ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНУ
(II часть, II семестр)

1. Двойной интеграл: определение, геометрический и физический смысл, необходимое условие существования двойного интеграла, достаточные условия существования двойного интеграла, свойства, вычисление в декартовых координатах, замена переменных в двойном интеграле, приложения двойных интегралов.
2. Тройной интеграл: определение, геометрический и физический смысл, теоремы существования, свойства, вычисление в декартовых координатах, замена переменных в тройном интеграле, приложения тройных интегралов.
3. Криволинейные интегралы I рода: определение, геометрический и физический смысл, теорема существования, свойства, вычисление, приложения криволинейных интегралов I рода.
4. Криволинейные интегралы II рода: определение, физический смысл, теорема существования, свойства, вычисление, приложения криволинейных интегралов II рода.
5. Связь между криволинейными интегралами II рода и двойными интегралами. Связь между криволинейными интегралами I и II рода.
6. Необходимое и достаточное условия независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования и условия, ему эквивалентные.
7. Нахождение функции по ее полному дифференциалу.
8. Поверхностные интегралы I рода: определение, геометрический и физический смысл, теорема существования, свойства, вычисление, приложения поверхностных интегралов I рода.
9. Поверхностные интегралы II рода: определение, теорема существования, свойства, вычисление.
10. Связь между поверхностными интегралами I и II рода.
11. Формула Остроградского-Гаусса, формула Стокса (в векторных и скалярных формах).
12. Векторное поле: Определение, основные характеристики (векторные линии, поток и дивергенция, ротор и циркуляция). Типы векторных полей, их свойства.
13. Дифференциальные уравнения 1-го порядка: определение дифференциального уравнения, его решения; задача Коши; общее, частное, особое решения. Теорема существования и единственности решения.
14. Уравнения с разделенными переменными. Уравнения с разделяющимися переменными и приводящиеся к ним.
15. Однородные уравнения 1-го порядка и приводящиеся к ним.
16. Линейные уравнения 1-го порядка. Метод Лагранжа и метод Бернулли. Уравнение Бернулли.
17. Уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель. Найти интегрирующий множитель линейного дифференциального уравнения первого порядка и уравнения Бернулли.
18. Уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной: 1) уравнения первого порядка, разрешаемые относительно y' неоднозначно; 2) неполные уравнения, параметрический метод решения; 3) уравнения Лагранжа и Клеро.
19. Уравнения высших порядков: определение, общее решение, задача Коши, теорема существования и единственности решения.
20. Уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка: 1) вида $F(x,y^{(n)}) = 0$; 2) не содержащие искомой функции и ее производных до $(k-1)$-го по-

рядка включительно; 3) не содержащие независимого переменного; 4) однородные относительно неизвестной функции и ее производных.

21. Линейные однородные дифференциальные уравнения высших порядков: 1) свойства решений; 2) определитель Вронского, теорема об определителе Вронского для линейно зависимых на $[a,b]$ функций (необходимое условие линейной зависимости функций); 3) теорема об определителе Вронского для линейно независимых решений ЛОДУ n-го порядка (достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ); 4) теорема о размерности пространства решений ЛОДУ, ФСР.
22. ЛОДУ с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение. Отыскание общего решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами в зависимости от корней характеристического уравнения.
23. Уравнение Эйлера.
24. ЛОДУ порядка 2 с произвольными коэффициентами (формула Абеля).
25. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения высших порядков: метод вариации произвольных постоянных, структура общего решения ЛНДУ, структура частного решения ЛНДУ с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида, теорема о наложении решений.
26. Краевые задачи. Задача Штурма – Лиувилля.

