

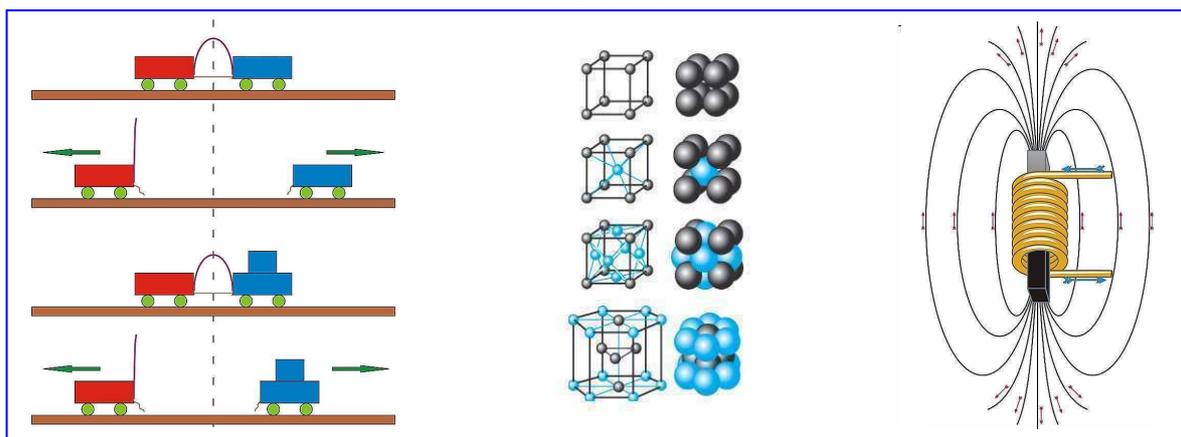
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования  
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

Е.В. Полицинский

# Лекции по физике

ЧАСТЬ 1



Издательство  
Томского политехнического университета  
2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

**«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**ЮРГИНСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

---

**Е.В. Полицинский**

## **ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ**

### **ЧАСТЬ 1**

*Рекомендовано в качестве учебного пособия Научно-методическим советом*

*Юргинского технологического института (филиала)*

*Томского политехнического университета*

Издательство

Томского политехнического университета

2012

УДК 53(075)  
ББК 22.3:74.202я73

П50

Юргинский технологический институт

**Полицинский Е.В.**

П50

Лекции по физике. Часть 1: учебное пособие /

Е.В. Полицинский; Юргинский технологический институт. –  
Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2012.  
– 324 с.

Данное учебное пособие предназначено для студентов технических направлений подготовки, в нём приведены материалы лекций по механике, молекулярной физике и термодинамике, электричеству и магнетизму. Главное назначение пособия – ориентировочная основа для самостоятельного написания обучающимися конспектов при подготовке к лекциям с возможностью использования других дополнительных литературных источников и электронных ресурсов. Предварительное изучение студентами материала лекции, самостоятельное написание конспекта являются обязательными составляющими авторской технологии подготовки студентов по физике на основе опережающей самостоятельной работы. Приведённые в пособии материалы будут полезны на практических занятиях по решению физических задач, при выполнении индивидуальных домашних заданий, при подготовке к коллоквиумам, зачётам, экзамену.

УДК 53 (075)

ББК 22.3:74.202 я73

*Рецензенты*

Доктор педагогических наук, профессор кафедры  
педагога-исследователя ТГПУ

*И.Ю. Соколова*

Доктор химических наук, профессор ТГПУ

*Л.П. Ерёмин*

Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры ЕНО  
ЮТИ ТПУ

*Е.П. Теслева*

© Полицинский Е.В., 2012

© Юргинский технологический институт (филиал)  
Томского политехнического университета, 2012

© Оформление. Издательство Томского  
политехнического университета, 2012

## Оглавление

<b>Введение</b>	4
<b>1. Механика</b>	11
1.1. Кинематика	11
1.2. Основы динамики поступательного движения	28
1.3. Работа и механическая энергия	57
1.4. Динамика вращательного движения	73
1.5. Тяготение. Элементы теории поля	88
1.6. Элементы гидро- и аэродинамики	99
1.7. Элементы релятивистской механики	111
<b>2. Основы молекулярной физики и термодинамики</b>	130
2.1. Идеальные газы	130
2.2. Основы термодинамики	163
2.3. Реальные газы	203
<b>3. Электричество и магнетизм</b>	214
3.1. Электростатика	214
3.2. Постоянный электрический ток	250
3.3. Электрический ток в различных средах	260
3.4. Магнитное поле	267
3.5. Явление электромагнитной индукции	289
3.6. Элементы теории Максвелла для электромагнитного поля	303
<b>Приложение</b>	310
<b>Список литературы</b>	324

## Введение

*Физика — это наука, изучающая общие свойства движения вещества и поля.*

*(А.И.Иоффе).*

**Физика – наука о простейших формах движения материи и соответствующих им наиболее общих законах природы.** Изучаемые физикой формы движения материи (механическая, тепловая, электрическая, магнитная и т.д.) являются составляющими более сложных форм движения материи (химических, биологических и др.), поэтому **физика является основой для других естественных наук** (астрономия, биология, химия, геология и др.).

**Физика – база для создания новых отраслей техники, фундаментальная основа подготовки инженера.**

В своей основе **физика – экспериментальная наука:** её законы базируются на фактах, установленных опытным путем. В результате обобщения экспериментальных фактов устанавливаются **физические законы – устойчивые повторяющиеся объективные закономерности, существующие в природе, устанавливающие связь между физическими величинами.**

Все, что мы узнали о материальном мире, возникло из опыта. И любые заключения и предположения, которые мы делаем о свойствах материальных объектов, в конечном счете, проверяются на опыте. Опыт является окончательным критерием правильности наших представлений. В процессе опыта мы определяем те или иные физические величины, например скорость или температуру. Таким образом, определить физическую величину означает указать способ её измерения. Физические величины являются наблюдаемыми. Напротив, если мы говорим о какой-либо величине и не можем указать способ её измерения, то она не является наблюдаемой. Такие величины просто не рассматриваются в физике, не являются её предметом. Физические величины являются достоверными в том смысле, что физический опыт должен обладать свойством повторяемости. Это значит, что при повторении опыт, проведенный в равных условиях, должен приводить всякий раз к одинаковому результату. В других науках это не всегда так, и чем менее выполняется это требование, тем менее эта наука достоверна.

Физические величины обладают свойством размерности. **Под размерностью физической величины понимают совокупность параметров, необходимых для её определения.** Другими словами, указать размерность физической величины означает указать, какие измерения нужно произвести, чтобы её определить. Самые простые физические

величины – это длина, время и масса. Они имеют, как говорят, собственные размерности, обозначаемые соответственно буквами  $L$ ,  $T$  и  $M$ , потому что для их определения никаких других измерений производить не нужно. Но уже, например, для определения скорости тела необходимо произвести два независимых измерения – длины  $L$  и времени  $T$ . Поэтому размерность скорости есть отношение  $L/T$ . Как мы увидим, размерность физической величины находится с помощью формулы, которая служит её определением.

Подчеркнем, что размерность физической величины и единицы её измерения – это разные понятия. Например, скорость может измеряться в  $см/с$ , или в  $м/с$ , или в  $км/ч$ , а размерность её при этом не меняется – она всегда есть  $L/T$ , потому что независимо от того, в каких единицах мы измеряем скорость, мы всегда производим измерения одних и тех же двух параметров – длины  $L$  и времени  $T$ . Размерность физической величины представляет её важнейшее свойство. Часто приходится сравнивать между собой различные величины. Физические величины можно сравнивать, если они обладают одинаковой размерностью. Например, нельзя сравнивать между собой длину пути и отрезки времени: это бессмысленно – они обладают разной размерностью.

Все то, что может быть выражено количественно, называют величиной. **Физическая величина – это характеристика свойств физических объектов или явлений, имеющая числовое значение, которое получается в результате измерений.** Каждая физическая величина должна иметь свою единицу измерения. Число, показывающее, сколько в измеренной величине содержится единиц, называют числовым значением этой величины. Измерение, при котором значение величины определяется непосредственным сравнением с её единицей, называют прямым измерением. **Прямое измерение** – измерение, полученное с помощью измерительного прибора, например – температуры с помощью термометра, длины с помощью линейки, микрометра, штангенциркуля. Прямое измерение далеко не всегда дает достаточно точный результат, не всегда выполнимо и удобно. Например, при определении объема шара, мы не можем воспользоваться каким либо прибором для проведения прямого измерения, но известно что  $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3$ . Воспользовавшись например штангенциркулем и тем, что  $D = 2 \cdot R$  – объем может быть найден, если использовать записанную выше формулу. Измерение, при котором числовое значение величины находится путем вычисления по формуле, называется **косвенным измерением**. На практике чаще приходится выполнять косвенные измерения.

Таким образом, для установления количественных соотношений между физическими величинами их необходимо измерять, т.е. сравнивать их с соответствующими эталонами. Для этого вводится система единиц, которая постулирует основные единицы физических величин и на их базе определяет единицы остальных физических величин, которые называются производными единицами.

Сначала в разных странах использовались свои единицы измерения, например меры длины: в Англии и США – дюйм (25,4 мм), фут (12 дюймов); в России – вершок (4,445 см), аршин (0,7112 м), сажень (2,13336 м), верста (1,0668 км) и т.д. Это вносило неудобства, которые необходимо было ликвидировать.

Совокупность основных единиц с выведенными из них производными единицами называется системой единиц. Конечно, ряд внесистемных единиц, безусловно, широко используется. Например, на флоте – миля (1852 м), в быту – литр ( $10^{-3} \text{ м}^3$ ) и т.д.

### **Международная Система единиц (СИ) (System International – SI). Физические величины**

#### Основные единицы.

**Метр** (м) – длина пути, проходимого светом в вакууме за  $1/299792458$  с.

**Килограмм** (кг) – масса, равная массе международного прототипа килограмма (платиноиридиевого цилиндра, хранящегося в Международном бюро мер и весов в Севре, близ Парижа).

**Секунда** (с) – время, равное 9192631770 периодам излучения, соответствующего переходу между двумя сверхтонкими уровнями основного состояния атома цезия – 133.

**Ампер** (А) – сила неизменяющегося тока, который при прохождении по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенных в вакууме на расстоянии 1 метр один от другого, создает между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

**Кельвин** (К) –  $1/273,16$  часть термодинамической температуры тройной точки воды.

**Моль** (моль) – количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 12 г изотопа углерода  $^{12}\text{C}$ .

**Кандела** (кд) – сила света в заданном направлении источника, испускающего монохроматическое излучение частотой  $540 \cdot 10^{12}$  Гц, энер-

гетическая сила света которого в этом направлении составляет 1/683 Вт/ср.

### Дополнительные единицы системы СИ.

**Радиян** (рад) – угол между двумя радиусами окружности, длина дуги между которыми равна радиусу.

**Стерadian** (ср) – телесный угол с вершиной в центре сферы, вырезающей на поверхности сферы площадь, равную площади квадрата со стороной, равной радиусу сферы.

Единицы, которые устанавливаются произвольно и независимо друг от друга называются основными, а те, которые выводятся из формул, называются производными.

По определению мощность – работа в единицу времени  $N = \frac{A}{t}$ .

Далее подставляем единицы работы и времени получаем

$$1 \text{дж/с} = 1 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \cdot \text{с}} = 1 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^3}.$$

Таким образом, получена единица измерения мощности, названная ватт.

