ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ
по математике

Раздел 1. Линейная алгебра

1. Определение матрицы, линейные операции над матрицами (определение и свойства), нелинейные операции над матрицами (определение и свойства).
2. Определение определителя. По определению получить формулы для вычисления определителя 2-го и 3-го порядка.
3. Сформулируйте все свойства определителей. Докажите, что
   а) при транспонировании матрицы ее определитель не меняется;
   б) общий элемент строки (столбца) можно выносить за знак определителя;
   в) определитель можно представить в виде суммы определителей, если его строка (столбец) состоит из сумм элементов;
   г) достаточные условия равенства нулю определителя;
   д) определитель не изменится, если к каждому элементу i-й строки (столбца) прибавить соответствующий элемент k-й строки (столбца), умноженный на число $\alpha \neq 0$.
4. Определение минора матрицы. Дополнительный минор и алгебраическое дополнение минора (элемента).
5. Теорема Лапласа и ее следствия (2-е следствие – доказать).
6. Базисный минор и ранг матрицы. Окаймляющий минор. Нахождение ранга матрицы методом окаймляющих миноров.
7. Базисный минор и ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы. Нахождение ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.
8. Определение линейного уравнения, система линейных уравнений (в развернутом виде и в матричной форме). Определение решения системы линейных уравнений, совместные, несовместные, определенные и неопределенные системы. Критерий совместности и определенности системы.
9. Определение обратной матрицы. Свойства обратной матрицы (с доказательствами). Достаточное условие существования обратной матрицы (с доказательством)
10. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений (получить формулу).
11. Формулы Крамера (с доказательством).
12. Элементарные преобразования системы линейных уравнений. Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.
13. Системы линейных однородных уравнений, теорема о линейной комбинации конечного числа решений СЛОУ (доказать), фундаментальная система решений.
14. Теорема о связи решений системы линейных неоднородных уравнений и решений соответствующей СЛОУ (доказать).

Раздел 2. Векторная алгебра. Линейные пространства и операторы

1. Определение вектора, его длины, нулевой вектор, основные отношения на множестве векторов (равные, коллинеарные, сонаправленные, противоположно направленные, компланарные, ортогональные векторы).
2. Линейные операции на множестве свободных векторов и их свойства.
3. Линейное пространство: определение, примеры, простейшие свойства (доказать)
4. Подпространство линейного пространства: определение, критерий (доказать), примеры.
5. Понятие линейной зависимости и независимости. Необходимое и достаточное условие линейной зависимости векторов (доказать).
6. Базис: определение, теорема о количестве векторов в разных базисах (без доказательства), размерность линейного пространства, теорема о базисе (доказать). Базис пространства свободных векторов плоскости (пространства) (доказать).
7. Координаты вектора: определение, геометрический смысл координат свободного вектора плоскости (пространства) (доказать), координаты суммы векторов и произведения вектора на число (доказать), связь координат вектора в разных базисах (доказать).
8. Простейшие задачи векторной алгебры: нахождение координат вектора по известным декартовым координатам начала и конца, нахождение длины вектора по его координатам в декартовом прямоугольном базисе.
9. Орт вектора: определение, нахождение. Геометрический смысл координат орта.
10. Деление отрезка в заданном отношении: определение, вывод формулы.
11. Скалярное произведение: определение, свойства. Доказать:
    а) скалярный множитель можно выносить за знак скалярного произведения;
    б) скалярное произведение расписывается на сумму, если один из векторов является суммой двух;
    в) критерий перпендикулярности векторов;
    г) формулу, выражающую скалярное произведение через декартовы координаты векторов.
12. Векторное произведение: определение, свойства. Доказать:
    а) скалярный множитель можно выносить за знак векторного произведения;
    б) критерий коллинеарности векторов;
    в) формулу, выражающую векторное произведение через декартовы координаты векторов.
13. Смешанное произведение векторов: определение, свойства. Доказать:
    а) критерий компланарности векторов;
    б) критерий правой тройки;

в) геометрический смысл смешанного произведения;
г) формулу, выражающую смешанное произведение через декартовы координаты векторов.

