Упражнения по теме

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

1. Доказать тождество:

а) $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})\cdot(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{z}}) = \begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{y}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{z}},\bar{\mathbf{c}}) \end{vmatrix}$;

б) $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})^2 = \begin{vmatrix} (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}) \\ (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{b}}) & (\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{c}}) \end{vmatrix}$.

2. Доказать, что $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \le \sqrt{(a_1^2+a_2^2+a_3^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\cdot(c_1^2+c_2^2+c_3^2)}$

3. Даны ненулевой вектор $\bar{\mathbf{a}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{a}}) = p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно).
Ответ: $\bar{\mathbf{x}} = p\bar{\mathbf{a}}/|\bar{\mathbf{a}}|^{\mathbf{2}}$.

4. Даны два вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Представить вектор $\bar{\mathbf{b}}$ в виде суммы двух векторов $\bar{\mathbf{x}}$ и $\bar{\mathbf{y}}$, так, чтобы вектор $\bar{\mathbf{x}}$ был коллинеарен вектору $\bar{\mathbf{a}}$, а вектор $\bar{\mathbf{y}}$ был ортогонален вектору $\bar{\mathbf{a}}$.

5. Даны два неколлинеарных вектора $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$. Найти вектор $\bar{\mathbf{x}}$, компланарный векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ и удовлетворяющий условиям $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{x}}) = 1$, $(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

6. Даны три некомпланарных вектора $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$. Найти вектор $\bar{\mathbf{x}}$, удовлетворяющий системе уравнений $(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{x}}) = \alpha$, $(\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{x}}) = \beta$, $(\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{x}}) = \gamma$.
Ответ: $\bar{\mathbf{x}} = \dfrac{\alpha[\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}}] + \beta[\bar{\mathbf{c}},\bar{\mathbf{a}}] + \gamma[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]}{(\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}},\bar{\mathbf{c}})}$.

7. Даны неколлинеарные векторы $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}) = p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно).
Ответ: $\bar{\mathbf{x}} = p[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]/|[\bar{\mathbf{a}},\bar{\mathbf{b}}]|^2$.

8. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{c}}$, удовлетворяющие условию $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]+[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]+[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]=\overline{\mathbf{0}}$, компланарны.

9. Векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ удовлетворяют условию $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{c}}=\overline{\mathbf{0}}$. Доказать, что $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]=[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]$.

10. Доказать, что если три вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ попарно неколлинеарные и $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]=[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]$, то они удовлетворяют соотношению $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{c}}=\overline{\mathbf{0}}$. (Подсказка: покажите сначала, что векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ компланарны).

11. Даны произвольные векторы $\overline{\mathbf{p}}$, $\overline{\mathbf{q}}$, $\overline{\mathbf{r}}$, $\overline{\mathbf{n}}$. Доказать, что векторы $\overline{\mathbf{a}}=[\overline{\mathbf{p}},\overline{\mathbf{n}}]$, $\overline{\mathbf{b}}=[\overline{\mathbf{q}},\overline{\mathbf{n}}]$ и $\overline{\mathbf{c}}=[\overline{\mathbf{r}},\overline{\mathbf{n}}]$ компланарны.

12. Доказать, что если векторы $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]$, $[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]$, $[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]$ компланарны, то они коллинеарны.

13^0. Три вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ связаны соотношением $\overline{\mathbf{a}}=[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]$, $\overline{\mathbf{b}}=[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]$, $\overline{\mathbf{c}}=[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]$. Найти длины векторов и углы между ними.
Ответ: векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину.

14. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням тетраэдра, равных по модулю площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противолежащих граням, равна нулю.

15. Могут ли отличные от нуля числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2. z_3 удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0 \\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=0 \\ x_3x_2+y_3y_2+z_3z_2=0 \\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0 \end{cases}$$

16. Даны три некомпланарных вектора $\overline{\mathbf{OA}}=\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{OB}}=\overline{\mathbf{b}}$, $\overline{\mathbf{OC}}=\overline{\mathbf{c}}$, отложенных от одной точки O. Выразить через $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ вектор $\overline{\mathbf{OH}}$, где H – ортогональная проекция точки O на плоскость ABC.
Ответ: $\overline{\mathbf{OH}}=\dfrac{(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})}{([\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]+[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]+[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}])^2}\cdot\left([\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]+[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]+[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]\right)$.

17. Решить уравнение $[\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}]x + [\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}]y + [\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}]z + \overline{\mathbf{d}} = \overline{\mathbf{0}}$.

Ответ: $x = -(\overline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{a}})/(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$, $y = -(\overline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{b}})/(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$, $z = -(\overline{\mathbf{d}}, \overline{\mathbf{c}})/(\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}})$.

18. Доказать тождество $([\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}], [\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{d}}]) = \begin{vmatrix} (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) & (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{d}}) \\ (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) & (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{d}}) \end{vmatrix}$.