Важно уметь работать с единицами измерения, быстро и правильно переходить к системе СИ.

$$1) v = 720 \frac{\text{км}}{\text{ч}} = \frac{720 \cdot 1000 \text{ м}}{3600 \text{ с}} = 200 \frac{\text{м}}{\text{с}};$$

$$2) V = 10 \text{ см}^3 \text{ (м}^3 \text{ ?)}$$

$1 \text{ м} = 100 \text{ см}$ ;  $1 \text{ м}^2 = 10^4 \text{ м}^2$ ;  $1 \text{ м}^3 = 10^6 \text{ см}^3$  и, следовательно,  $1 \text{ см}^3 = 10^{-6} \text{ м}^3$ , откуда  $10 \text{ см}^3 = 10^{-5} \text{ м}^3$ .

$$3) V = 2 \text{ л (м}^3 \text{ ?)}$$

$$1 \text{ л} = 1 \text{ дм}^3 = 10^{-3} \text{ м}^3 \Rightarrow V = 2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3.$$

**Физические величины могут быть скалярными и векторными. Физические величины, характеризующиеся числовым значением, направлением и геометрическим способом сложения, называются векторными.**

Остановимся на действиях с векторами.

Коллинеарные векторы – векторы, направленные вдоль одной прямой или параллельные друг другу (векторы  $a$  и  $b$ , рис.1).

При умножении вектора  $\vec{a}$  на скаляр  $k$  мы получим новый вектор  $\vec{p}$ , модуль которого равен произведению модуля вектора  $\vec{a}$  на модуль скаляра  $k$   $\vec{p} = k \cdot \vec{a}$ .

Модуль вектора – скаляр.

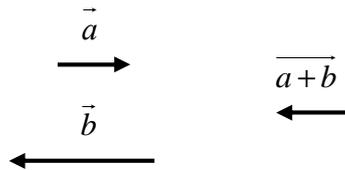


Рис. 1. Сложение коллинеарных векторов

На рис. 2 показаны способы сложения неколлинеарных векторов

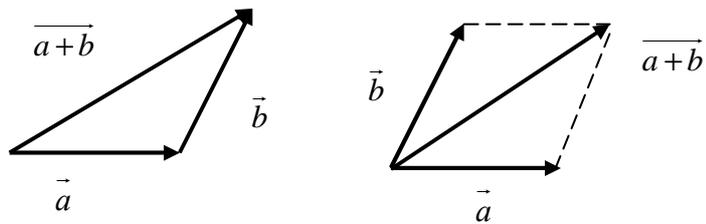


Рис. 2. Сложение неколлинеарных векторов

При решении задач важно уметь переходить для нахождения числовых значений векторных величин к проекциям на соответствующие оси.

**Проекция вектора на соответствующую ось – длина отрезка на оси, ограниченная проекциями начала и конца вектора на данную ось. Если от проекции начала вектора к проекции конца вектора мы идём против направления оси, то проекция отрицательна (рис. 3).**

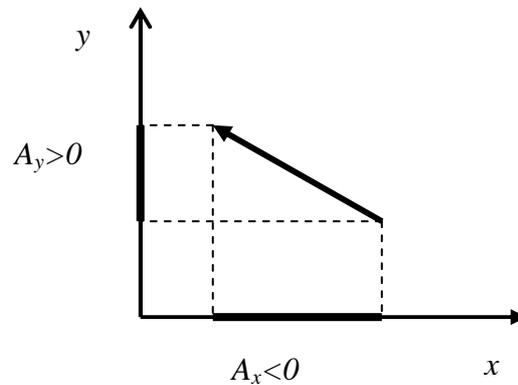


Рис. 3. Проекции вектора A на координатные оси

Если вектор перпендикулярен оси, то при любом направлении вектора его проекция на ось равна нулю (рис. 4).

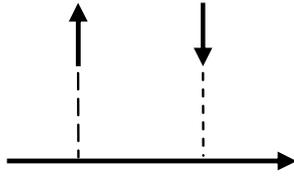


Рис. 4. Проекция векторов

Проекция суммы векторов на координатную ось равна алгебраической сумме проекций складываемых векторов на ту же ось.

### Методические рекомендации по самостоятельному изучению теоретического материала

Для полноценного понимания учебного материала необходимо:

1. Знать смысл и значение каждого понятия.
2. Знать и уметь устанавливать связи между понятиями.
3. Владеть используемыми действиями и операциями.

Для описания физических явлений и процессов широко используется математический аппарат. Без математических знаний, навыков и умений нельзя полноценно изучать физику. Поэтому настоятельно рекомендуем повторить (**смотрите приложение**):

1. Правила приближённого вычисления.
2. Правила действия со степенями и корнями, работу с числами, приведёнными к стандартному виду.
3. Характеристики геометрических фигур (площади, объёмы фигур).
4. Тригонометрические функции острого угла, основные тригонометрические тождества.
5. Основные производные.
6. Табличные интегралы.

Для самостоятельной работы с теорией, самостоятельному написанию конспектов рекомендуем использовать обобщённые планы изучения основных элементов физических знаний (рис. 5).

Например: 1. Скорость  $\vec{v}$  (векторная величина). 2. Модуль скорости равномерного прямолинейного движения равен отношению пути  $S$  ко времени  $t$ , за которое этот путь пройден:  $v = S / t$ . 3. Показывает, как быстро меняются координаты материальной точки:  $v_x = \frac{S_x}{t} = \frac{x - x_0}{t}$ .

4. При равномерном движении  $v = \frac{S}{t}$ ; равноускоренном  $v = v_0 + a \cdot t$ ; в общем случае  $v_x = \frac{dx}{dt}$ . 5).  $[v]1 \frac{м}{с}$ .

<p style="text-align: center;"><b><u>Физическое явление</u></b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Признаки явления, по которым оно обнаруживается.</li> <li>2. Условия, при которых явление протекает.</li> <li>3. Связь данного явления с другими.</li> <li>4. Объяснение данного явления на основе научной теории.</li> <li>5. Примеры проявления явления в природе или использования на практике.</li> </ol>	<p style="text-align: center;"><b><u>Физическая величина</u></b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Название физической величины и её условное обозначение.</li> <li>2. Характеризуемое явление, процесс, свойство.</li> <li>3. Определение, физический смысл.</li> <li>4. Формула, связывающая данную величину с другими.</li> <li>5. Единицы измерения.</li> <li>6. Способы измерения величины.</li> </ol>
<p style="text-align: center;"><b><u>Физический закон</u></b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Словесная формулировка закона.</li> <li>2. Математическое выражение закона.</li> <li>3. Условия применимости закона.</li> <li>4. Опыты, подтверждающие справедливость закона.</li> <li>5. Примеры применения закона на практике.</li> </ol>	<p style="text-align: center;"><b><u>Физическая теория</u></b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Опытное обоснование теории.</li> <li>2. Основные положения, законы, понятия, принципы в теории.</li> <li>3. Границы применимости теории.</li> <li>4. Основные следствия теории.</li> <li>5. Практическое применение теории.</li> </ol>

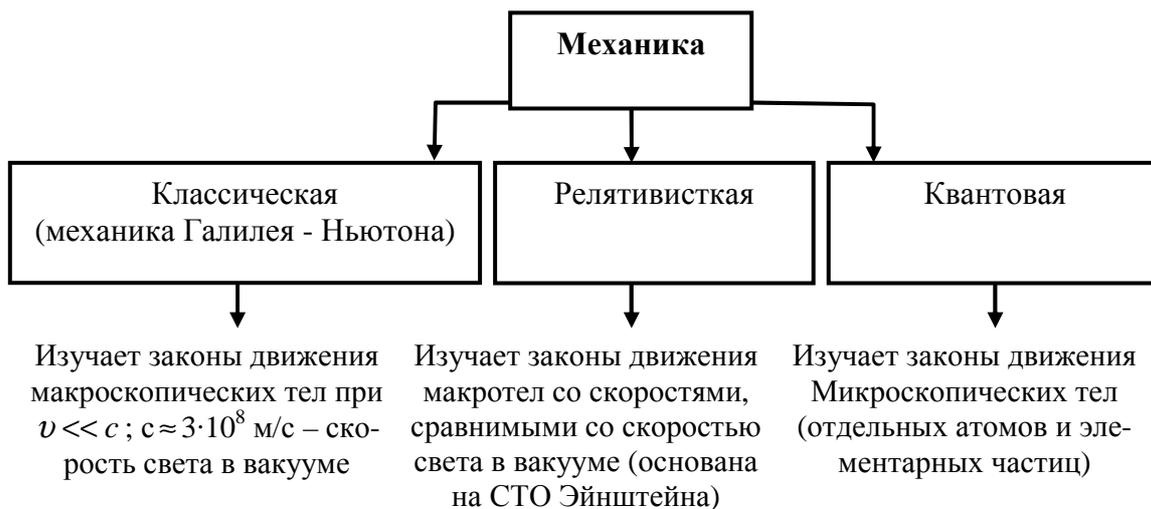
*Рис. 5. Обобщённые планы изучения основных элементов физических знаний*

# 1. Механика

## 1.1. Кинематика

### *Механическое движение. Предмет механики*

**Механика – часть физики, в которой изучаются закономерности механического движения и причины, вызывающие или изменяющие это движение.**



*Рис. 6. Предмет изучения механики*



*Рис. 7. Разделы механики*

**Механическим движением** называют изменение положения тела в пространстве относительно других тел с течением времени.

Развитие механики как науки начинается с III века до н.э., когда древнегреческий учёный Архимед (287 – 212 гг. до н.э.) сформулировал закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. Основ-

ные законы механики установлены итальянским физиком и астрономом Г. Галилеем (1564–1642 гг.) и окончательно сформулированы английским учёным И. Ньютоном (1643–1727 гг.).

**Основная задача механики** – определять положение тела в любой момент времени.

**Физические модели в механике** – модели, применяемые для описания движения тел в зависимости от условий конкретных задач.

**Материальная точка** – тело, размерами которого в условиях данной задачи можно пренебречь.

**Абсолютно твердое тело** – тело, деформацией которого в условиях данной задачи можно пренебречь, и при всех условиях расстояние между любыми двумя точками этого тела остается постоянным.

**Абсолютно упругое тело** – тело, деформация которого подчиняется закону Гука, а после прекращения внешнего силового воздействия такое тело полностью восстанавливает свои первоначальные размеры и форму.

**Абсолютно неупругое тело** – тело, полностью сохраняющее деформированное состояние после прекращения действия внешних сил.

Любое движение твердого тела можно представить как комбинацию поступательного и вращательного движений.

**Поступательное движение** – это движение, при котором любая прямая, жёстко связанная с телом, остается параллельной своему первоначальному положению.

**Вращательное движение** – это движение, при котором все точки тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

### ***Система отсчёта. Траектория, путь и перемещение***

Совокупность тела отсчёта, связанной с ним системы координат и прибора для измерения времени, называют **системой отсчёта**.

**Тело отсчёта** – произвольно выбранное тело, относительно которого определяется положение других (движущихся) тел.

Положение любого движущегося тела определяется по отношению к телу отсчёта, поэтому механическое движение относительно.

Положение материальной точки в пространстве в любой момент времени (закон движения) можно определять либо с помощью зависимости координат от времени

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t) \quad (1)$$

(координатный способ), либо при помощи зависимости от времени радиус-вектора

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (1^*)$$

(векторный способ), проведенного из начала координат до данной точки (рис. 7). Уравнения (1), (1<sup>\*</sup>) это – кинематические уравнения движения материальной точки.

Произвольное макроскопическое тело или систему тел можно мысленно разбить на малые взаимодействующие между собой части, каждая из которых рассматривается как материальная точка. Тогда изучение движения произвольной системы тел сводится к изучению системы материальных точек. В механике сначала изучают движение одной материальной точки, а затем – движение системы материальных точек.