14. Определение оператора и линейного оператора. Примеры. Доказать, что линейный оператор пространства переводит нулевой элемент в нулевой.
15. Определение матрицы линейного оператора конечномерного пространства. Связь между координатами вектора и его образа (доказать). Связь матриц линейного оператора в разных базисах (доказать).
16. Определение собственного вектора оператора. Свойства собственных векторов. Доказать, что
    а) каждый собственный вектор оператора относится к единственному собственному значению,
    б) линейная комбинация собственных векторов, относящихся к одному собственному значению, тоже является собственным вектором, относящимся к тому же собственному значению.
17. Определение диагонализируемого оператора. Доказать теорему о том, когда матрица оператора имеет диагональный вид. Критерий диагонализируемости оператора.
18. Нахождение собственных векторов и собственных значений линейного оператора.

Раздел 3. Аналитическая геометрия

1. Определение линии на плоскости. Общее уравнение прямой на плоскости (вывод). Исследование общего уравнения прямой на плоскости.
2. Параметрические и каноническое уравнения прямой на плоскости (вывод). Уравнение прямой, проходящей через две точки (вывод). Уравнение прямой с угловым коэффициентом (вывод).
3. Взаимное расположение прямых на плоскости (вывести критерии параллельности прямых, формулу для нахождения угла между прямыми, критерий перпендикулярности прямых в случае, когда прямые заданы общими уравнениями и уравнениями с угловым коэффициентом). Применить критерий к заданной в билете задаче.
4. Расстояние от точки до прямой на плоскости (вывод формулы, применение к заданной в билете задаче).
5. Определение поверхности в пространстве. Общее уравнение плоскости (вывод). Исследование полного общего уравнения плоскости.
6. Уравнение плоскости, проходящей через точку параллельно двум неколлинеарным векторам (вывод). Уравнение плоскости, проходящей через три точки (вывод).
7. Взаимное расположение плоскостей (получить критерий параллельности плоскостей и вывести формулу для нахождения угла между плоскостями). Применить к заданной в билете задаче.

8. Расстояние от точки до плоскости (вывод формулы, применение к заданной в билете задаче).
9. Определение линии в пространстве. Общие уравнения прямой в пространстве. Канонические и параметрические уравнения прямой в пространстве (вывод). Переход от общих уравнений прямой к каноническим (показать на примере заданной в билете задачи).
10. Взаимное расположение прямых в пространстве (вывести все критерии). Применить к заданной в билете задаче.
11. Угол между пересекающимися и скрещивающимися прямыми в пространстве (вывести формулу, применить к заданной в билете задаче).
12. Расстояние между параллельными прямыми в пространстве (вывести формулу, применение к заданной в билете задаче).
13. Расстояние между скрещивающимися прямыми (определение и как найти, применение к заданной в билете задаче).
14. Взаимное расположение прямой и плоскости (вывести все критерии, применить к заданной в билете задаче).
15. Угол между прямой и плоскость (определение и вывод формулы, применение к заданной в билете задаче).
16. Невырожденные кривые второго порядка (эллипс, окружность, гипербола и парабола): определение, вывод канонического уравнения и его исследование, построение в канонической системе координат.
17. Эксцентриситет и директрисы эллипса и гиперболы. Теорема об отношении фокального радиуса точки к расстоянию до директрисы (доказать). Общее определение эллипса, гиперболы и параболы.
18. Полярное уравнение эллипса, параболы и ветки гиперболы (вывести).
19. Определение поверхности в пространстве. Невырожденные поверхности второго порядка (эллипсоид, сфера, гиперболоиды, конус параболоиды): определение, исследование канонического уравнения, построение.
20. Определение поверхности в пространстве. Цилиндры: определение, уравнение, построение.