УПРАЖНЕНИЯ

1. Доказать теорему о среднем для двойного (тройного, криволинейного I рода, поверхностного I рода) интеграла. С помощью теоремы о среднем найти $\lim\limits_{R\to 0}\left[\dfrac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)dxdy\right]$, где $f(x,y)$ – непрерывная функция.
2. Вывести формулу для определения статического момента или момента инерции плоской области (тела, кривой, поверхности).
3. Вывести формулу для нахождения площади части цилиндрической поверхности с помощью криволинейного интеграла I рода.
4. Вывести формулу для нахождения криволинейного интеграла I рода в случае плоской кривой в полярных координатах.
5. Доказать, что если (S) – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, $\overline{\mathbf{N}}$ – нормаль к поверхности (S), $\overline{\mathbf{C}}$ – ненулевой постоянный вектор, то
$$\oiint\limits_{(S)}\cos(\widehat{\overline{\mathbf{N}},\overline{\mathbf{C}}})ds=0.$$
6. Доказать формулу $\oiint\limits_{(S)}\varphi\cdot(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{n}}_{\mathbf{0}})ds=\iiint\limits_{(V)}[\varphi\cdot div\overline{\mathbf{a}}+(\overline{\mathbf{a}},grad\varphi)]dxdydz$, где $\varphi=\varphi(x,y,z)$, (S) – поверхность, ограничивающая тело (V), $\overline{\mathbf{n}}_{\mathbf{0}}$ – орт внешней нормали к (S).
7. Доказать, что если (S) – замкнутая кусочно-гладкая поверхность и функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\dfrac{\partial^2 u}{dx^2}+\dfrac{\partial^2 u}{dy^2}+\dfrac{\partial^2 u}{dz^2}=0$, то $\oiint\limits_{(S)}\dfrac{\partial u}{\partial n}ds=0$, где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к поверхности (S).
8. Доказать, что если (S) – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, функция $u(x,y,z)$ является многочленом второй степени и $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к (S), то интеграл $\oiint\limits_{(S)}\dfrac{\partial u}{\partial n}ds$ пропорционален объему тела (V), ограниченному поверхностью (S).
9. Пусть (γ) – кусочно-гладкая замкнутая кривая, расположенная в некоторой плоскости, и $\overline{\mathbf{a}}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{j}$, где P, Q, R – линейные функции от x, y, z. Доказать, что если циркуляция $\oint\limits_{(\gamma)}Pdx+Qdy+Rdz$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади области (S), ограниченной (γ).

УТВЕРЖДЕНИЯ, ВОШЕДШИЕ В БИЛЕТЫ С ДОКАЗАТЕЛЬСТВОМ

1. Сведение двойного интеграла к повторному.
2. Формула замены переменных в двойном интеграле. Нахождение якобиана при переходе к полярным координатам.
3. Нахождения якобиана в случае перехода к цилиндрическим и сферическим координатам в тройном интеграле.
4. Формула для вычисления криволинейного интеграла I рода.
5. Формула для вычисления криволинейного интеграла II рода.
6. Формула Грина (связь криволинейных интегралов II рода по замкнутому контуру с двойными интегралами).
7. Необходимое и достаточное условие независимости криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования.
8. Аналог формулы Ньютона-Лейбница для интегралов от полных дифференциалов.
9. Нахождение функции по ее дифференциалу.
10. Геометрическое приложение криволинейных интегралов II рода по замкнутому контуру.
11. Связь криволинейных интегралов I и II рода.
12. Формула для вычисления поверхностного интеграла I рода.
13. Формула для вычисления поверхностного интеграла II рода.
14. Формула Остроградского – Гаусса (связь поверхностных интегралов II рода по замкнутой поверхности с тройными интегралами).
15. Связь поверхностных интегралов I и II рода.
16. Формула Стокса (связь криволинейных интегралов II рода и поверхностных интегралов II рода).
17. Физический смысл поверхностного интеграла II рода (потока вектора).
18. Формула для вычисления дивергенции, свойства дивергенции.
19. Физический смысл ротора, свойства ротора.
20. Теорема о представлении векторного поля общего вида в виде суммы потенциального и соленоидального полей.
21. Интегрирование уравнений с разделенными и разделяющимися переменными.
22. Интегрирование однородных уравнений и приводящихся к ним.
23. Интегрирование линейных уравнений (методом Лагранжа и методом Бернулли)
24. Интегрирование уравнений Бернулли.
25. Необходимое и достаточное условие того, что уравнение является уравнением в полных дифференциалах.
26. Формула для нахождения интегрирующего множителя, зависящего только от x или только от y.
27. Интегрирование уравнений, не разрешенных относительно производной (разрешаемых относительно производной неоднозначно, неполных, уравнений Лагранжа и Клеро).
28. Интегрирование уравнений высших порядков, допускающие понижение порядка (вида $F(x,y^{(n)}) = 0$; не содержащих искомой функции и ее производных до $(k-1)$-го порядка включительно; не содержащих независимого переменного; однородные относительно неизвестной функции и ее производных).
29. Свойство решений линейных однородных уравнений порядка n.
30. Необходимое условие линейной зависимости функций.
31. Достаточное условие линейной независимости решений ЛОДУ.
32. Терема о размерности пространства решений ЛОДУ.

33. Получение характеристического уравнения для ЛОДУ с постоянными коэффициентами.
34. Сведение уравнения Эйлера к ЛОДУ с постоянными коэффициентами.
35. Вывод формулы Абеля.
36. Метод вариации постоянных для линейных неоднородных уравнений порядка n.
37. Теорема о структуре общего решения ЛНДУ.
38. Теорема о наложении решений.