ВОПРОСЫ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
ДЛЯ КОЛЛОКВИУМА
(II семестр)

1. Первообразная: определение, достаточное условие существования первообразной, теорема о количестве первообразных (доказать).
2. Неопределенный интеграл: определение, основные свойства неопределенного интеграла. Доказать, что
   а) интеграл от суммы равен сумме интегралов;
   б) константу можно выносить за знак интеграла.
3. Формула замены переменной в неопределенном интеграле (доказать)
4. Формула интегрирования по частям в неопределенном интеграле(доказать).
5. Рациональные дроби: определение правильной и неправильной рациональной дроби, определение простейших рациональных дробей, интегрирование простейших рациональных дробей 1-го, 2-го, 3-го и 4-го типа. Теорема о разложении правильной дроби на простейшие (без доказательства)
6. Определенный интеграл: определение, необходимое условие интегрируемости, достаточное условие интегрируемости.
7. Свойства определенного интеграла. Доказать утверждения:
   а) постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла;
   б) интеграл от суммы функций равен сумме интегралов от слагаемых;
   в) теорему о среднем.
8. Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о производной определенного интеграла по переменному верхнему пределу (доказать). Формула Ньютона-Лейбница (доказать).
9. Замена переменной в определенном интеграле (доказать).
10. Формула интегрирование по частям в определенном интеграле (доказать).
11. Вычисление площади области с помощью определенного интеграла (все случаи, доказать).
12. Нахождение длины дуги кривой $y = f(x)$ с помощью определенного интеграла (доказать).
13. Нахождение длины дуги плоской, параметрически заданной, кривой с помощью определенного интеграла (доказать). Нахождение длины дуги, заданной в полярных координатах (доказать)
14. Нахождение объемов тел с помощью определенного интеграла (доказать).
15. Приближенное вычисление определенных интегралов по формуле прямоугольников, трапеций, Симпсона.
16. Несобственные интегралы I рода: определение, сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы, геометрический смысл сходящихся несобственных интегралов. Обобщение формулы Ньютона – Лейбница для несобственных интегралов I рода.
17. Несобственные интегралы II рода: определение, сходящиеся и расходящиеся несобственные интегралы, геометрический смысл сходящихся несобственных интегралов II рода. Обобщение формулы Ньютона – Лейбница для несобственных интегралов II рода.
18. Признаки сравнения для несобственных интегралов (оба признака – доказать).
19. Признак абсолютной сходимости для несобственных интегралов (доказать). Абсолютная и условная сходимость несобственных интегралов.
20. Собственные интегралы, зависящие от параметра с постоянными пределами: определение, теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра (доказать),

теорема о предельном переходе по параметру под знаком интеграла (доказать), теорема о дифференцировании по параметру (доказать).

21. Собственные интегралы, зависящие от параметра с переменными пределами: определение, теорема о непрерывности интеграла, зависящего от параметра (без доказательства), теорема о дифференцировании по параметру (доказать).
22. Несобственные интегралы, зависящие от параметра: определение, теоремы о его непрерывности и дифференцировании по параметру (без доказательства).
23. γ-функция: определение, основные свойства (два из них – доказать).
24. β-функция: определение, основные свойства (два из них – доказать).

УПРАЖНЕНИЯ

1. При каком условии интеграл $\int \frac{ax^2+bx+c}{x^3(x-1)^2}dx$ представляет собой рациональную функцию?
2. При каком условии интеграл $\int \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $(a \neq 0)$ представляет собой алгебраическую функцию?
3. В каком случае интеграл $\int \left(a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots+\frac{a_n}{x^n}\right)e^x dx$ представляет собой элементарную функцию $(n \in \mathbb{N})$?
4. Получить рекуррентную формулу для вычисления интегралов

   а) $I_n=\int \frac{dx}{\sin^n x}$ и $K_n=\int \frac{dx}{\cos^n x}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$;