Раздел 4. Введение в анализ

1. Функция: определение, способы задания, классификация, основные характеристики поведения функции.
2. Определение числовой последовательности и ее предела, геометрическая интерпретация предела последовательности. Доказать следующие утверждения:
   а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ (по определению, для заданной последовательности x_n);
   б) последовательность может иметь не более одного предела;
   в) сходящаяся последовательность ограничена;
   г) теорему о роли бесконечно малых последовательностей;

д) произведение бесконечно малой и ограниченной последовательности является бесконечно малой последовательностью;
е) предел суммы последовательностей равен сумме пределов слагаемых;
ж) если все члены последовательности неотрицательны (положительны), то ее предел – неотрицательный;
з) лемму о двух милиционерах для последовательностей.

3. Теорема Вейерштрасса (доказать). С помощью теоремы Вейерштрасса доказать, что последовательность $\{x_n\} = \left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ сходится.
4. Определение бесконечно большой последовательности и ее геометрическая интерпретация. Доказать следующие утверждения:
   а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ (по определению, для заданной последовательности x_n);
   б) связь бесконечно больших и бесконечно малых последовательностей;
   в) сумма двух бесконечно больших последовательностей одного знака является бесконечно большой того же знака;
   г) сумма бесконечно большой и ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью;
   д) произведение двух бесконечно больших последовательностей является бесконечно большой последовательностью;
   е) произведение бесконечно большой и отделимой от нуля ограниченной последовательности является бесконечно большой последовательностью;
   ж) если $\{x_n\}$ – бесконечно большая и $|x_n| \le |y_n|$ $(|x_n| < |y_n|)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, то $\{y_n\}$ тоже является бесконечно большой;
5. Определение функции и ее предела по Коши и по Гейне, их связь. Свойства пределов. Доказать следующие утверждения:
   а) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$ (по определению, для заданной функции $f(x)$);
   б) функция, имеющая предел при $x \to x_0$, ограничена в некоторой окрестности точки x_0;
   в) теорема о роли бесконечно малых функций;
   г) формула замены переменной в пределе.
6. Определение бесконечно большой функции (на языке $\varepsilon - \delta$ и на языке последовательностей). Свойства бесконечно больших функций. Докажите по определению бесконечно большой функции, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$ (для заданной функции $f(x)$).
7. Односторонние пределы. Теорема о существование $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ (доказать).
8. Первый замечательный предел (доказать), его следствия (доказать).

9. Второй замечательный предел (без доказательства), его следствия (доказать).
10. Сравнение бесконечно малых функций. Теоремы о замене бесконечно малых на эквивалентные и о главной части бесконечно малой (обе доказать).
11. Сравнение бесконечно больших функций. Теоремы о замене бесконечно больших на эквивалентные и о главной части бесконечно большой (обе доказать).
12. Сформулируйте все определения непрерывной функции. Докажите по определению, что функция $y = \sin x$ непрерывна в любой точке области определения.
13. Определение точки разрыва, их классификация. Найти точки разрыва функции конкретной функции $f(x)$ и определить их тип.
14. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема Вейерштрасса (без доказательства), теорема Коши (доказать), следствия теорем Коши и Вейерштрасса (без доказательства).

Раздел 5. Дифференциальное исчисление

1. Определение производной, Найти по определению производные функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, a^x, $\ln x$, $\log_a x$. Доказать, что
   а) производная четной функции является функцией нечетной, а производная нечетной функции является функцией четной;
   б) производная периодической функции является функцией периодической, с тем же самым периодом.
2. Необходимое и достаточное условие существования производной, связь между существованием $f'(x_0)$ и непрерывностью функции $f(x)$ в точке x_0 (доказать), физический и геометрический (доказать) смысл производной.
3. Правила дифференцирования. Доказать утверждения:
   а) $C' = 0$;
   б) $(u \pm v)' = u' \pm v'$;
   в) $(u \cdot v)' = u'v + uv'$;
   г) теорему о производной обратной функции.
4. Используя правила дифференцирования и зная производные функций $\sin x$, $\cos x$, e^x, найти производные функций tgx, $ctgx$, shx, chx, thx, $cthx$. С помощью теоремы о производной обратной функции найти $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctgx$, $arcctgx$.
5. Определение дифференцируемой функции. Связь дифференцируемости функции с существованием производной (доказать).

