УПРАЖНЕНИЯ ПО ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЕ

1. Как изменится произведение AB матриц A и B, если:
   а) переставить i-ю и j-ю строки матрицы A?
   б) переставить i-й и j-й столбцы матрицы B?
   в) к i-й строке матрицы A прибавить ее j-ю строку, умноженную на число c?
   в) к i-му столбцу матрицы B прибавить ее j-й столбец, умноженный на число c?
2. Доказать, что если матрица B перестановочна с матрицей A, то она перестановочна и с матрицей $A-\lambda E$ (где λ – любое отличное от нуля число).
3. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равен нулевой матрице.
4. Найти все матрицы второго порядка, квадрат которых равен единичной матрице.
5. Следом квадратной матрицы A (обозначают trA) называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е.
   $$trA = a_{11} + a_{22} \ldots + a_{nn}.$$
   Доказать, что $trAB = trBA$.
6. Определить число инверсий в перестановках:
   а) $1, 4, 7, \ldots, 3n-2, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n$;
   б) $3, 6, 9, \ldots, 3n, 2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2$;
   в) $2, 5, 8, \ldots, 3n-1, 3, 6, 9, \ldots, 3n, 1, 4, 7, \ldots, 3n-2$;
   г) $1, 5, \ldots, 4n-3, 2, 6, \ldots, 4n-2, 3, 7, \ldots, 4n-1, 4, 8, \ldots, 4n$.
7. Сколько инверсий образует число 1, стоящее на k-м месте перестановки?
8. В какой перестановке чисел $1, 2, \ldots, n$ число инверсий наибольшее и чему оно равно?
9. Выбрать значения i и k так, чтобы произведение $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ входило в определитель 6-го порядка со знаком минус.
10. Найти члены определителя 4-го порядка, содержащие элемент a_{32} и входящие в определитель со знаком плюс.
11. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов главной диагонали?
12. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

13. С каким знаком входит в определитель порядка n произведение элементов побочной диагонали?
14. Пользуясь только определением, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 & a_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3,n-2} & a_{3,n-1} & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-2} & a_{2,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

15. Доказать, что для равенства нулю определителя второго порядка необходимо и достаточно, чтобы его строки (столбцы) были пропорциональны (если некоторые элементы определителя равны нулю, то пропорциональность можно понимать в том смысле, что элементы одной строки получаются из соответствующих элементов другой строки умножением на одно и то же число, быть может, равное нулю).
16. Что можно сказать об определителе порядка n, в котором более чем $n^2 - n$ элементов равны нулю?
17. Элементы матрицы равны ± 1. Доказать, что ее определитель – число четное.
18. Элементы матрицы третьего порядка равны ± 1. Может ли ее определитель быть равен 6?
19. Элементы матрицы третьего порядка равны 1, -1, и 0. Может ли ее определитель быть равен 5?
20. Элементы матрицы 4-го порядка равны 1, -1, и 0. Может ли ее определитель быть равен 24?
21. Элементы матрицы третьего порядка равны ± 1. Найти наибольшее значение, которое может принимать ее определитель.
22. Элементы матрицы третьего порядка равны 1 или 0. Найти наибольшее значение, которое может принимать ее определитель.
23. Как изменится определитель третьего порядка, если у всех его элементов изменить знак? Как изменится определитель порядка n, если у всех его элементов изменить знак?
24. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент умножить на число α?

25. Как изменится определитель, если каждый его элемент a_{ij} умножить на λ^{i-j}, где $\lambda \neq 0$.

26. Как изменится определитель четвертого порядка, если у элементов 1-го и 2-го столбца изменить знак на противоположный, а элементы 3-й и 4-й строки умножить на 2.

27. Числа 3587, 5117, 7293, 9027 делятся на 17. Не вычисляя определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 8 & 7 \\ 5 & 1 & 1 & 7 \\ 7 & 2 & 9 & 3 \\ 9 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$$

доказать, что он тоже делится на 17.

28. Квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется *кососимметрической*, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ji}$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.

29. Определитель $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ равен D. Чему равен определитель $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{vmatrix}$?

30. Как изменится определитель порядка n если его строки переписать в обратном порядке?

31. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

32. Как изменятся дополнительные миноры элементов матрицы третьего порядка, если у всех элементов матрицы изменить знак.

33. Как изменятся дополнительные миноры элементов матрицы четвертого порядка, если у всех элементов матрицы изменить знак.

34. Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители, предварительно преобразовав их:

а) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -5 \\ 4 & -2 & 7 & 8 & -7 \\ -6 & 4 & -9 & -2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 1 & -2 \\ -2 & 6 & 5 & 4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 5 & -5 & -3 & 4 & 2 \\ -4 & 4 & 3 & 6 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & -9 & -5 \\ -7 & 7 & 6 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & -2 \end{vmatrix}$.