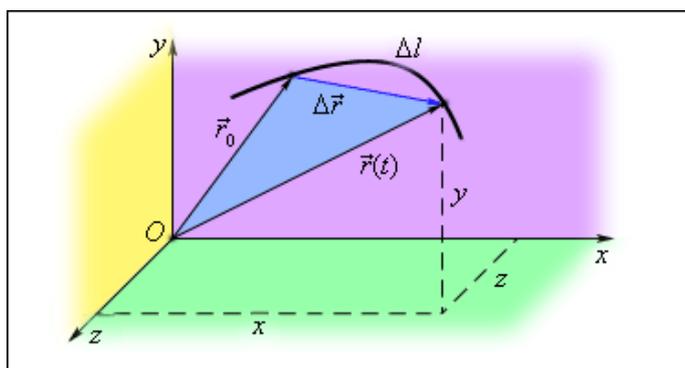


Рис. 8. Способы определения положения тела в пространстве

Перемещаясь с течением времени из одной точки в другую, тело (материальная точка) описывает некоторую линию. Линию, которую описывает движущееся тело, называют **траекторией**.

**Путь** ( $S$ ) – расстояние, пройденное телом (материальной точкой) вдоль траектории движения.

Перемещение ( $\vec{S}$  ( $\Delta\vec{r}$ )) – вектор, соединяющий начальное и конечное положение тела; он направлен от начальной точки движения тела к конечной (рис. 9).

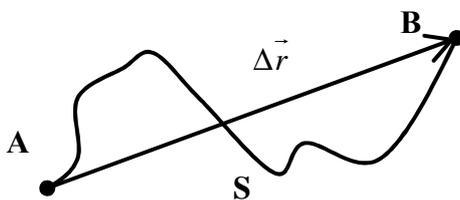


Рис. 9. Путь и перемещение

**Пример.** Автомобиль дважды проехал вокруг Москвы по кольцевой дороге, длина которой 109 км. Чему равны пройденный автомобилем путь и перемещение? *Путь 218 км; модуль перемещения 0.*

## Равномерное прямолинейное движение

**Прямолинейным равномерным движением называется движение, при котором тело за любые равные промежутки времени совершает одинаковые перемещения, и траектория – прямая.**

Ниже (таблица 1) приведена зависимость координаты  $x$  от времени  $t$  для трёх движущихся вдоль оси  $x$  тел.

Таблица 1

*Зависимость  $x(t)$  для трёх движущихся тел*

<b>t (с)</b>	0	1	2	3
<b>x<sub>1</sub> (м)</b>	0	2	4	6
<b>x<sub>2</sub> (м)</b>	0	3	6	9
<b>x<sub>3</sub> (м)</b>	10	9	8	7

Из таблицы 1 видно, что все три тела движутся равномерно, прямолинейно. Однако они движутся по-разному (первое тело за секунду перемещается на 2 м; второе – на 3 м; третье – на 1 м и движется в сторону противоположную оси  $x$ ). Отсюда возникает необходимость во введении физической величины, которая показывала бы, какое перемещение совершает тело в единицу времени.

Вектор скорости тела  $\vec{v}$  равен отношению перемещения  $\Delta\vec{r}$  ко времени перемещения  $t$

$$\vec{v} = \frac{\Delta\vec{r}}{t}, \quad (2)$$

$[v]$  1м/с.

Модуль скорости равномерного прямолинейного движения равен отношению пути  $S$  ко времени  $t$ , за которое этот путь пройден

$$v = \frac{S}{t}. \quad (2^*)$$

Из (2) и (2<sup>\*</sup>) запишем уравнение равномерного движения

$$\vec{r} = \vec{v} \cdot t, \quad (3)$$

$$S = v \cdot t. \quad (3^*)$$

Учитывая, что  $S = x - x_0$ , можно записать решение основной задачи механики для равномерного прямолинейного движения:

$$x = x_0 + v \cdot t. \quad (4)$$

Уравнение скорости

$$v_x = const. \quad (5)$$

При наличии одной координатной оси можно опустить индекс и записать просто  $v = const$ .

Ниже приведены графики зависимости  $x(t)$ ,  $S(t)$ ,  $v(t)$  (рис.10, 11 и 12 соответственно), смотрите (4), (3\*) и (5).

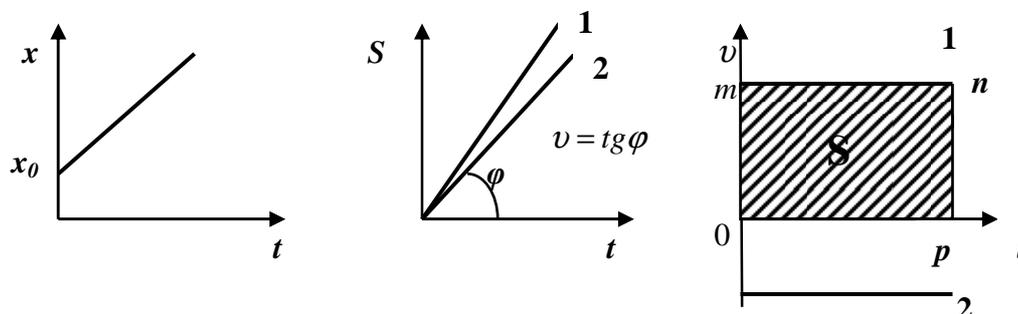


Рис.10. Зависимость  $x(t)$  Рис.11. Зависимость  $S(t)$  Рис.12. Зависимость  $v(t)$

Чем больше  $tg\varphi$ , тем с большей скоростью движется тело (рис. 10), т.е.  $v_1 > v_2$ . Модуль перемещения за данный промежуток времени численно равен площади заштрихованного прямоугольника (рис. 12), тело 2 (рис. 12) движется в противоположном оси  $x$  направлению.

### Равнопеременное прямолинейное движение

**Равнопеременным прямолинейным движением** называется движение, при котором за любые равные промежутки времени скорость тела изменяется на одинаковую величину и траектория – прямая линия.

Ниже (таблица 2) приведена зависимость проекции скорости  $v_x$  на ось  $x$  от времени  $t$  для трёх движущихся вдоль оси  $x$  тел.

Таблица 2

Зависимость  $v(t)$  для трёх движущихся тел

<b>t (с)</b>	0	1	2	3
$v_1$ (м/с)	0	2	4	6
$v_2$ (м/с)	0	3	6	9
$v_3$ (м/с)	10	9	8	7

У всех трёх тел (таблица 2) движущихся вдоль оси  $x$  скорость изменяется в единицу времени на одинаковую величину. Однако скорость в единицу времени у этих тел изменяется – по-разному (для первого тела на 2 м/с за секунду, второго – на 3 м/с за секунду, третьего – на 1 м/с за секунду, кроме того, в отличие от первых двух тел скорость с течением времени уменьшается). Возникает необходимость во введении физи-

ческой величины, которая показывала бы как меняется скорость тела в единицу времени.

Ускорением  $\vec{a}$  равнопеременного движения называется физическая величина, равная отношению изменения скорости тела ко времени, за которое это изменение произошло

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{t}, \quad (6)$$

где  $\Delta \vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_0$ .

В проекции на какую-либо ось

$$a = \frac{v - v_0}{t}. \quad (6^*)$$

Если физический смысл скорости состоит в том, что скорость показывает, как быстро изменяются координаты тела  $\left( v_x = \frac{x - x_0}{t} \right)$ , то физический смысл ускорения согласно (6), (6<sup>\*</sup>) состоит в том, что эта величина показывает нам, как быстро с течением времени изменяется скорость тела (быстрота изменения скорости).

Из (6<sup>\*</sup>)  $\Rightarrow [a] 1 \text{ м/с}^2$ .

Быстроту движения тела при переменном движении характеризуют средней и мгновенной скоростями.

Средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{r}}{t}. \quad (7)$$

Мгновенной скоростью называют скорость тела в данный момент времени или в данной точке траектории. Спидометр автомобиля показывает мгновенную скорость.

Если,  $a > 0$  – движение равноускоренное;  $a < 0$  – равнозамедленное.

Приведём важнейшие формулы равноускоренного движения, известные из школьного курса физики.

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t} \quad (8),$$

$$v_{\text{ср}} = \frac{v_0 + v}{2} \quad (9),$$

$$a = \frac{v - v_0}{t} \quad (10) \text{ и } \Rightarrow$$

$$v = v_0 + a \cdot t \quad (11),$$

$$S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2} \quad (12),$$

$$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a} \quad (13),$$

$$x = x_0 + v_{0x} \cdot t + \frac{a_x \cdot t^2}{2} \quad (14).$$

В задачах, где требуется определить путь за какую-нибудь  $n$ -ю секунду движения, например за десятую, то для решения удобно использовать формулу

$$S_n = \frac{a}{2} \cdot (2 \cdot n - 1), \quad (15)$$

где  $n$  – номер секунды, считая от начала движения.

Отметим, что формула (15) некорректна с точки зрения соответствия размерности (будем считать, что  $[(2 \cdot n - 1)] \text{ с}^2$ ).

В задачах на сочетание нескольких видов движения на всём пути

$$v_{\text{ср}} = \frac{S}{t},$$

где  $S = S_1 + S_2 + \dots$  и  $t = t_1 + t_2 + \dots$ .

При этом следует учесть, что конечная скорость на одном участке пути является начальной скоростью на соседнем участке. Ниже приведены графики зависимости  $a(t)$ ,  $v(t)$ ,  $S(t)$ ,  $x(t)$  для равнопеременного движения.

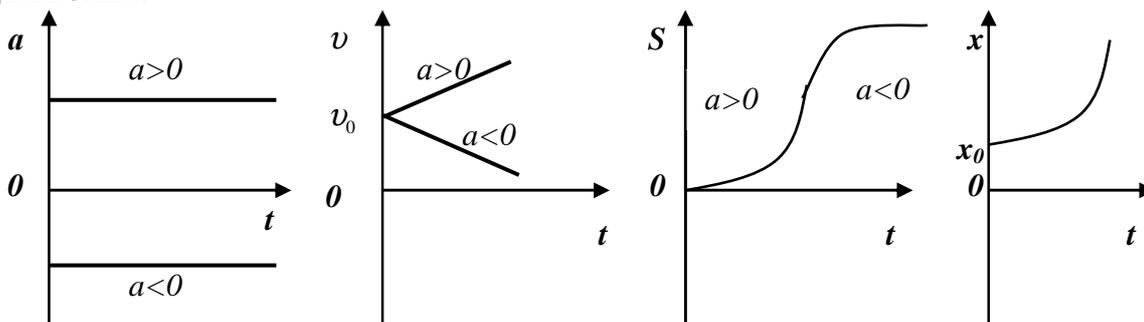


Рис.13. Графики зависимости  $a(t)$ ,  $v(t)$ ,  $S(t)$ ,  $x(t)$  для равнопеременного движения

### Прямолинейное движение с переменным ускорением

Если моменты времени  $t_1$ , и  $t_2$  бесконечно близки, то время  $\Delta t$  бесконечно мало и в этом случае обозначается через  $dt$ . За время  $dt$  точка проходит бесконечно малое расстояние  $dS$ . Их отношение образует мгновенную скорость точки

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (16)$$

Производная радиус-вектора  $\vec{r}$  по времени определяет мгновенную скорость перемещения точки

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (17)$$

Поскольку перемещение совпадает с бесконечно малым элементом траектории  $dr = dS$ , то вектор скорости направлен по касательной к траектории, а его величина:

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{dr}{dt}. \quad (18)$$

В случае движения вдоль оси  $x$

$$v = dx / dt. \quad (19)$$

Интегрируя выражение (18) в интервале времени от  $t_0$  до  $t$ , получим формулу, позволяющую вычислить путь (рис.13), пройденный телом за время от  $t_1$  до  $t_2$  если известна зависимость  $v(t)$ :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (20)$$

Для определения  $S$  надо знать функцию  $v(t)$ . Тогда путь, пройденный за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , определяется заштрихованной на рисунках (рис.14–16) площадью.