   б) $I_n=\int \sin^n x dx$ и $K_n=\int \cos^n x dx$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$;

   в) $I_n=\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n}$ $(n \in \mathbb{N})$;

   г) $I_n=\int \operatorname{tg}^n x dx$ и $K_n=\int \operatorname{ctg}^n x dx$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$;

   д) $I_n=\int x^n e^x dx$ и $K_n=\int \ln^n x dx$ $(n \in \mathbb{N})$.
5. Касательная к графику функции $y=f(x)$ в точке $M_1(a;\ f(a))$ составляет с осью Ox угол $\frac{\pi}{3}$, а в точке $M_2(b;\ f(b))$ – угол $\frac{\pi}{4}$. Функция $f''(x)$ – непрерывна на $[a;\ b]$. Найти интегралы

$$\int_a^b f''(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f'(x)\cdot f''(x)dx.$$

6. Докажите, что если $J_n = \int\limits_1^e \ln^n x dx$, то $J_n = e - n \cdot J_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

7. Получить рекуррентные формулы для вычисления интегралов

а) $I_n = \int\limits_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ и $K_n = \int\limits_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$).

б) $I_n = \int\limits_{-1}^{0} x^n e^x dx$ ($n \in \mathbb{N}$)

г) $I_n = \int\limits_0^{\pi/4} tg^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$).

8. Доказать справедливость равенства $\int\limits_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int\limits_0^1 x^n (1-x)^m dx$.

9. Показать, что если $f(x)$ – функция периодическая с периодом T, то $\int\limits_a^{a+T} f(t)dt$ не зависит от a (Подсказка: докажите, что он равен $\int\limits_0^T f(t)dt$ при любом a).

10. Доказать справедливость равенства $\int\limits_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int\limits_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$ $(x > 0)$.

11. Доказать справедливость равенства $\int\limits_{1/e}^{tgx} \frac{tdt}{1+t^2} + \int\limits_{1/e}^{ctgx} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$.

12. Докажите, что если функция $f(x)$ – нечетная и периодическая с периодом T, то $\int\limits_a^x f(t)dt$ также является периодической функцией с тем же периодом. (Подсказка: используйте тот факт, что для периодической функции с периодом T $\int\limits_a^{a+T} f(t)dt$ не зависит от a).

13. Показать, что если $f(x)$ функция нечетная, то $\int\limits_a^x f(t)dt$ – функция четная. Будет ли $\int\limits_a^x f(t)dt$ – нечетной, если $f(x)$ – четная?

14. Найдите производные:

а) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^b \sin(t^2)dt\right)$; б) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x \sin(t^2)dt\right)$; в) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_x^b \sin(t^2)dt\right)$;

г) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}dt\right)$; д) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^{0} \sqrt{1+t^3}dt\right)$; е) $\dfrac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^3}dt\right)$.

15. Найти производную по x от функции y заданной

а) неявно: $\int\limits_0^y e^{t^2}dt + \int\limits_0^x \cos t^2 dt = 0$.

б) параметрически: $x = \int\limits_2^{t^2} \dfrac{u}{\ln u}du$, $y = \int\limits_{t^2}^{2} \dfrac{u^2}{\ln u}du$.

16. Найти пределы: а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} \dfrac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t}\,dt}{\int\limits_0^{\operatorname{tg} x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

17. Найти точки экстремума и точки перегиба графика функции $\Phi(x) = \int\limits_a^x (t-1)(t-2)^2 dt$.

18. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $\Phi(x) = \int\limits_0^x \dfrac{2t+1}{t^2-2t+2}dt$ на отрезке $[-1;\, 1]$.

19. Найдите длину линии, заданной уравнением $y = \int\limits_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$.

Ответ: 4.

20. Найдите длину дуги линии $x = \int\limits_1^t \dfrac{\cos z dz}{z}$, $y = \int\limits_1^t \dfrac{\sin z dz}{z}$ от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.
Ответ: $\ln(\pi/2)$.