35.Известно, что $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = A$, $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = B$. Найти

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{12} & 0 & \dots & a_{1n} & 0 \\ 0 & b_{11} & 0 & b_{12} & \dots & 0 & b_{1n} \\ a_{21} & 0 & a_{22} & 0 & \dots & a_{2n} & 0 \\ 0 & b_{21} & 0 & b_{22} & \dots & 0 & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & a_{n2} & 0 & \dots & a_{nn} & 0 \\ 0 & b_{n1} & 0 & b_{n2} & \dots & 0 & b_{nn} \end{vmatrix}$$

36.Найти связь между определителем матрицы A порядка n и определителем матрицы порядка $2n$, составленной следующим образом

а) $\begin{pmatrix} A & -A \\ A & A \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} A & -A \\ -A & A \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2A & 3A \\ A & 2A \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & 5A \end{pmatrix}$.

37.Доказать, что если в определителе порядка n все миноры порядка k $(k < n)$ равны нулю, то равны нулю и все миноры порядка выше k.

38.Вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{vmatrix}$

в) $\begin{vmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{vmatrix}$;

д) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \dots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \dots & 2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 \end{vmatrix}$; е) $\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x \end{vmatrix}$.

39. Найти определитель порядка n, элементы которого заданы условиями:

а) $a_{ij} = \min(i,j)$; б) $a_{ij} = \max(i,j)$; в) $a_{ij} = |i-j|$.

40. Решить уравнения:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \dots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^n \end{vmatrix} = 0$.

41. Найти значения λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при этих значениях λ и чему он равен при других значениях λ?

42. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях λ?

43. Что можно сказать о матрице размера $m \times n$ $(m < n)$ и ранга m, если в ней имеется лишь один базисный минор?

44. Доказать, что приписывание к матрице одной строки (или одного столбца) либо не изменяет ее ранга, либо увеличивает его на единицу.

45. Как может изменится ранг матрицы, если изменить значение одного ее элемента?

46. Указать возможные значения ранга матрицы вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{m-1,n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m,n-1} & a_{mn} \end{pmatrix}$$

47. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A переставить i-ю и j-ю строки?

48. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A i-ю строку умножить на число $\lambda \neq 0$?

49. Выразите через определитель матрицы A определитель ее союзной матрицы.

50. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$

51. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

и два решения этой системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, как в данной системе и имеющую решением

а) сумму решений: $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$;

б) произведение первого из данных решений на число λ:

$$\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n.$$

52. При каком условии линейная комбинация решений системы линейных неоднородных уравнений снова будет решением этой системы?

53. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы либо сумма двух решений, либо произведение одного решения на число $\lambda \neq 1$ было снова решением той же системы линейных уравнений.

54. Что можно сказать о системе m линейных неоднородных уравнений с n неизвестными, если все столбцы ее расширенной матрицы кроме первого пропорциональны? (совместна или нет? Если совместна, то определена или неопределена; можно ли указать значение каких-либо неизвестных?)

55. Исследовать систему и найти решение в зависимости от значения параметра λ:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 5, \\ x_1 - 6x_2 - 9x_3 - 20x_4 = -11, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4, \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 7. \end{cases}$

56. Доказать, что если ранг системы линейных однородных уравнений на единицу меньше числа неизвестных, то любые два решения этой системы пропорциональны, т.е. отличаются лишь числовым множителем.

57. Исследовать уравнение $AX = O$, где A – данная, X – искомая матрицы второго порядка.

58. Составить однородное уравнение с тремя неизвестными, решениями которого являются линейные комбинации решений $(1; 1; 2)$ и $(1; 2; 3)$.

59. Найти систему линейных однородных уравнений, состоящую из а) двух уравнений; б) из трех уравнений, для которой решения $(1; 4; -2; 2; -1)$, $(3; 13; -1; 2; 1)$, $(2; 7; -8; 4; -5)$ являются фундаментальной системой решений.

60. Указать все значения параметра λ, при которых система уравнений не определена:

а) $\begin{cases} (8-\lambda)x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + (9-\lambda)x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + (10-\lambda)x_3 + \lambda x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \lambda x_4 = 0. \end{cases}$

б) $\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 + 2\lambda x_3 + 2\lambda x_4 = 0, \\ (-1+\lambda)x_1 + (2-2\lambda)x_2 - 2\lambda x_3 - 2\lambda x_4 = 0, \\ (1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 + (2+\lambda)x_3 + (1+2\lambda)x_4 = 0, \\ (-1+\lambda)x_1 - \lambda x_2 - 2\lambda x_3 + (2-3\lambda)x_4 = 0. \end{cases}$