6. Дифференциал функции. Геометрический смысл дифференциала (доказать). Свойства дифференциала (без доказательства). Показать инвариантность формы записи первого дифференциала. Используя дифференциал, доказать, что если α – мало, то $\sqrt[n]{1+\alpha}-1\sim\dfrac{\alpha}{n}$.
7. Производные высших порядков: определение, производные высших порядков для суммы, произведения (формула Лейбница). Показать применение формулы Лейбница на примере. Физический смысл второй производной.
8. Дифференциалы высших порядков: определение, связь с производными высших порядков, не инвариантность формы записи (показать на примере дифференциала второго порядка).
9. Теоремы Ролля, Лагранжа, Коши (все с доказательством). Доказать следствие теоремы Лагранжа.
10. Правило Лопиталя раскрытие неопределенностей вида $\dfrac{0}{0}$ и $\dfrac{\infty}{\infty}$ (доказать).
11. Формула Тейлора (вывести). Формула Маклорена.
12. Определение возрастающей и убывающей функции. Необходимое и достаточное условия возрастания (убывания) дифференцируемой функции (доказать).
13. Определение точки максимума (минимума) функции, максимум (минимум) функции. Необходимое условие экстремума функции (доказать). Достаточные условия экстремума функции (первое достаточное условие – доказать).
14. Определение выпуклой (вогнутой) кривой, точки перегиба. Необходимое и достаточное (доказать) условия выпуклости (вогнутости) кривой $y=f(x)$. Необходимое условие перегиба кривой. Достаточное условие перегиба кривой (доказать).
15. Определение асимптоты кривой. Необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты кривой $y=f(x)$ (доказать).
16. Определение асимптоты кривой. Необходимое и достаточное условие существования вертикальной асимптоты кривой $y=f(x)$ (доказать).

Раздел 4. ФНП

1. Определение функции нескольких переменных. n-мерное пространство и расстояние в n-мерном пространстве. Предел функции нескольких переменных. Непрерывность функции нескольких переменных. Аналог теорем Коши и Вейерштрасса для ФНП (без доказательства).
2. Определение частной производной. Геометрический смысл частных производных функции двух переменных.

3. Частные производные высших порядков. Условие независимости смешанной частной производной от последовательности дифференцирований (без доказательства).
4. Дифференцируемость ФНП: определение, необходимые (доказать) и достаточное (без доказательства) условия дифференцируемости ФНП.
5. Дифференциал ФНП: определение, геометрический смысл дифференциала функции двух переменных.
6. Дифференциалы высших порядков функции нескольких переменных. Связь дифференциала n-го порядка и n-х частных производных (без доказательства).
7. Частные производные сложной функции (доказать).
8. Дифференциал ФНП: определение, инвариантность формы записи первого дифференциала (доказать). Неинвариантность формы записи дифференциалов высших порядков ФНП (показать на примере дифференциала 2-го порядка функции 2-х переменных).
9. Неявные функции: теорема существования (без доказательства), дифференцирование неявно заданных функций одной и нескольких переменных (получить формулы).
10. Формула Тейлора для ФНП (получить). Формула Маклорена.
11. Определение точки максимума (минимума) ФНП, и максимум (минимум) ФНП. Необходимое (доказать) условие экстремума ФНП. Достаточное условие экстремума функции n переменных. Достаточное условие экстремума функции 2-х переменных.
12. Условный экстремум: определение, нахождение.
13. Производная по направлению: определение, физический смысл, вычислительная формула (доказать).
14. Градиент: определение, свойства (доказать).

