УПРАЖНЕНИЯ
по теме «Аналитическая геометрия»

1. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ образовывали треугольник.
2. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$, $A_3x+B_3y+C_3=0$ имели единственную общую точку.
3. Даны две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$. С помощью рангов r и R матриц $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямые: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.
4. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка $M_0(x_0,y_0)$ лежала между двумя параллельными прямыми $Ax+By+C_1=0$ и $Ax+By+C_2=0$.
5. Даны три параллельные прямые: $Ax+By+C_1=0$, $Ax+By+C_2=0$, $Ax+By+C_3=0$. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вторая прямая лежала в полосе, образованной первой и третьей прямыми.
6. Найти расстояние d между двумя параллельными прямыми $Ax+By+C_1=0$ и $Ax+By+C_2=0$.
7. Записать уравнения прямых, параллельных прямой $Ax+By+C=0$ и отстоящих от нее на расстоянии d.
8. Прямая задана общим уравнением $Ax+By+C=0$. Найти ее нормальное уравнение.
9. Доказать, что если $\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y-p=0$ – нормальное уравнение прямой, то $d=\left|\cos\alpha\cdot x_0+\cos\beta\cdot y_0-p\right|$ – расстояние от точки $M_0(x_0,y_0)$ до этой прямой.
10. Доказать, что прямая $Ax+By+C=0$ параллельна прямой, проходящей через точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ тогда и только тогда, когда $Ax_1+By_1+C=Ax_2+By_2+C\neq 0$.
11. Даны две смежные стороны параллелограмма $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и точка пересечения его диагоналей $M_0(x_0;y_0)$. Записать уравнения двух других его сторон.

12. Точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$ не лежат на прямой $Ax+By+C=0$. Найдите отношение λ, в котором точка пересечения прямой $Ax+By+C=0$ и прямой M_1M_2 делит отрезок M_1M_2.
13. Стороны треугольника заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ и $A_3x+B_3y+C_3=0$. Найти длину высоты треугольника, опущенную на третью сторону.
14. Прямая на плоскости задана векторным уравнением $(\bar{\mathbf{r}},\overline{\mathbf{N}})+C=0$, $\bar{\mathbf{r}}_0$ – радиус-вектор точки M_0. Найти радиус-вектор точки M_1, симметричной точке M_0 относительно заданной прямой.
15. Точка M_0 лежит на прямой $Ax+By+C=0$. Вектор M_0M_1 имеет координаты $\{A;B\}$. Доказать, что точка M_1 лежит в положительной полуплоскости относительно прямой $Ax+By+C=0$.
16. Две прямые на плоскости заданы векторными уравнениями: $(\bar{\mathbf{r}},\overline{\mathbf{N}})+C=0$ и $\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_0+t\cdot\bar{\ell}$ (где $(\overline{\mathbf{N}},\bar{\ell})\neq 0$). Найдите радиус-вектор точки пересечения прямых.

17. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ лежала между двумя параллельными плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$. (сравни с 4)
18. Даны три параллельные плоскости: $Ax+By+Cz+D_1=0$, $Ax+By+Cz+D_2=0$, $Ax+By+Cz+D_3=0$. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вторая плоскость лежала в полосе, образованной первой и третьей плоскостями. (сравни с 5)
19. Найти расстояние d между двумя параллельными плоскостями $Ax+By+Cz+D_1=0$ и $Ax+By+Cz+D_2=0$ (сравните с задачей 6).
20. Записать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ и отстоящих от нее на расстоянии d (сравните с задачей 7).
21. Плоскость задана общим уравнением $Ax+By+Cz+D=0$. Найти ее нормальное уравнение (сравните с задачей 8).
22. Доказать, что если $\cos\alpha\cdot x+\cos\beta\cdot y+\cos\gamma\cdot z-p=0$ – нормальное уравнение плоскости, то $d=\left|\cos\alpha\cdot x_0+\cos\beta\cdot y_0+\cos\gamma\cdot z_0-p\right|$ – расстояние от точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до этой плоскости (сравните с задачей 9).
23. Три вектора $\overline{\mathbf{OA}}=\bar{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{OB}}=\bar{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{OC}}=\bar{\mathbf{c}}$ – некомпланарные. Доказать, что плоскость, проходящая через точки A, B, C перпендикулярна вектору $[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]+[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}]+[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}]$.

24. Даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. С помощью рангов r и R матриц
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$
выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.
25. Даны три плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$. С помощью рангов r и R матриц
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$
выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы
1) три плоскости имели одну общую точку;
2) три плоскости были различны и пересекались по одной прямой;
3) плоскости попарно пересекались и линия пересечения любых двух плоскостей была параллельна третьей стороне (т.е. плоскости образовывают «призму»).
4) две плоскости параллельны, а третья их пересекает;
5) три плоскости параллельны;
6) две плоскости совпадают, а третья их пересекает;
7) две плоскости совпадают, а третья – им параллельна;
8) три плоскости совпадали.
26. При каком необходимом и достаточном условии четыре плоскости $A_kx + B_ky + C_kz + D_k = 0$ ($k = 1,2,3,4$) образуют пирамиду?
27. Запишите векторное уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{0}$ параллельно неколлинеарным векторам $\bar{\ell}_1$ и $\bar{\ell}_2$ (не используя смешанное произведение векторов).
28. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты уравнений прямой $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ чтобы эта прямая а) была параллельна оси Ox (оси Oy, оси Oz); б) пересекала ось Ox (ось Oy, ось Oz); в) совпадала с осью Ox (осью Oy, осью Oz).
29. Дана прямая $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ и плоскость $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$. С помощью рангов r и R матриц
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$

выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая: 1) пересекалась с плоскостью; 2) была параллельна плоскости; 3) лежала в плоскости.

30. Записать уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$ перпендикулярно плоскости $Ax+By+Cz+D=0$.
31. Записать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ на прямую $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$.
32. Записать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1;y_1;z_1)$ перпендикулярно прямой $\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0\\A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0\end{cases}$.
33. Даны точка M_0 с радиус-вектором $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}$ и плоскость $(\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{N}})+D=0$. Найти радиус-вектор точки M_1, симметричной точке M_0 относительно заданной плоскости.
34. Записать уравнение проекции прямой $\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}+t\cdot\bar{\ell}$, не перпендикулярной плоскости $(\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{N}})+D=0$ на эту плоскость.
35. Записать уравнение прямой, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}$ и пересекающей две скрещивающиеся прямые $\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}}+t_1\cdot\bar{\ell}_1$ и $\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}}+t_2\cdot\bar{\ell}_2$.
36. Записать уравнение общего перпендикуляра к двум скрещивающимся прямым $\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}}+t_1\cdot\bar{\ell}_1$ и $\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}}+t_2\cdot\bar{\ell}_2$.
37. Прямая $\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}+t\cdot\bar{\ell}$ и плоскость $(\bar{\mathbf{r}},\bar{\mathbf{N}})+D=0$ не параллельны. Точка M лежит на прямой на расстоянии d от плоскости. Найти радиус вектор точки M .
38. Запишите векторное уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{0}}$ перпендикулярно двум неколлинеарным векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$.

39. Доказать, что произведение расстояний от любой дочки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.
40. Найти наибольший радиус окружности, лежащей внутри параболы $y^2=2px$ и касающейся параболы в ее вершине.
41. Доказать, что если две гиперболы имеют общие асимптоты и лежат в одной и той же паре вертикальных углов, образованных их асимптотами, то их эксцентриситеты равны между собой.
42. Доказать, что если две гиперболы имеют общие асимптоты и лежат в разных парах вертикальных углов, образованных их асимптотами, то

произведение их эксцентриситетов больше или равно 2, причем это произведение равно 2 только для равносторонних гипербол.

43. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус эллипса делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная (Указание: использовать полярное уравнение кривой).
44. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус гиперболы делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная (Указание: использовать полярное уравнение кривой).
45. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус параболы делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная (Указание: использовать полярное уравнение кривой).
46. Через точку гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ проведены две прямые, параллельные асимптотам. Доказать, что площадь параллелограмма, образованного этими прямыми и асимптотами гиперболы есть величина постоянная, равная $\frac{ab}{2}$.
47. Доказать, что точки пересечения эллипсов $n^2x^2+m^2y^2-m^2n^2=0$ и $m^2x^2+n^2y^2-m^2n^2=0$ (где $m \neq n$) лежат на окружности. Указать центр и радиус этой окружности.
48. Доказать, что расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ до ее асимптоты равно b.
49. Доказать, что длина отрезка, соединяющего центр эллипса с произвольной его точкой, заключена между длинами полуосей этого эллипса.
50. Доказать, что произведение расстояний от фокусов эллипса до касательной, проведенной к эллипсу в любой точке M_0, равно квадрату малой полуоси.
51. Записать уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиуса R в векторной форме.
52. Если M – отличная от начала координат точка на конусе $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$, то все точки прямой OM также лежат на конусе.