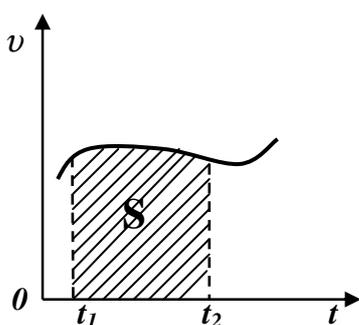


Рис.14. К определению пути пройденного точкой за время от  $t_1$  до  $t_2$

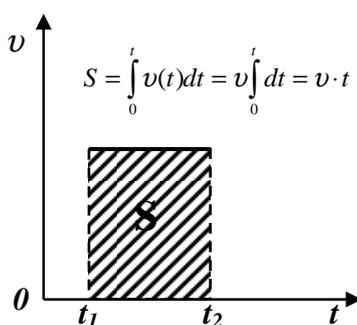


Рис. 15. К определению пути пройденного точкой за время  $\Delta t$  при равномерном движении

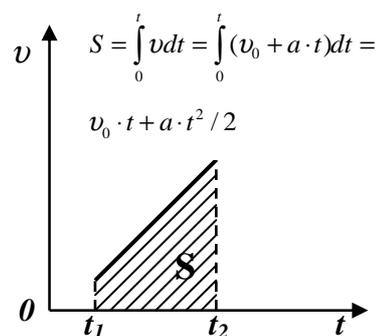


Рис. 16. К определению пути пройденного точкой за время  $\Delta t$  при равноускоренном движении

Производную скорости по времени, которая является второй производной по времени от радиус-вектора, называют ускорением точки

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (21)$$

Если известен закон  $a = a(t)$ , то

$$v = v_0 + \int_{t_0}^t a(t) dt. \quad (22)$$

Траектории движения реальных тел – кривые. Криволинейное движение точки на разных участках траектории движения можно рассмот-

реть как комбинацию прямолинейного движения и движения по окружности.

### Свободное падение

**Свободным падением** называют падение тела в вакууме под действием притяжения к планете. Если  $h \ll R_3$ , тело движется с постоянным, направленным вертикально вниз ускорением  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$  – ускорением свободного падения.

Все законы равнопеременного движения (8–15) можно применять.

$$\begin{array}{l}
 v = v_0 + a \cdot t \\
 S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}
 \end{array}
 \left|
 \begin{array}{l}
 v = v_0 + g \cdot t \\
 h = v_0 \cdot t + \frac{g \cdot t^2}{2}
 \end{array}
 \right.
 \begin{array}{l}
 \text{Знаки перед } v_0, v \text{ и } g \text{ зависят от} \\
 \text{выбора системы отсчёта (на-} \\
 \text{правления оси).}
 \end{array}$$

И. т.д.

### Движение тела, брошенного горизонтально, пикирующего тела, тела, брошенного под углом к горизонту

#### Движение тела брошенного горизонтально (рис. 16)

Движение тела будет представлять собой суперпозицию двух движений, происходящих одновременно: равномерного и прямолинейного в горизонтальном направлении со скоростью  $\vec{v}_x$  и свободного падения, то есть равноускоренного движения вниз без начальной скорости с высоты  $h$  с ускорением свободного падения  $\vec{g}$ .

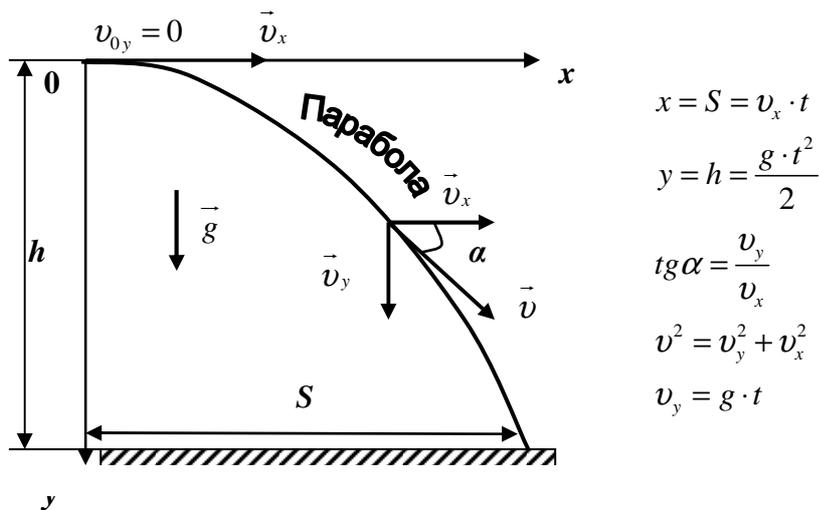
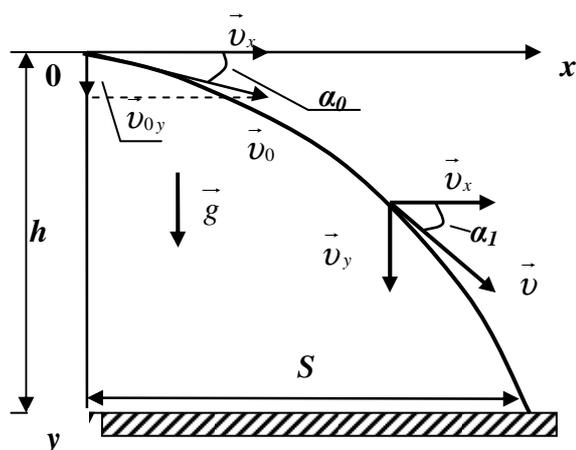


Рис. 16. Траектория движения тела брошенного горизонтально

### Движение пикирующего тела (рис. 17)



$$v_{oy} = v_0 \sin \alpha_0$$

$$v_x = v_0 \cos \alpha_0$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

$$v^2 = v_y^2 + v_x^2$$

$$v_y = v_{0y} + g \cdot t$$

$$y = h = v_0 \cdot t \sin \alpha_0 + g \cdot t^2$$

$$x = S = v_0 \cdot t \cos \alpha_0$$

Рис. 17. Траектория пикирующего тела

Кроме того, могут пригодиться и другие уравнения, например

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot g}$$

### Движение тела, брошенного под углом $\alpha$ к горизонту (рис. 18)

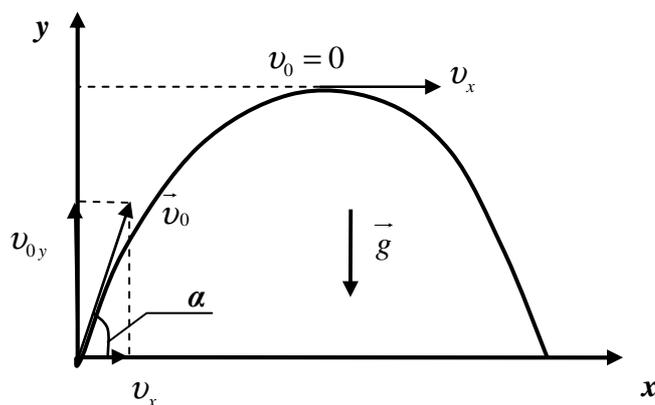


Рис. 18. Траектория движения тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту

$$v_x = v_0 \cos \alpha,$$

$$x = v_x \cdot t = v_0 \cdot t \cos \alpha.$$

$$S_{\max} = v_x \cdot t_{\text{общ}} = v_0 \cdot t_{\text{общ}} \cos \alpha.$$

Здесь  $t_{\text{общ}}$  – всё время полёта.

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t,$$

где  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ .

$$y = y_0 + v_{0y} \cdot t - \frac{g \cdot t^2}{2} = y_0 + v_0 \cdot t \sin \alpha - \frac{g \cdot t^2}{2}.$$

В высшей точке подъёма  $v_y = 0$ , поэтому

$$t_{\text{взлёта}} = t_{\text{падения}} = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{v_0 \sin \alpha}{g},$$

а максимальная высота взлёта

$$h_{\text{max}} = \frac{g}{2} \cdot t_{\text{взлёта}}^2 = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \sin^2 \alpha.$$

Кроме того,

$$S_{\text{max}} = v_0 \cdot 2 \cdot t_{\text{взлёта}} \cos \alpha = 2 \cdot v_0 \cdot \frac{v_0}{g} \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad (*)$$

Из (\*)  $\Rightarrow$ , так как  $\sin 2\alpha = 1$  (максимальное значение),  $2 \cdot \alpha = 90^\circ$ , то при угле  $\alpha = 45^\circ$  дальность полёта тела будет наибольшей.

Следует отметить, что если тело, брошенное под углом к горизонту, испытывает сопротивление внешней среды (воздуха), то его движение вдоль оси  $x$  уже не будет равномерным, а будет происходить с замедлением (уравнения равномерного движения применять нельзя. Траектория движения тела в данном случае уже не парабола (рис. 19)).

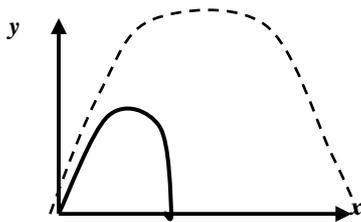


Рис. 19. Траектория движения

### Движение по окружности

Простейший случай – равномерное движение. **Равномерное движение материальной точки по окружности** – движение, при котором материальная точка (тело) за равные промежутки времени проходит равные по длине дуги окружности.

Такое движение можно характеризовать следующими параметрами: линейная и угловая скорость, период, частота, нормальное (центростремительное) ускорение.

Линейная скорость (физическая величина, равная отношению длины дуги  $S$  ко времени  $t$ , за которое пройдена эта дуга)

$$v = \frac{S}{t}. \quad (23)$$

Вращаясь по окружности, точка может поворачивать на разные углы в единицу времени, отсюда возникает необходимость во введении физической величины, которая бы показывала, на какой угол поворачивается точка в единицу времени. Это – угловая скорость

$$\omega = \frac{\varphi}{t}, \quad (24)$$

$[\omega]$  1 рад/с.

Период  $T$  – физическая величина, равная времени одного полного оборота по окружности (отношение всего времени вращения  $t$  к числу полных оборотов  $N$ )

$$T = \frac{t}{N}. \quad (25)$$

Частота  $\nu$  – физическая величина, показывающая, какое количество оборотов совершает материальная точка при её равномерном вращении по окружности в единицу времени

$$\nu = \frac{N}{t}. \quad (26)$$

Из (25) и (26)  $\Rightarrow$ , что

$$T = \frac{1}{\nu}. \quad (27)$$

Скорость в каждой точке траектории направлена по касательной. Так как, несмотря на то, что по модулю скорость точки остаётся постоянной, движение по окружности – это всегда движение с нормальным (центростремительным ускорением) (рис. 20).

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (28)$$

Так как длина окружности  $S = 2 \cdot \pi \cdot R$ , а время одного полного оборота  $T$ , то для скорости (смотрите 23), можно записать

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} = 2 \cdot \pi \cdot R \cdot \nu. \quad (29)$$

Используя аналогичные рассуждения для (24), получаем:

$$\omega = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 2 \cdot \pi \cdot \nu. \quad (30)$$

Из сравнения (29) и (30)

$$v = \omega \cdot R. \quad (31)$$

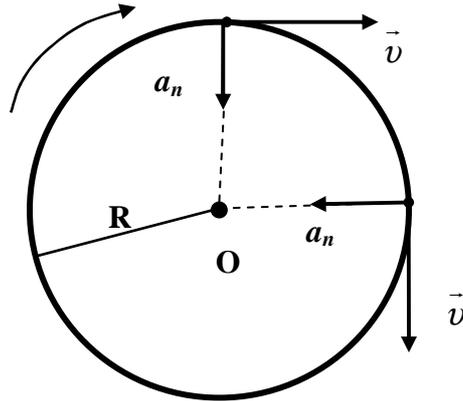


Рис.20. Точка, движущаяся по окружности радиусом  $R$  с постоянной по модулю скоростью  $v$

Подставив (31) в (28), получаем:

$$a_n = \omega^2 \cdot R, \quad (32)$$

$$a_n = \frac{v \cdot v}{R} = \frac{v}{R} \cdot \omega \cdot R = v \cdot \omega. \quad (33)$$

Отметим, что две точки, лежащие на спице, будут вращаться с одинаковой угловой скоростью и разными линейными скоростями (точка, лежащая дальше от центра окружности, будет иметь большую линейную скорость, то есть  $v_2 > v_1$ ,  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  (смотрите (31) (рис. 21)).