19. Доказать, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ равна

$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) \\ (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}) \end{vmatrix}}.$$

20. Доказать, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ равен

$$V = \sqrt{\begin{vmatrix} (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{a}}, \overline{\mathbf{c}}) \\ (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{b}}, \overline{\mathbf{c}}) \\ (\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{c}}, \overline{\mathbf{c}}) \end{vmatrix}}.$$

Упражнения по теме:
ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

1. Какие из следующих множеств образуют подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^n$:
   а) $M_1 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0\}$;
   б) $M_2 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1\}$;
   в) $M_3 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_n = 0\}$;
   г) $M_4 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 = 1\}$;
   д) $M_5 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_n\}$;
   е) $M_6 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_n = 0\}$;
   ж) $M_7 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 \cdot \alpha_n = 0\}$;
   з) $M_8 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 - \alpha_2 - \ldots - \alpha_n = 0\}$
   и) $M_9 = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots = 0\}$;
   к) $M_{10} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n\}$;
   л) $M_{11} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_2 = \alpha_4 = \alpha_6 = \ldots\}$;
   м) $M_{12} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) | \alpha_i \in \mathbb{Z},\ \forall i\}$.

2. Какие из следующих множеств образуют подпространство линейного пространства $V^{(3)}$:
   а) множество свободных векторов пространства, координаты которых в декартовом базисе – целые числа;
   б) множество свободных векторов пространства, параллельных оси Ox;
   в) множество радиус-векторов, концы которых лежат на фиксированной прямой;
   г) множество радиус-векторов, концы которых лежат в первой и третьей четверти;
   д) множество векторов, образующих с данным ненулевым вектором угол α.

3. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n[x]$ рассматриваются множества многочленов, удовлетворяющих условиям:
   а) $f(0) = 0$; б) $f(1) = 0$; в) $f(0) = f(1) = 0$.
   Докажите, что каждое из этих подмножеств является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$ и найдите его размерность.

4. Докажите, что пересечение двух подпространств линейного пространства снова является подпространством этого пространства.

5. Пусть L_1 и L_2 – подпространства линейного пространства L. Суммой подпространств L_1 и L_2 (обозначают $L_1 + L_2$) называется подмножество L, элементы которого могут быть записаны в виде $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$, где $\mathbf{x}_1 \in L_1$, $\mathbf{x}_2 \in L_2$. Доказать, что $L_1 + L_2$ тоже является подпространством линейного пространства L.

6. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ – векторы линейного пространства, α, β – числа. Доказать, что $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\alpha = \beta$ или $\mathbf{x} = \mathbf{y}$.

7. Доказать, что если некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима.

8. Доказать, что если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.

9. Может ли система векторов быть линейно зависимой, если любая ее подсистема линейно независима?

10. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ – линейно независимая система векторов. Будет ли линейно независимой система векторов $\mathbf{x} - \mathbf{y}$, $\mathbf{y} - \mathbf{z}$, $\mathbf{z} - \mathbf{x}$?
   Ответ: нет.

11. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ – линейно независимая система векторов. Доказать, что векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ также линейно независимы.

12. Доказать, что если векторы $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{z}$ линейного пространства над $\mathbb{R}$ линейно независимы, то векторы $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} + \mathbf{z}$, $\mathbf{y} + \mathbf{z}$ тоже линейно независимы.

13. Какому условию должно удовлетворять число α, чтобы векторы $\mathbf{a}_1 = (\alpha, 1, 0)$, $\mathbf{a}_2 = (1, \alpha, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 1, \alpha)$ пространства $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимыми?
   Ответ: $\alpha^3 - 2\alpha = 0$.

14. Какому условию должны удовлетворять числа α, β, γ, чтобы векторы $\mathbf{a}_1 = (1, \alpha, \alpha^2)$, $\mathbf{a}_2 = (1, \beta, \beta^2)$, $\mathbf{a}_3 = (1, \gamma, \gamma^2)$ пространства $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимыми?
   Ответ: хотя бы два из трех чисел α, β, γ должны быть равны.

15. Векторы $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ – линейно зависимы и вектор $\mathbf{a}_3$ не является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$. Доказать, что векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ различаются лишь числовым множителем.

16(*). Исследовать на линейную зависимость систему векторов:
а) e^x, e^{2x}, e^{3x} $(x \in (-\infty;+\infty))$;
б) e^x, shx . chx $(x \in (-\infty;+\infty))$;
в) $\frac{1}{x}$, x, 1 $(x \in (0;1))$;
г) 1, tgx , $ctgx$ $(x \in \left(0;\frac{\pi}{2}\right))$.

17. Доказать, что линейный оператор пространства L всегда переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.

18. Докажите, что если $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – собственные векторы линейного оператора φ, относящиеся к различным собственным значениям, то вектор $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ $(\alpha \neq 0,\ \ \beta \neq 0)$ не является собственным вектором оператора φ.

19. Пусть φ – оператор, действующий из L в V. Ядром оператора φ называется множество $Ker\,\varphi = \{\mathbf{x} \in L \mid \varphi\,\mathbf{x} = \mathbf{o}\}$. Доказать, что ядро оператора является подпространством линейного пространства L .Найти ядро оператора дифференцирования в пространстве многочленов.

20. Доказать, что если φ – линейный оператор, то $\varphi\,\mathbf{o} = \mathbf{o}$.