ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К КОЛЛОКВИУМУ
по линейной алгебре

1. Определение матрицы, линейные операции над матрицами (определение и свойства), нелинейные операции над матрицами (определение и свойства).
2. Определение определителя. По определению получить формулы для вычисления определителя 2-го и 3-го порядка.
3. Сформулируйте все свойства определителей. Докажите, что
   а) при транспонировании матрицы ее определитель не меняется;
   б) общий элемент строки (столбца) можно выносить за знак определителя;
   в) определитель можно представить в виде суммы определителей, если его строка (столбец) состоит из сумм элементов;
   г) достаточные условия равенства нулю определителя;
   д) определитель не изменится, если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца), умноженный на число $\alpha \neq 0$.
4. Определение минора матрицы. Дополнительный минор и алгебраическое дополнение минора (элемента).
5. Теорема Лапласа и ее следствия (2-е следствие – доказать).
6. Базисный минор и ранг матрицы. Окаймляющий минор. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
7. Базисный минор и ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
8. Определение линейного уравнения, система линейных уравнений (в развернутом виде и в матричной форме). Определение решения системы линейных уравнений, совместные, несовместные, определенные и неопределенные системы. Критерий совместности и определенности системы.
9. Определение обратной матрицы. Свойства обратной матрицы (с доказательствами). Достаточное условие существования обратной матрицы (с доказательством)
10. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений (получить формулу).
11. Формулы Крамера (с доказательством).
12. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
13. Системы линейных однородных уравнений, теорема о линейной комбинации конечного числа решений СЛОУ (доказать), фундаментальная система решений.
14. Теорема о связи решений системы линейных неоднородных уравнений и решений соответствующей СЛОУ (доказать).

УПРАЖНЕНИЯ К КОЛЛОКВИУМУ
по линейной алгебре

1. Следом квадратной матрицы A (обозначают trA) называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.
$$trA = a_{11} + a_{22} \ldots + a_{nn}.$$
Доказать, что $tr(AB) = tr(BA)$.
2. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент умножить на число α?
3. Как изменится определитель, если каждый его элемент a_{ij} умножить на λ^{i-j}, где $\lambda \neq 0$.
4. Как изменится определитель порядка n если его строки переписать в обратном порядке?
5. Элементы матрицы равны ± 1. Доказать, что ее определитель – число четное.
6. Элементы матрицы третьего порядка равны ± 1. Может ли ее определитель быть равен 6?
7. Квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется ***кососимметрической***, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ji}$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.
8. Найти определитель порядка n, элементы которого заданы условиями: а) $a_{ij} = \min(i, j)$; б) $a_{ij} = \max(i, j)$.
9. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$.

10. Найти значения λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при этих значениях λ и чему он равен при других значениях λ?
11. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях λ?
12. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A переставить i-ю и j-ю строки?

13. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A i-ю строку умножить на число $\lambda \neq 0$?
14. Выразите через определитель матрицы A определитель ее союзной матрицы.
15. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

16. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

и два решения этой системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, как в данной системе и имеющую решением

а) сумму решений: $\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \dots, \alpha_n+\beta_n$;

б) произведение первого решения на число λ: $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n$.

17. При каком условии линейная комбинация решений системы линейных неоднородных уравнений снова будет решением этой системы?
18. Что можно сказать о системе m линейных неоднородных уравнений с n неизвестными, если все столбцы ее расширенной матрицы кроме первого пропорциональны? (совместна или нет? Если совместна, то определена или неопределена; можно ли указать значение каких-либо неизвестных?)
19. Составить однородное уравнение с тремя неизвестными, решениями которого являются линейные комбинации решений $(1;1;2)$ и $(1;2;3)$.
20. Найти систему линейных однородных уравнений, состоящую из двух уравнений; для которой решения $(1;4;-2;2;-1)$, $(3;13;-1;2;1)$, $(2;7;-8;4;-5)$ являются фундаментальной системой решений.