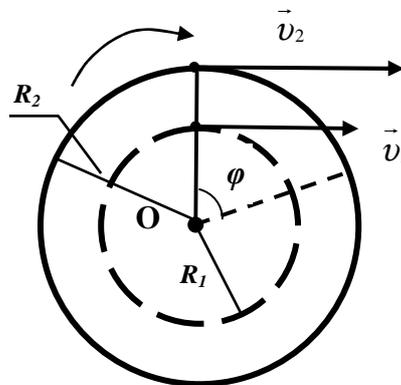


Рис. 21. Колесо радиусом  $R_2$

### **Равнопеременное и переменное движение по окружности**

Между параметрами и уравнениями кинематики прямолинейного движения и движения по окружности вокруг оси или центра вращения существует аналогия.

Таблица 3

*Аналогия между параметрами*

Путь $S$ (м)	Угол $\varphi$ (рад)
Скорость $v$ (м/с)	Угловая скорость $\omega$ (рад/с)
Ускорение $a$ (м/с <sup>2</sup> )	Угловое ускорение $\varepsilon$ (рад/с <sup>2</sup> )
Время $t$ (с)	Время $t$ (с)

Таблица 4

*Аналогия между уравнениями*

Равномерное движение	
Прямолинейное	По окружности
$v = \frac{S}{t}$	$\omega = \frac{\varphi}{t}$
Равнопеременное движение	
Прямолинейное	По окружности
$v_{\text{cp}} = \frac{S}{t}$	$\omega_{\text{cp}} = \frac{\varphi}{t}$
$v_{\text{cp}} = \frac{v_0 + v}{2}$	$\omega_{\text{cp}} = \frac{\omega_0 + \omega}{2}$
$v = v_0 + a \cdot t$	$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t$
$S = v_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}$	$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}$
$S = \frac{v^2 - v_0^2}{2 \cdot a}$	$\varphi = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2 \cdot \varepsilon}$

Быстроту изменения скорости при криволинейном движении характеризуют тангенциальным  $a_\tau$ , нормальным  $a_n$  и полным  $a$  ускорениями.

$\vec{a}_\tau \perp \vec{a}_n$  всегда (рис. 22).

Полное ускорение равно векторной сумме тангенциального и нормального ускорений

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau. \quad (34)$$

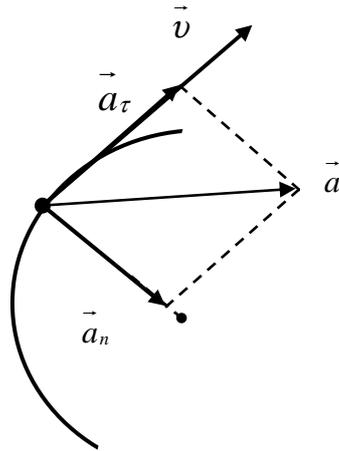


Рис. 22. Векторы тангенциального, нормального и полного ускорения точки

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} . \quad (35)$$

$$a_\tau = \varepsilon \cdot R . \quad (36)$$

Полезно знать, что  $1 \text{ рад} = 57,3^\circ \Rightarrow 1^\circ = \frac{1}{57,3} \text{ рад}$ .

Ниже в таблице (таблица 5) приведена классификация движения в зависимости от тангенциальной и нормальной составляющих ускорения.

Таблица 5

*Классификация движения*

$a_\tau$	$a_n$	Движение
0	0	Прямолинейное равномерное
$a_\tau = a = const$	0	Прямолинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	0	Прямолинейное с переменным ускорением
0	$const$	Равномерное по окружности
0	$\neq 0$	Равномерное криволинейное
$const$	$\neq 0$	Криволинейное равнопеременное
$a_\tau = f(t)$	$\neq 0$	Криволинейное с переменным ускорением

В общем случае рассматривают бесконечно малые углы поворота.

Элементарные (бесконечно малые) повороты рассматривают как векторы. Модуль вектора  $d\vec{\phi}$  равен углу поворота, а его направле-

ние совпадает с направлением поступательного движения острия винта, головка которого вращается в направлении движения точки по окружности, т.е. подчиняется правилу правого винта (буравчика) (рис. 23).

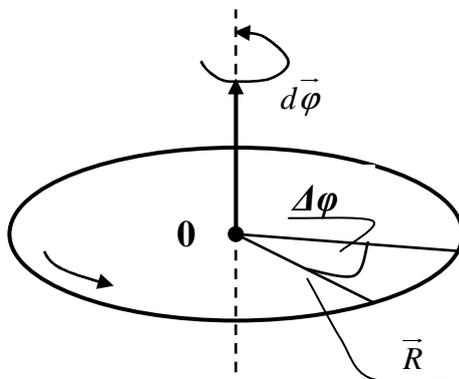


Рис. 23. Элементарный угол поворота  $d\vec{\varphi}$

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{\varphi}}{\Delta t}.$$

**Угловая скорость** – векторная величина, определяемая первой производной угла поворота тела по времени

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (37)$$

Вектор  $\vec{\omega}$  (угловая скорость) направлен вдоль оси вращения по правилу правого винта так же, как и вектор  $d\vec{\varphi}$  (рис. 24).

**Угловое ускорение** – векторная физическая величина, определяемая первой производной угловой скорости по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (38)$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения направлен вдоль оси вращения в сторону вектора элементарного приращения угловой скорости.

При ускоренном движении вектор  $\vec{\varepsilon}$  сонаправлен вектору  $\vec{\omega}$ , при замедленном – направлен противоположно ему (рис. 25). Так же, как и  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{\varepsilon}$  – псевдовектор. Псевдовекторы – векторы, не имеющие определённых точек приложения: они могут откладываться из любой точки оси вращения.

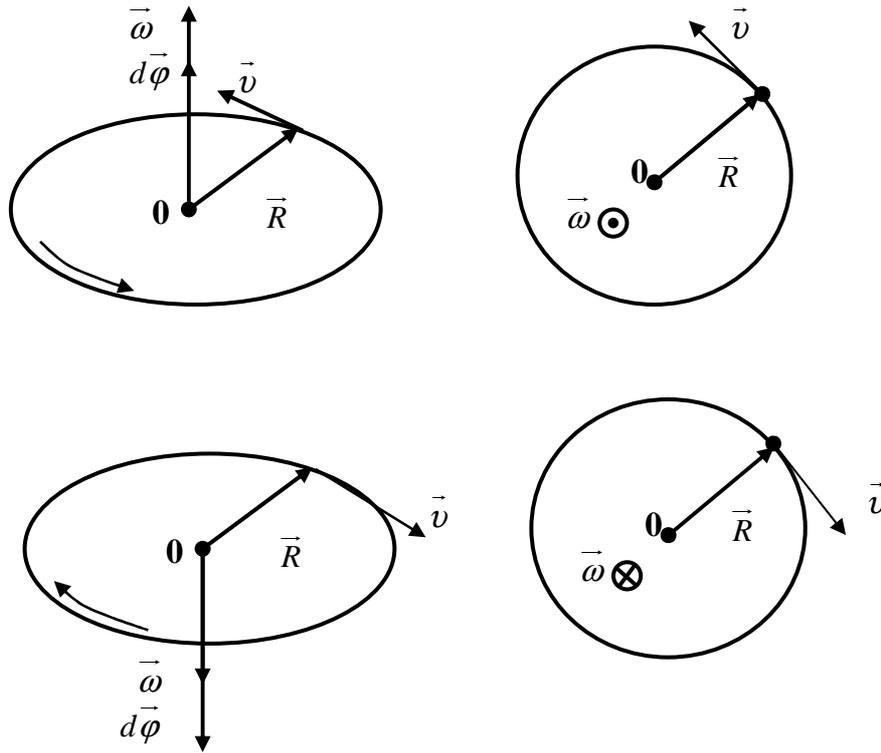


Рис. 24. К определению направления  $\vec{\omega}$

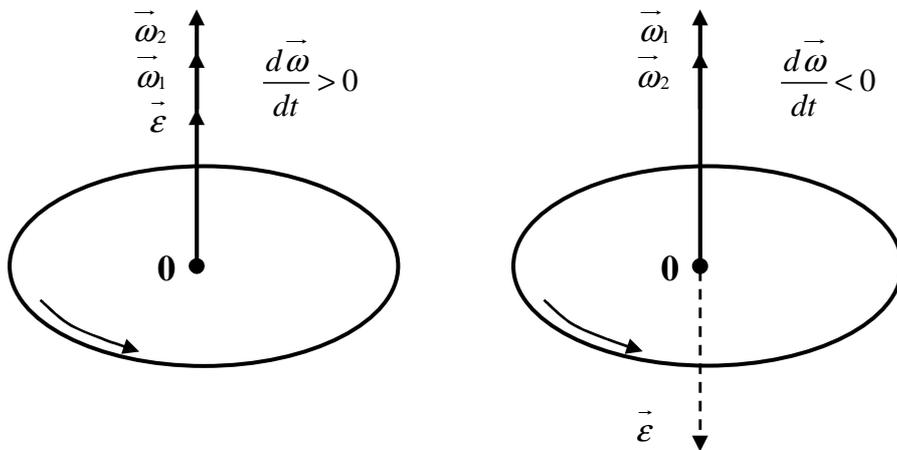


Рис. 25. К определению направления  $\vec{\varepsilon}$

Если известна зависимость  $\omega = \omega(t)$ , то

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega dt . \quad (39)$$

Если известна зависимость  $\varepsilon = \varepsilon(t)$ , то

$$\omega = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon dt . \quad (40)$$

## 1.2. Основы динамики поступательного движения

При рассмотрении кинематики использовалась неподвижная система отсчета. Однако в природе не существует абсолютного движения, **всякое движение имеет относительный характер: либо одного тела относительно другого, либо относительно выбранной системы отсчета.** Возникает вопрос, все ли системы отсчета являются равноправными, а если нет, то какие являются предпочтительными. Единственное требование к системе отсчета состоит в том, что её выбор не должен вносить усложнения в описание движения тел, то есть **законы движения в выбранной системе отсчета должны иметь наиболее простой вид.** В частности, в такой системе должны оставаться неизменными свойства пространства и времени: **пространство должно быть однородным и изотропным, а время однородным.**

**Однородность пространства и времени** означает, что наблюдаемые физические свойства и явления должны быть одинаковы в любой точке пространства и в любой момент времени. Не существует выделенных в каком-либо отношении точек пространства и моментов времени.

**Изотропность пространства** означает, что все направления в пространстве равнозначны. Физические явления в замкнутой системе не должны изменяться при её повороте в пространстве.

Система отсчета, которая использовалась до сих пор, отвечала этим требованиям, но возникает вопрос, как её реализовать, то есть с какими объектами, реально существующими в природе, можно её связать. Оказывается, что выбор подобной системы отсчета является непростым делом. Если «привязать» неподвижную систему координат к какому-либо произвольно движущемуся объекту, например к вагону поезда, можно заметить, что в данной системе отсчета сразу произойдут странные явления, например груз, подвешенный на нити, будет время от времени отклоняться от вертикали (что связано с действием различных ускорений вагона: при торможении или ускорении и при поворотах). В результате для описания этих явлений в данной системе координат придётся прибегнуть к представлениям о взаимодействиях, внешних по отношению к системе, и включить их в рассмотрение. В то же время ясно, что в другой системе координат, не испытывающей указанных ускорений, описание механических явлений будет гораздо проще.