УПРАЖНЕНИЯ К ЭКЗАМЕНУ
по математике

Раздел 1. Линейная алгебра

1. Следом квадратной матрицы A (обозначают trA) называют сумму ее элементов, стоящих на главной диагонали, т.е. $trA = a_{11} + a_{22} \ldots + a_{nn}$. Доказать, что $tr(AB) = tr(BA)$.
2. Как изменится определитель порядка n, если каждый его элемент умножить на число α?
3. Как изменится определитель, если каждый его элемент a_{ij} умножить на λ^{i-j}, где $\lambda \neq 0$.
4. Как изменится определитель порядка n если его строки переписать в обратном порядке?
5. Элементы матрицы равны ± 1. Доказать, что ее определитель – число четное.
6. Элементы матрицы третьего порядка равны ± 1. Может ли ее определитель быть равен 6?
7. Квадратная матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ называется ***кососимметрической***, если ее элементы удовлетворяют условию $a_{ij} = -a_{ji}$. Доказать, что определитель кососимметрической матрицы нечетного порядка равен нулю.
8. Найти определитель порядка n, элементы которого заданы условиями: а) $a_{ij} = \min(i, j)$; б) $a_{ij} = \max(i, j)$.
9. Решить уравнения:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & n-x \end{vmatrix} = 0; \quad \text{б)} \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \ldots & x^n \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^n \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

10. Найти значения λ, при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет наименьший ранг. Чему равен ранг при этих значениях λ и чему он равен при других значениях λ?
11. Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях λ?
12. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A переставить i-ю и j-ю строки?

13. Как изменится обратная матрица A^{-1}, если в матрице A i-ю строку умножить на число $\lambda \neq 0$?
14. Выразите через определитель матрицы A определитель ее союзной матрицы.
15. Найти обратные матрицы для следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & \dots & a_2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n-1} & \dots & 0 & 0 \\ a_n & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

16. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

и два решения этой системы $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Найти систему линейных уравнений с теми же коэффициентами при неизвестных, как в данной системе и имеющую решением

а) сумму решений: $\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \dots, \alpha_n + \beta_n$;

б) произведение первого решения на число λ: $\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \dots, \lambda\alpha_n$.

17. При каком условии линейная комбинация решений системы линейных неоднородных уравнений снова будет решением этой системы?
18. Что можно сказать о системе m линейных неоднородных уравнений с n неизвестными, если все столбцы ее расширенной матрицы кроме первого пропорциональны? (совместна или нет? Если совместна, то определена или неопределена; можно ли указать значение каких-либо неизвестных?)
19. Составить однородное уравнение с тремя неизвестными, решениями которого являются линейные комбинации решений $(1;1;2)$ и $(1;2;3)$.
20. Найти систему линейных однородных уравнений, состоящую из двух уравнений; для которой решения $(1;4;-2;2;-1)$, $(3;13;-1;2;1)$, $(2;7;-8;4;-5)$ являются фундаментальной системой решений.

Раздел 2. Векторная алгебра. Линейные пространства и операторы

1. Доказать, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \le \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\cdot(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2)}.$$

2. Доказать тождество

$$(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})\cdot(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{z}})=\begin{vmatrix}(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{y}},\overline{\mathbf{c}})\\ (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{a}}) & (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{b}}) & (\overline{\mathbf{z}},\overline{\mathbf{c}})\end{vmatrix}.$$

