УПРАЖНЕНИЯ ПО КРАТНЫМ, КРИВОЛИНЕЙНЫМ, ПОВЕРХНОСТНЫМ ИНТЕГРАЛАМ

1. Доказать теорему о среднем для двойного (тройного, криволинейного I рода, поверхностного I рода) интеграла. С помощью теоремы о среднем найти
$$\lim_{R\to 0}\frac{1}{\pi R^2}\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f\left(x,y\right)dxdy,$$
где $f\left(x,y\right)$ – непрерывная функция.
2. Вывести формулу для определения статического момента или момента инерции плоской области (тела, кривой, поверхности).
3. Доказать, что если (S) – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, $\overline{\mathbf{N}}$ – нормаль к поверхности (S), $\overline{\mathbf{C}}$ – ненулевой постоянный вектор, то
$$\oiint\limits_{(S)}\cos(\widehat{\overline{\mathbf{N}},\overline{\mathbf{C}}})ds=0.$$
4. Доказать формулу $\oiint\limits_{(S)}\varphi(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{n}}_{\mathbf{0}})ds=\iiint\limits_{(V)}[\varphi\cdot div\overline{\mathbf{a}}+(\overline{\mathbf{a}},grad\varphi)]dV$, где $\varphi=\varphi(x,y,z)$, (S) – поверхность, ограничивающая тело (V), $\overline{\mathbf{n}}_{\mathbf{0}}$ – орт внешней нормали к (S).
5. Доказать, что если (S) – замкнутая кусочно-гладкая поверхность и функция $u(x,y,z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\frac{\partial^2 u}{dx^2}+\frac{\partial^2 u}{dy^2}+\frac{\partial^2 u}{dz^2}=0$, то $\oiint\limits_{(S)}\frac{\partial u}{\partial n}ds=0$, где $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к поверхности (S).
6. Доказать, что если (S) – замкнутая кусочно-гладкая поверхность, функция $u(x,y,z)$ является многочленом второй степени и $\frac{\partial u}{\partial n}$ – производная по направлению нормали к (S), то интеграл $\oiint\limits_{(S)}\frac{\partial u}{\partial n}ds$ пропорционален объему тела (V), ограниченному поверхностью (S).
7. Пусть (γ) – кусочно-гладкая замкнутая кривая, расположенная в некоторой плоскости, и $\overline{\mathbf{a}}=P\mathbf{i}+Q\mathbf{j}+R\mathbf{j}$, где P, Q, R – линейные функции от x, y, z. Доказать, что если циркуляция $\oint\limits_{(\gamma)}Pdx+Qdy+Rdz$ отлична от нуля, то она пропорциональна площади области (S), ограниченной (γ).