Другой пример не очень подходящей системы отсчета – неподвижная система, связанная с Землей. В этой системе можно, например, обнаружить вращение плоскости колебаний физического маятника (на самом деле связанное с вращением Земли вокруг своей оси), для объясне-

ния которого также придется привлекать физические причины, являющиеся посторонними по отношению к данной системе отсчета. Вместе с тем, по отношению к Солнцу и звездам маятник будет вести себя стабильно, то есть **Солнце и звезды являются подходящими физическими объектами для выбора указанной системы отсчета.**

**Система отсчёта, относительно которой материальная точка, свободная от внешних воздействий, либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно называется инерциальной системой отчёта.**

**Неинерциальная система отчёта – система, движущаяся относительно инерциальной с ускорением.**

Существует бесконечное множество инерциальных систем отсчета. Во всех этих системах свойства пространства и времени одинаковы и одинаковы законы механики. Не существует никакой абсолютной системы отсчета, которую можно было бы предпочесть другим системам. В этом состоит **принцип относительности Галилея.** Его можно сформулировать и так:

• **Законы динамики одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта.**

• **Никакими механическими опытами невозможно установить, движется ли данная инерциальная система или покоится: оба эти состояния эквивалентны.**

Координаты точки в двух системах отсчета, одна из которых  $K'$  движется равномерно и прямолинейно относительно другой ( $K$ ) со скоростью  $u$ , связаны соотношением (рис. 26)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{u} \cdot t \quad . \quad (41)$$

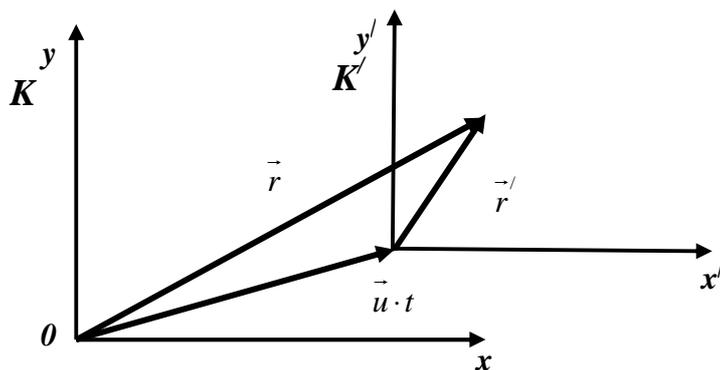


Рис. 26. Неподвижная ( $K$ ) и подвижная ( $K'$ ) системы отсчёта

При этом считается, что время абсолютно, то есть течёт одинаково в обеих системах  $t' = t$ . Скорость точки в системе  $K$  связана со скоростью в системе  $K'$  формулой

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}. \quad (42)$$

Математически принцип относительности Галилея можно сформулировать как требование инвариантности (неизменности) уравнений механики по отношению к преобразованию (42).

### **Первый закон Ньютона**

**Существуют системы отсчёта, относительно которых поступательно движущиеся тело сохраняет свою скорость постоянной, то есть движется равномерно и прямолинейно, если на него не действуют другие тела или их действие скомпенсировано (результатирующая сила равна нулю).**

Свойство тел сохранять свою скорость при отсутствии действия на него других тел называется **инерцией**. Поэтому первый закон Ньютона называют **законом инерции**. Впервые закон инерции был сформулирован Г. Галилеем (1632 г.). Ньютон обобщил выводы Галилея и включил их в число основных законов движения.

Итак, причиной изменения скорости движения тела в инерциальной системе отсчета всегда является его взаимодействие с другими телами. Для количественного описания движения тела под воздействием других тел необходимо ввести две новые физические величины – **инертную массу тела и силу**.

### **Сила. Масса. Импульс**

**Масса** – это свойство тела, характеризующее его инертность. При одинаковом воздействии со стороны окружающих тел одно тело может быстро изменять свою скорость, а другое в тех же условиях – значительно медленнее. Принято говорить, что второе из этих двух тел обладает большей инертностью, или, другими словами, второе тело обладает большей массой.

Если два тела взаимодействуют друг с другом, то в результате изменяется скорость обоих тел, то есть в процессе взаимодействия оба тела приобретают ускорения. Отношение ускорений двух данных тел оказывается постоянным при любых воздействиях. В физике принято, что массы взаимодействующих тел обратно пропорциональны ускорениям

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{a_2}{a_1} \quad (43)$$

В этом соотношении величины  $a_1$  и  $a_2$  следует рассматривать как проекции векторов  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  на ось ОХ (рис. 27). Знак «минус» в пра-

вой части формулы означает, что ускорения взаимодействующих тел направлены в противоположные стороны.

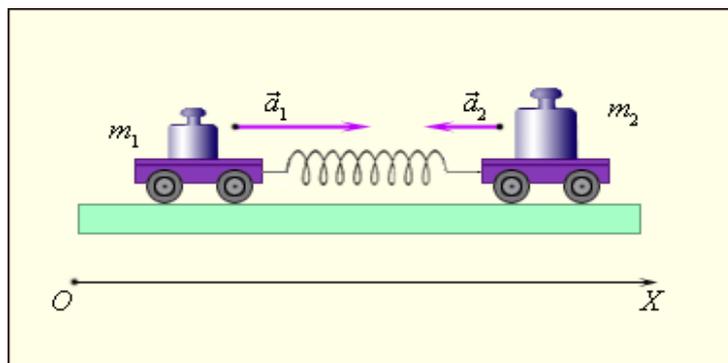


Рис. 27. Сравнение масс двух тел

В Международной системе единиц (СИ) масса тела измеряется в **килограммах (кг)**.

Масса любого тела может быть определена на опыте путем сравнения с **массой эталона** ( $m_{\text{эт}} = 1 \text{ кг}$ ). Пусть  $m_1 = m_{\text{эт}} = 1 \text{ кг}$ . Тогда

$$m_2 = -\frac{a_1}{a_2} m_{\text{эт}}. \quad (44)$$

Масса тела – **скалярная величина**. Опыт показывает, что если два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$  соединить в одно, то масса  $m$  составного тела оказывается равной сумме масс  $m_1$  и  $m_2$  этих тел, то есть

$$m = m_1 + m_2. \quad (45)$$

Это свойство масс называют **аддитивностью**.

Масса тела это физическая величина, являющаяся одной из основных характеристик материи, определяющая не только инерционные (инертная масса), но и гравитационные (гравитационная масса) свойства. В настоящее время можно считать доказанным, что инертная и гравитационная массы равны друг другу (с точностью, не меньшей  $10^{-12}$ ).

Чтобы описывать воздействия, упоминаемые в первом законе Ньютона, вводится понятие силы.

**Сила** – векторная физическая величина, являющаяся мерой механического воздействия на тело со стороны других тел или полей, в результате которого тело приобретает ускорение или изменяет свою форму и размеры. Сила – это не причина движения, а причина изменения движения (то есть изменения скорости движения).

В каждый момент времени сила характеризуется числовым значением, направлением в пространстве и точкой приложения.

Векторная сумма всех сил, действующих на тело, называется **равнодействующей (резльтирующей) силой**.

Для измерения сил используют откалиброванные пружины, которые называются динамометрами. Такие откалиброванные пружины называются **динамометрами**. Сила измеряется по растяжению динамометра (рис. 28).

**Импульсом материальной точки** (тела) называется векторная, физическая величина, численно равная произведению массы материальной точки (тела) на её скорость и имеющая направление скорости

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}. \quad (46)$$

Единица импульса 1 кг·м/с. 1 килограмм-метр в секунду равен импульсу материальной точки (тела) массой 1 кг, движущейся со скоростью 1 м/с.

### Второй закон Ньютона

**Общая формулировка второго закона Ньютона: скорость изменения импульса материальной точки (тела) равна действующей на неё (него) силе**

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (47)$$

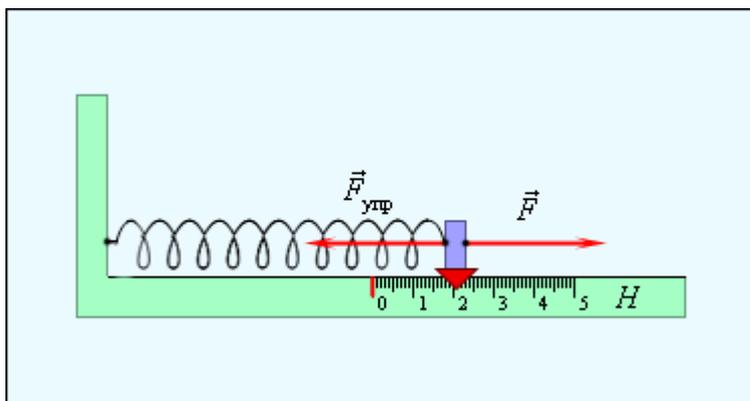


Рис. 28. Измерение силы по растяжению пружины

(47) – уравнение движения материальной точки.

**Ещё одна формулировка второго закона Ньютона**

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \quad (48)$$

Действительно:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m \cdot \vec{v}) = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = m \cdot \vec{a}$ .

Из (48)  $\Rightarrow$  
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (48^*)$$

**Ускорение, приобретаемое материальной точкой (телом), пропорционально вызывающей его силе, совпадает с ней по направлению и обратно пропорционально массе материальной точки (тела).**

Единица силы  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ . 1 ньютон – сила, которая массе в 1 кг сообщает ускорение  $1 \text{ м}/\text{с}^2$  в направлении действия силы.

Если на материальную точку действует одновременно несколько сил, то каждая из них сообщает материальной точке ускорение, согласно второму закону Ньютона, как будто других сил нет.

Ускорение, приобретаемое точкой под действием нескольких сил:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^n \vec{a}_i = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (49)$$

$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i$  – результирующая сила (векторная сумма всех сил, приложенных к телу (рис.29)).

Иногда, целесообразно разложить силу на составляющие. Это позволяет существенно упростить решение многих задач. Например, (рис. 30) на тангенциальную силу  $\vec{F}_\tau$  (направлена по касательной к траектории) и нормальную силу  $\vec{F}_n$  (направлена по нормали к центру кривизны).

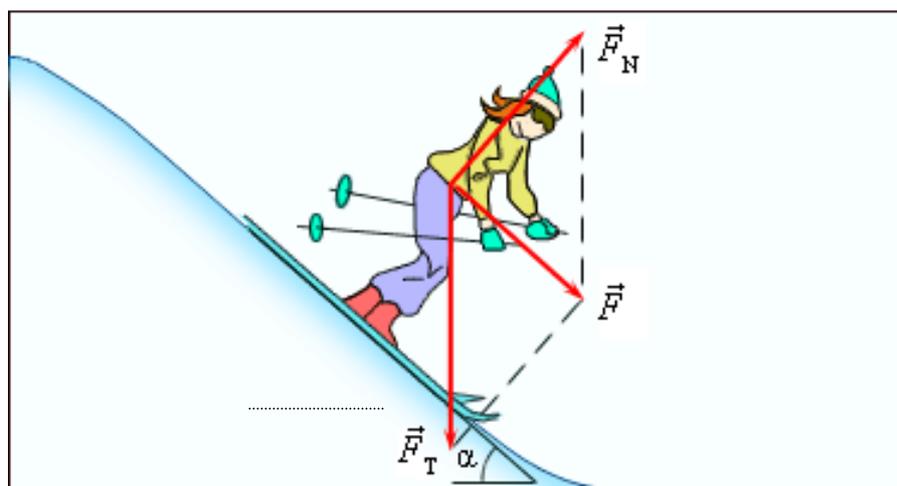


Рис. 29. Результирующая сила  $\vec{F}$

$$F_\tau = m \cdot a_\tau = m \cdot \frac{dv}{dt}. \quad (50)$$

$$F_n = m \cdot a_n = \frac{m \cdot v^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R. \quad (51)$$

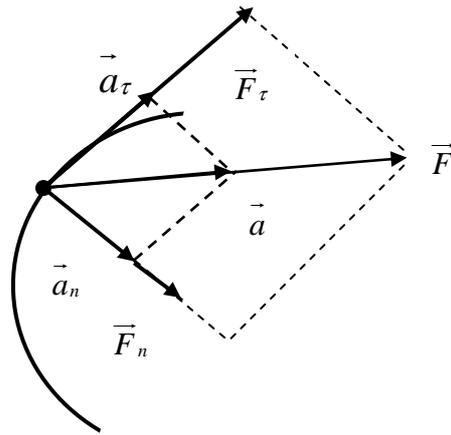


Рис. 30. Сила  $\vec{F}$

Ускорение, с которым движется тело, всегда совпадает по направлению с результирующей силой, а скорость может и не совпадать с её направлением, например, при движении по окружности.