3. Даны ненулевой вектор $\overline{\mathbf{a}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}})=p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно). **Ответ:** $\overline{\mathbf{x}}=p\overline{\mathbf{a}}/|\overline{\mathbf{a}}|^2$.
4. Даны два вектора $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$. Представить вектор $\overline{\mathbf{b}}$ в виде суммы двух векторов $\overline{\mathbf{x}}$ и $\overline{\mathbf{y}}$, так, чтобы вектор $\overline{\mathbf{x}}$ был коллинеарен вектору $\overline{\mathbf{a}}$, а вектор $\overline{\mathbf{y}}$ был ортогонален вектору $\overline{\mathbf{a}}$.
5. Даны неколлинеарные векторы $\overline{\mathbf{a}}$ и $\overline{\mathbf{b}}$ и скаляр p. Найти любое решение уравнения $(\overline{\mathbf{x}},\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}})=p$. (Подсказка: вектор характеризуется направлением и длиной; так как требуется найти любое решение, то одну из этих характеристик можно выбрать произвольно).
Ответ: $\overline{\mathbf{x}}=p[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]/|[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]|^2$.
6. Векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ удовлетворяют условию $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{c}}=\overline{\mathbf{0}}$. Доказать, что $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]=[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]$.
7. Доказать, что если три вектора $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ попарно неколлинеарные и $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]=[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]=[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]$, то они удовлетворяют соотношению $\overline{\mathbf{a}}+\overline{\mathbf{b}}+\overline{\mathbf{c}}=\overline{\mathbf{0}}$. (Подсказка: покажите сначала, что векторы $\overline{\mathbf{a}}$, $\overline{\mathbf{b}}$ и $\overline{\mathbf{c}}$ компланарны).
8. Доказать, что если векторы $[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]$, $[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]$, $[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]$ компланарны, то они коллинеарны.
9. Могут ли отличные от нуля числа x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2. z_3 удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0\\ x_1x_3+y_1y_3+z_1z_3=0\\ x_3x_2+y_3y_2+z_3z_2=0\\ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0\end{cases}$$

10. Решить уравнение $[\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}}]x+[\overline{\mathbf{c}},\overline{\mathbf{a}}]y+[\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}}]z+\overline{\mathbf{d}}=\overline{\mathbf{0}}$.
Ответ: $x=-(\overline{\mathbf{d}},\overline{\mathbf{a}})/(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})$, $y=-(\overline{\mathbf{d}},\overline{\mathbf{b}})/(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})$, $z=-(\overline{\mathbf{d}},\overline{\mathbf{c}})/(\overline{\mathbf{a}},\overline{\mathbf{b}},\overline{\mathbf{c}})$.
11. Какие из следующих множеств образуют подпространства линейного пространства $\mathbb{R}^n$:
а) $M_1=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=0\}$;
б) $M_2=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=1\}$;

в) $M_3=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_n=0\}$;
г) $M_4=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1=1\}$;
д) $M_5=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1=\alpha_n\}$;
е) $M_6=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1=\alpha_n=0\}$;
ж) $M_7=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1\cdot\alpha_n=0\}$;
з) $M_8=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n=0\}$
и) $M_9=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\ldots=0\}$;
к) $M_{10}=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n\}$;
л) $M_{11}=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_2=\alpha_4=\alpha_6=\ldots\}$;
м) $M_{12}=\{(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)|\alpha_i\in\mathbb{Z},\ \forall i\}$.

12. В линейном пространстве $\mathbb{R}^n[x]$ рассматриваются множества многочленов, удовлетворяющих условиям:
а) $f(0)=0$; *б)* $f(1)=0$; *в)* $f(0)=f(1)=0$.
Докажите, что каждое из этих подмножеств является подпространством линейного пространства $\mathbb{R}^n[x]$ и найдите его размерность.
13. Докажите, что пересечение двух подпространств линейного пространства снова является подпространством этого пространства.
14. Доказать, что если а) некоторая подсистема данной системы векторов линейно зависима, то и сама система линейно зависима; б) если система векторов линейно независима, то и любая ее подсистема линейно независима.
15. Пусть $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{z}$ – линейно независимая система векторов. Будет ли линейно независимой система векторов $\mathbf{x}-\mathbf{y}$, $\mathbf{y}-\mathbf{z}$, $\mathbf{z}-\mathbf{x}$? Будет ли линейно независимой система векторов $\mathbf{x}+\mathbf{y}$, $\mathbf{x}+\mathbf{z}$, $\mathbf{y}+\mathbf{z}$?
16. Какому условию должны удовлетворять числа α, β, γ, чтобы векторы $\mathbf{a_1}=(1,\alpha,\alpha^2)$, $\mathbf{a_2}=(1,\beta,\beta^2)$, $\mathbf{a_3}=(1,\gamma,\gamma^2)$ пространства $\mathbb{R}^3$ были линейно зависимыми?
Ответ: хотя бы два из трех чисел α, β, γ должны быть равны.
17. Векторы $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3}$ – линейно зависимы и вектор $\mathbf{a_3}$ не является линейной комбинацией векторов $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$. Доказать, что векторы $\mathbf{a_1}$ и $\mathbf{a_2}$ различаются лишь числовым множителем.
18. Доказать, что линейный оператор пространства L всегда переводит линейно зависимую систему векторов в линейно зависимую.
19. Докажите, что если x и y – собственные векторы линейного оператора φ, относящиеся к различным собственным значениям, то вектор $\alpha x+\beta y$ $(\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0)$ не является собственным вектором оператора φ.
20. Пусть φ – оператор, действующий из L в V. Ядром оператора φ называется множество $Ker\varphi=\{\mathbf{x}\in L\,|\,\varphi\,\mathbf{x}=\mathbf{o}\}$. Доказать, что ядро оператора является подпространством линейного пространства L.Найти ядро оператора дифференцирования в пространстве многочленов.

