ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ
по математическому анализу

1. Функция: определение, способы задания, классификация, основные характеристики поведения функции.
2. Определение числовой последовательности и ее предела, геометрическая интерпретация предела последовательности. Доказать следующие утверждения:
   а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (по определению, для заданной последовательности x_n);
   б) последовательность может иметь не более одного предела;
   в) сходящаяся последовательность ограничена;
   г) теорему о роли бесконечно малых последовательностей;
   д) произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности является бесконечно малой последовательностью;
   е) предел суммы последовательностей равен сумме пределов слагаемых;
   ж) если все члены последовательности неотрицательны (положительны), то ее предел – неотрицательный;
   з) лемму о двух милиционерах для последовательностей.
3. Теорема Вейерштрасса (доказать). С помощью теоремы Вейерштрасса доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится.
4. Определение бесконечно большой последовательности и ее геометрическая интерпретация. Доказать следующие утверждения:
   а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (по определению, для заданной последовательности x_n);
   б) связь бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей;
   в) сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака является бесконечно большой того же знака;
   г) сумма бесконечно большой и ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью;
   д) произведение двух бесконечно больших последовательностей является бесконечно большой последовательностью;
   е) произведение бесконечно большой и отделимой от нуля ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью;
   ж) если $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $|x_n| \le |y_n|$ $(|x_n| < |y_n|)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\{y_n\}$ тоже является бесконечно большой;
5. Определение функции и ее предела по Коши и по Гейне, их связь. Свойства пределов. Доказать следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ (по определению, для заданной функции $f(x)$);

б) функция, имеющая предел при $x \to x_0$, ограничена в некоторой окрестности точки x_0;

в) теорема о роли бесконечно малых функций;

г) формула замены переменной в пределе.

6. Определение бесконечно большой функции (на языке $\varepsilon - \delta$ и на языке последовательностей). Свойства бесконечно больших функций. Докажите по определению бесконечно большой функции, что $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ (для заданной функции $f(x)$).
7. Односторонние пределы. Теорема о существование $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (доказать).
8. Первый замечательный предел (доказать), его следствия (доказать).
9. Второй замечательный предел (без доказательства), его следствия (доказать).
10. Сравнение бесконечно малых функций. Теоремы о замене бесконечно малых на эквивалентные и о главной части бесконечно малой (обе доказать).
11. Сравнение бесконечно больших функций. Теоремы о замене бесконечно больших на эквивалентные и о главной части бесконечно большой (обе доказать).
12. Сформулируйте все определения непрерывной функции. Докажите по определению, что функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке области определения.
13. Определение точки разрыва, их классификация. Найти точки разрыва функции конкретной функции $f(x)$ и определить их тип.
14. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема Вейерштрасса (без доказательства), теорема Коши (доказать), следствия теорем Коши и Вейерштрасса (без доказательства).