УПРАЖНЕНИЯ
по теме «Определенный интеграл»

1. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_1(a; f(a))$ составляет с осью Ox угол $\dfrac{\pi}{3}$, а в точке $M_2(b; f(b))$ – угол $\dfrac{\pi}{4}$. Функция $f''(x)$ – непрерывна на $[a; b]$. Найти интегралы

$$\int_a^b f''(x)dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f'(x)\cdot f''(x)dx.$$

2. Докажите, что если $J_n = \int_1^e \ln^n x dx$, то $J_n = e - n\cdot J_{n-1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Получить рекуррентные формулы для вычисления интегралов $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$ и $K_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$).

4. Составить рекуррентную формулу и вычислить интеграл

$$I_n = \int_{-1}^{0} x^n e^x dx \quad (n \in \mathbb{N}).$$

5. Составить рекуррентную формулу для вычисления интеграла $I_n = \int_0^{\pi/4} tg^n x dx$ ($n \in \mathbb{N}$ и $n \geq 2$).

6. Доказать справедливость равенства $\int_0^1 x^m (1-x)^n dx = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx$.

7. Показать, что если $f(x)$ – функция периодическая с периодом T, то $\int_a^{a+T} f(t)dt$ не зависит от a (Подсказка: докажите, что он равен $\int_0^T f(t)dt$ при любом a).

8*. Найдите $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(e^x+1)(x^2+1)}$.

9. Доказать справедливость равенства $\displaystyle\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{dt}{1+t^2}$ ($x > 0$).

10. Доказать справедливость равенства $\int\limits_{1/e}^{tgx} \frac{tdt}{1+t^2} + \int\limits_{1/e}^{ctgx} \frac{dt}{t(1+t^2)} = 1$.

11. Докажите, что если функция $f(x)$ – нечетная и периодическая с периодом T, то $\int\limits_a^x f(t)dt$ также является периодической функцией с тем же периодом. (Подсказка: используйте тот факт, что для периодической функции с периодом T $\int\limits_a^{a+T} f(t)dt$ не зависит от a).

12. Показать, что если $f(x)$ функция нечетная, то $\int\limits_a^x f(t)dt$ – функция четная. Будет ли $\int\limits_a^x f(t)dt$ – нечетной, если $f(x)$ – четная?

13. Найдите производные:

а) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^b \sin(t^2)dt\right)$; б) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_a^x \sin(t^2)dt\right)$; в) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_x^b \sin(t^2)dt\right)$;

г) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_0^{x^2} \sqrt{1+t^3}\,dt\right)$; д) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^0 \sqrt{1+t^3}\,dt\right)$; е) $\frac{d}{dx}\left(\int\limits_{x^2}^{x^3} \sqrt{1+t^3}\,dt\right)$.

14. Найти производную по x от функции y заданной

а) неявно: $\int\limits_0^y e^{t^2} dt + \int\limits_0^x \cos t^2 dt = 0$.

б) параметрически: $x = \int\limits_2^{t^2} \frac{u}{\ln u} du$, $y = \int\limits_{t^2}^2 \frac{u^2}{\ln u} du$.

15. Найти пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int\limits_0^x \cos t^2 dt}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} \frac{\int\limits_0^{\sin x} \sqrt{\mathrm{tg}\, t}\,dt}{\int\limits_0^{\mathrm{tg}\, x} \sqrt{\sin t}\,dt}$.

16. Найти точки экстремума и точки перегиба графика функции $\Phi(x) = \int\limits_a^x (t-1)(t-2)^2 dt$. Построить график этой функции при $a = 0$.

17. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $\Phi(x) = \int\limits_0^x \frac{2t+1}{t^2-2t+2}\,dt$ на отрезке $[-1;\, 1]$.

18. Найдите длину линии, заданной уравнением $y = \int\limits_{-\pi/2}^{x} \sqrt{\cos t}\,dt$.

    Ответ: 4.

19. Найдите длину дуги линии $x = \int\limits_1^t \frac{\cos z dz}{z}$, $y = \int\limits_1^t \frac{\sin z dz}{z}$ от начала координат до ближайшей точки с вертикальной касательной.

    Ответ: $\ln(\pi/2)$.

20*. Найдите $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^a+1)(x^2+1)}$ (a – const).