Раздел 3. Аналитическая геометрия

1. Даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$. С помощью рангов r и R матриц $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямые: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.
2. Даны две плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. С помощью рангов r и R матриц
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$
выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы плоскости: 1) пересекались; 2) были параллельны; 3) совпадали.
3. Дана прямая $\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$ и плоскость $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$.
С помощью рангов r и R матриц $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$ выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы прямая: 1) пересекалась с плоскостью; 2) была параллельна плоскости; 3) лежала в плоскости.
4. Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы три прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ а) имели единственную общую точку; б) образовывали треугольник.
5. Даны три плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0$. С помощью рангов r и R матриц
$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \; и \; \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}$$
выразить условия, необходимые и достаточные для того, чтобы
1) три плоскости имели одну общую точку;
2) три плоскости были различны и пересекались по одной прямой;
3) плоскости попарно пересекались и линия пересечения любых двух плоскостей была параллельна третьей стороне (т.е. плоскости образовывают «призму»).
4) две плоскости параллельны, а третья их пересекает;
5) три плоскости параллельны;
6) две плоскости совпадают, а третья их пересекает;
7) две плоскости совпадают, а третья – им параллельна;
8) три плоскости совпадали.

6. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка $M_0(x_0, y_0)$ лежала между двумя параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$.
7. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежала между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$.
8. Даны три параллельные прямые: $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$, $Ax + By + C_3 = 0$. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вторая прямая лежала в полосе, образованной первой и третьей прямыми.
9. Даны три параллельные плоскости: $Ax + By + Cz + D_1 = 0$, $Ax + By + Cz + D_2 = 0$, $Ax + By + Cz + D_3 = 0$. Найдите условия, необходимые и достаточные для того, чтобы вторая плоскость лежала в полосе, образованной первой и третьей плоскостями.
10. Найти расстояние d между двумя параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$ и $Ax + By + C_2 = 0$.
11. Найти расстояние d между двумя параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$.
12. Записать уравнения прямых, параллельных прямой $Ax + By + C = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии d.
13. Записать уравнения плоскостей, параллельных плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и отстоящих от нее на расстоянии d.
14. Запишите векторное уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку M_0 с радиус-вектором $\bar{\mathbf{r}}_0$ перпендикулярно двум неколлинеарным векторам $\bar{\mathbf{a}}$ и $\bar{\mathbf{b}}$.
15. Доказать, что произведение расстояний от любой дочки гиперболы до ее асимптот есть величина постоянная.
16. Доказать, что если две гиперболы имеют общие асимптоты и лежат в одной и той же паре вертикальных углов, образованных их асимптотами, то их эксцентриситеты равны между собой.
17. Доказать, что сумма обратных величин отрезков, на которые фокус эллипса (гиперболы, параболы) делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная (Указание: использовать полярное уравнение кривой).
18. Доказать, что расстояние от фокуса гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ до ее асимптоты равно b.
19. Записать уравнение сферы с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и радиуса R в векторной форме.
20. Если M – отличная от начала координат точка на конусе $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, то все точки прямой OM также лежат на конусе.