### Третий закон Ньютона

Понятие **массы** тела было введено на основе опытов по измерению ускорений двух взаимодействующих тел: массы взаимодействующих тел обратно пропорциональны численным значениям ускорений (смотрите (43)), то есть

$$m_1 \cdot a_1 = -m_2 \cdot a_2. \quad (52)$$

В векторной форме это соотношение принимает вид

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = -m_2 \cdot \vec{a}_2. \quad (53)$$

Знак «минус» выражает здесь тот опытный факт, что ускорения взаимодействующих тел всегда направлены в противоположные стороны. Согласно второму закону Ньютона, ускорения тел вызваны силами

$$\vec{F}_1 = m_1 \cdot \vec{a}_1 \quad \text{и} \quad \vec{F}_2 = m_2 \cdot \vec{a}_2, \quad \text{возникающими при взаимодействии тел.}$$

Отсюда следует

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (54)$$

**Силы, возникающие при взаимодействии тел, всегда имеют одинаковую природу. Они приложены к разным телам** и поэтому не могут уравновешивать друг друга. Складывать по правилам векторного сложения можно только силы, приложенные к одному телу.

Проиллюстрируем третий закон Ньютона (рис. 31). Человек действует на груз с такой же по модулю силой, с какой груз действует на человека. Эти силы направлены в противоположные стороны. Они имеют

одну и ту же физическую природу – это упругие силы каната. Сообщаемые обоим телам ускорения обратно пропорциональны массам тел.

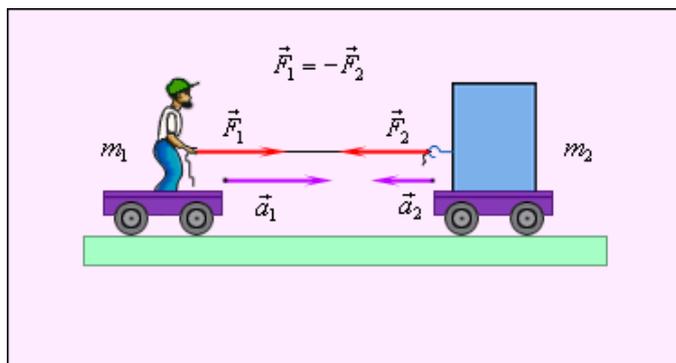


Рис.31. К третьему закону Ньютона

Силы, действующие между частями одного и того же тела, называются **внутренними**. Если тело движется как целое, то его ускорение определяется только внешней силой. Внутренние силы исключаются из второго закона Ньютона, так как их векторная сумма равна нулю. В качестве примера рассмотрим два тела с массами  $m_1$  и  $m_2$ , жестко связанные между собой невесомой нерастяжимой нитью идвигающиеся с одинаковым ускорением  $\vec{a}$  как единое целое под действием внешней силы  $\vec{F}$  (рис. 32).

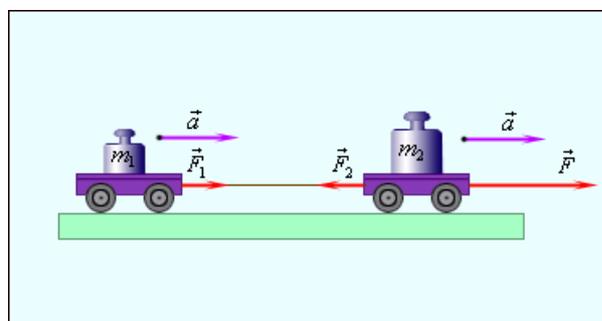


Рис. 32. Исключение внутренних сил

Между телами действуют внутренние силы, подчиняющиеся третьему закону Ньютона:  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ . Движение каждого тела зависит от сил взаимодействия между ними. Второй закон Ньютона, примененный к каждому телу в отдельности, дает

$$m_1 \cdot \vec{a}_1 = \vec{F}_1, \quad m_2 \cdot \vec{a}_2 = \vec{F}_2 + \vec{F}. \quad (55)$$

Складывая левые и правые части этих уравнений и принимая во внимание, что  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$  и  $F_2 = -F_1$ , получим:

$$(m_1 + m_2) \cdot \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} = \vec{F}. \quad (56)$$

Внутренние силы исключились из уравнения движения системы двух связанных тел.

Законы Ньютона справедливы для макротел при  $v \ll c$ , где  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с (скорость тела в вакууме) и только для инерциальных систем отсчёта.

### **Неинерциальные системы отсчёта. Силы инерции**

**Силы инерции** – силы, обусловленные ускоренным движением системы отсчёта относительно измеряемой системы отсчёта. Силы инерции вызываются не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчёта. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона, так как если на какое-либо тело действует сила инерции, то не существует противодействующей силы, приложенной к данному телу.

В неинерциальных системах отсчёта законы Ньютона, вообще говоря, не справедливы. Если же кроме сил, обусловленных взаимодействием тел друг на друга, рассмотреть и силы инерции, то второй закон Ньютона будет справедлив для любой системы отсчёта.

Второй закон Ньютона для неинерциальных систем отсчёта

$$m \cdot \vec{a}' = m \cdot \vec{a} + \vec{F}_{\text{ин}}. \quad (57)$$

**Произведение массы тела на ускорение в рассматриваемой системе отсчёта равно векторной сумме всех сил (включая и силы инерции), действующих на данное тело.** Силы инерции  $\vec{F}_{\text{ин}}$  должны быть такими, чтобы вместе с силами  $\vec{F}$ , обусловленными воздействием тел друг на друга, они сообщали телу ускорение  $\vec{a}'$ , каким оно обладает в неинерциальных системах отсчёта ( $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ ,  $\vec{a}$  – ускорение тела в инерциальной системе отсчёта).

Силы инерции обусловлены ускоренным движением системы отсчёта относительно измеряемой системы, поэтому в общем случае нужно учитывать следующие случаи проявления этих сил:

- силы инерции при ускоренном поступательном движении системы отсчёта;
- силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчёта;
- силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчёта.

Рассмотрим эти случаи.

Если тележку (рис. 33) привести в поступательное движение с ускорением  $\vec{a}_0$ , то нить начнёт отклоняться от вертикали назад до такого

угла  $\alpha$ , пока результирующая сила  $\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}$  не обеспечит ускорение шарика, равное  $a_0$ .

Таким образом, результирующая сила  $\vec{F}$  направлена в сторону ускорения тележки  $\vec{a}_0$  и для установившегося движения шарика (шарик теперь движется вместе с тележкой с ускорением  $a_0$ ) равна

$$F = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha = m \cdot a_0, \text{ откуда}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a_0}{g},$$

то есть угол отклонения нити от вертикали тем больше, чем больше ускорение тележки.

Относительно системы отсчёта, связанной с ускоренно движущейся тележкой, шарик покоится, что возможно, если сила  $\vec{F}$  уравновешивается силой  $\vec{F}_{\text{ин}}$ , которая является силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Таким образом,

$$\vec{F}_{\text{ин}} = -m \cdot \vec{a}_0. \quad (58)$$

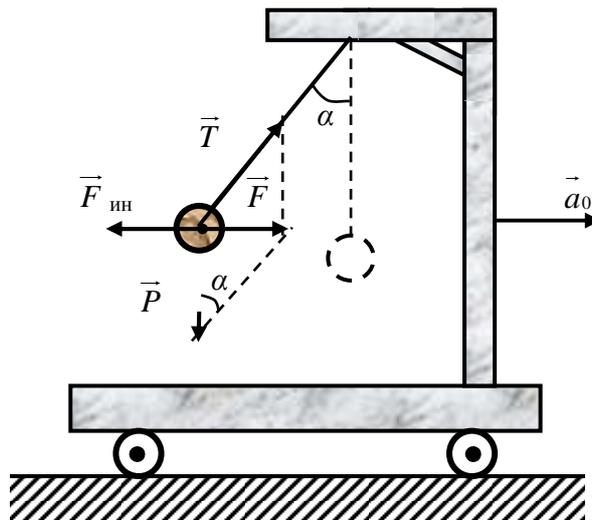


Рис. 33. Шарик, на нити подвешенный к штативу, находящемуся на тележке

Проявление сил инерции при поступательном движении наблюдается в повседневных явлениях. Например, когда поезд набирает скорость, то пассажир, сидящий по ходу поезда, под действием силы инерции прижимается к спинке сидения. Наоборот, при торможении поезда сила инерции направлена в противоположную сторону, и пассажир удаляется от спинки сидения. Особенно эти силы заметны при внезапном торможении поезда. Силы инерции проявляются в перегрузках, которые возникают при запуске и торможении космических кораблей.

Рассмотрим **силы инерции, действующие на тело, покоящееся во вращающейся системе отсчёта.**

На диске на разных расстояниях от оси вращения установлены маятники (на нитях подвешены шарики массой  $m$ ). При вращении диска маятники отклоняются от вертикали на некоторый угол  $\alpha$  (рис. 34).

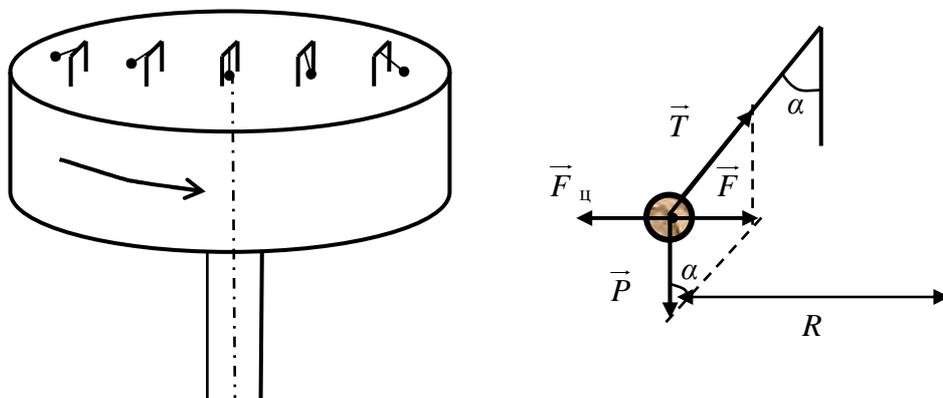


Рис. 34. Отклонение шариков при вращении маятников вместе с диском

В системе отсчёта, связанной, например, с помещением, шарик равномерно вращается по окружности радиусом  $R$  (расстояние от центра вращающегося шарика до оси вращения). Следовательно, на него действует сила, равная  $F = m \cdot \omega^2 \cdot R$  и направленная перпендикулярно оси вращения диска. Она является равнодействующей силы тяжести и силы натяжения нити

$$\vec{F} = \vec{P} + \vec{T}.$$

Для установившегося движения шарика

$F = m \cdot g \cdot \operatorname{tg} \alpha = m \cdot \omega^2 \cdot R \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \omega^2 \cdot R / g$  ( $\alpha$  тем больше, чем больше  $R$  и  $\omega$ ).

В системе отсчёта, связанной с вращающимся диском, шарик покоился, что возможно, если сила  $\vec{F}$  уравновешивается равной и противоположно направленной ей силой  $\vec{F}_{\text{ц}}$ , которая является не чем иным, как силой инерции, так как на шарик никакие другие силы не действуют. Сила  $\vec{F}_{\text{ц}}$ , называется центробежной силой инерции, направлена по горизонтали от оси вращения диска

$$\vec{F}_{\text{ц}} = -m \cdot \omega^2 \cdot R. \quad (59)$$

Действию центробежных сил подвергаются, например, пассажиры в движущемся транспортном средстве на поворотах, лётчики при выполнении фигур высшего пилотажа.

