$ сходятся, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ – тоже сходится.

8. Пусть знакоположительные ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ расходятся. Что можно сказать о сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} \min(u_n, v_n)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \max(u_n, v_n)$?
9. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ сходится равномерно на отрезке $[a; b]$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ тоже сходится равномерно на этом отрезке.
10. Доказать, что при умножении равномерно сходящегося ряда на ограниченную функцию равномерная сходимость сохраняется.
11. Доказать, что если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-nx}$ сходится в точке x_0, то он сходится абсолютно для любого $x > x_0$.
12. Если ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ имеет радиус сходимости R_1, а ряд $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ – радиус сходимости R_2, то какой радиус сходимости R имеют ряды а) $\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$?
13. Доказать признак Абеля.
14. Функция $f(x)$ удовлетворяет условиям:

    а) $f(-x) = f(x)$, $f(x+\pi) = -f(x)$;

    б) $f(-x) = -f(x)$, $f(x+\pi) = -f(x)$.

    Какие из ее коэффициентов Фурье равны нулю?