Центробежная сила инерции не зависит от скорости тел относительно вращающихся систем отсчёта, то есть действует на все тела, удалённые от оси вращения на конечное расстояние, независимо от того, покоится ли оно в этой системе или движется относительно неё с какой-то скоростью.

**Рассмотрим силы инерции, действующие на тело, движущееся во вращающейся системе отсчёта**

Пусть шарик массой  $m$  движется с постоянной скоростью  $v'$  вдоль радиуса равномерно вращающегося диска ( $v' = const, \omega = const, v' \perp \omega$ ). Если диск не вращается, то шарик, направленный вдоль радиуса, движется вдоль радиуса по радиальной прямой и попадает в точку  $A$ . Если же диск привести во вращение в направлении, указанном стрелкой, то шарик катится по кривой  $OB$  (рис. 35, *а*), причём его скорость  $v'$  относительно диска изменяет своё направление. Это возможно лишь тогда, если на шарик действует сила, перпендикулярная скорости  $v'$ .

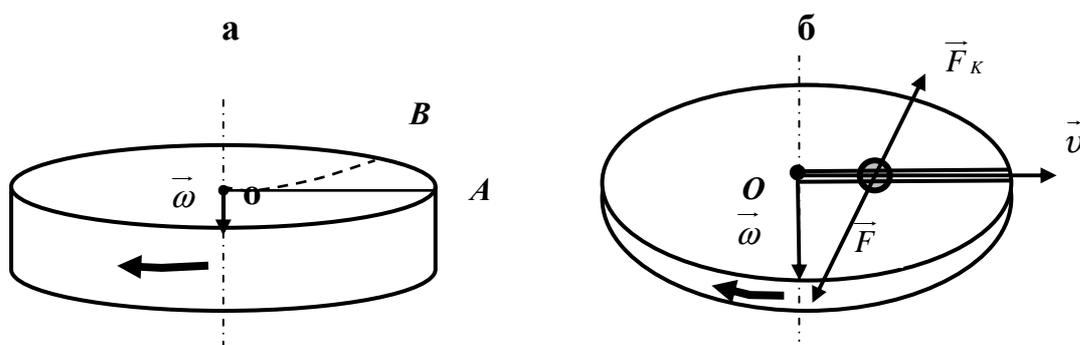


Рис. 35. Вращающийся диск

Для того чтобы заставить шарик катиться по вращающемуся диску вдоль радиуса, используем жёстко укрепленный вдоль радиуса диска стержень, на котором шарик движется без трения равномерно и прямолинейно со скоростью  $v'$  (рис. 35, *б*). При отклонении шарика стержень действует на него с силой  $\vec{F}$ . Относительно диска (вращающейся системы отсчёта) шарик движется равномерно и прямолинейно, что можно объяснить тем, что сила  $\vec{F}$  уравнивается приложенной к шарiku силой инерции  $\vec{F}_K$ , перпендикулярной скорости  $v'$ . Эта сила называется силой Кориолиса (в честь французского физика и инженера Г. Кориолиса (1792–1843)).

Можно показать, что сила Кориолиса

$$\vec{F}_K = 2 \cdot m \left[ \vec{v}', \vec{\omega} \right]. \quad (60)$$

Если тело движется в Северном полушарии на север, то действующая на него сила Кориолиса (вследствие вращения Земли) направлена вправо по отношению к направлению движения, то есть несколько отклонится на восток. Поэтому в Северном полушарии наблюдаются более сильное подмывание правых берегов рек; правые рельсы железнодорожных путей по движению изнашиваются быстрее, чем левые, и так далее.

Основной закон динамики для неинерциальных систем отсчёта

$$m \cdot \vec{a}' = \vec{F} + \vec{F}_u + \vec{F}_c + \vec{F}_k, \quad (61)$$

где  $F = m \cdot a$  – сила, обусловленная воздействием тел друг на друга;  $F_{и} = -m \cdot a_0$  (58) – сила инерции;  $F_{ц} = -m \cdot \omega^2 \cdot R$  (59) – центробежная сила инерции;  $\vec{F}_k = 2 \cdot m \left[ \vec{v}', \vec{\omega} \right]$  (60) – сила Кориолиса.

Особенности сил инерции.

❖ Силы инерции обусловлены не взаимодействием тел, а ускоренным движением системы отсчёта. Поэтому они не подчиняются третьему закону Ньютона.

❖ Силы инерции действуют только в неинерциальных системах отсчёта.

При некоторых условиях силы инерции и силы тяготения невозможно различить. Например, движение тел в равноускоренном лифте происходит точно так же, как и в неподвижном лифте, висящем в однородном поле тяжести. Никакой эксперимент, выполненный внутри лифта, не может отделить однородное поле тяготения от однородного поля сил инерции.

Аналогия между силами тяготения и силами инерции лежит в основе принципа эквивалентности гравитационных сил и сил инерции (**принципа эквивалентности Эйнштейна**): все физические явления в поле тяготения происходят совершенно так же, как и в соответствующем поле сил инерции, если напряжённости обоих полей в соответствующих точках пространства совпадают, а прочие начальные условия для рассматриваемых тел одинаковы. Этот принцип является основой общей теории относительности.

### **Силы в механике. Вес тела**

**Силу тяжести**  $m \cdot \vec{g}$ , с которой тела притягиваются к Земле, нужно отличать от веса тела. **Весом тела называют силу, с которой тело, вследствие его притяжения к Земле, действует на опору или подвес.**

При этом предполагается, что тело **неподвижно относительно опоры или подвеса**.

Пусть тело лежит на неподвижном относительно Земли горизонтальном столе (рис. 36).

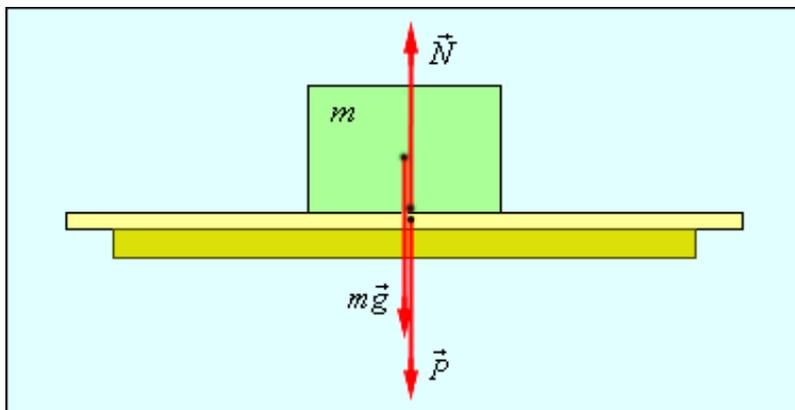


Рис.36. Тело, лежащее на неподвижном относительно Земли горизонтальном столе

Систему отсчета, связанную с Землей, будем считать **инерциальной**. На тело действуют сила тяжести  $\vec{F}_T = m \cdot \vec{g}$ , направленная вертикально вниз, и сила упругости  $\vec{N}$ , с которой опора действует на тело. Силу  $\vec{N}$  называют **силой нормального давления** или **силой реакции опоры**. Силы, действующие на тело, уравнивают друг друга:  $\vec{F}_T = -\vec{N}$ . В соответствии с третьим законом Ньютона тело действует на опору с некоторой силой  $\vec{P}$ , равной по модулю силе реакции опоры и направленной в противоположную сторону:  $\vec{P} = -\vec{N}$ . По определению сила  $\vec{P}$  и называется весом тела. Из приведенных выше соотношений видно, что  $\vec{P} = \vec{F}_T = m \cdot \vec{g}$ , то есть вес тела  $\vec{P}$  равен силе тяжести  $m \cdot \vec{g}$ .

**Но эти силы приложены к разным телам** (рис. 36, рис. 37). Кроме того, сила тяжести – гравитационная сила (она приблизительно равна силе гравитационного притяжения тела к Земле

$$F = G \frac{mM}{R^2},$$

где  $m$  – масса тела,  $M$  – масса Земли,  $R$  – радиус Земли,  $G$  – гравитационная постоянная), вес тела – сила упругости.

Если тело неподвижно висит на пружине, то роль силы реакции опоры (подвеса) играет упругая сила пружины.

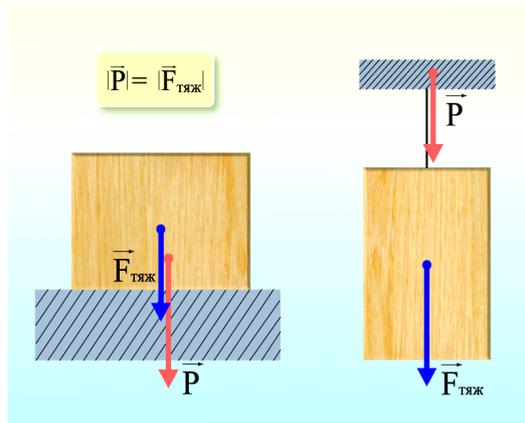


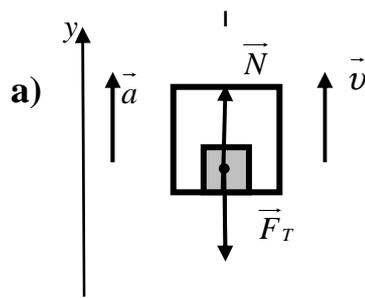
Рис. 37. Сила тяжести и вес тела

Решим задачу. На дне шахтной клетки лежит груз массой 100 кг. Каков будет вес груза, если клеть: а) поднимается вверх с ускорением  $0,3 \text{ м/с}^2$ ; б) опускается с ускорением  $0,4 \text{ м/с}^2$ ; в) движется равномерно; г) свободно падает.

Дано:  
 $m = 100 \text{ кг}$   
 $a_1 = 0,3 \text{ м/с}^2$   
 $a_2 = 0,4 \text{ м/с}^2$   
 $a_3 = 0$   
 $a_4 = g$

$P_1 - ?$   
 $P_2 - ?$   
 $P_3 - ?$   
 $P_4 - ?$

Решение:



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

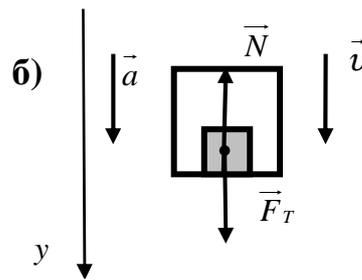
$$\vec{N} + m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_1$$

$$N = m \cdot a_1 + m \cdot g$$

$$N = m \cdot (g + a)$$

По 3-ему закону Ньютона  $|P| = |N| \Rightarrow$

$$P = m \cdot (g + a_1) = 1010 \text{ Н.}$$



$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$\vec{N} + m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}_2$$

$$-N + m \cdot g = m \cdot a_2$$

$$N = m \cdot (g - a)$$

Т.к.  $|P| = |N| \Rightarrow$

$$P = m \cdot (g - a_2) = 940 \text{ Н.}$$

в)  $P = m \cdot g = 980 \text{ Н};$

г) тело находится в невесомости  $P = 0.$

Таким образом, вес тела равен силе тяжести, когда тело покоится или движется равномерно и прямолинейно вверх или вниз

$$P = m \cdot g . \tag{62}$$

Вес тела, опускающегося с ускорением или поднимающегося с замедлением, уменьшается и становится меньше силы тяжести. В этом случае

$$P = m \cdot (g - a). \quad (63)$$

Если тело свободно падает,  $a = g$  и  $P = 0$ . Это явление называется невесомостью.

Вес тела, поднимающегося с ускорением или опускающегося с замедлением, увеличивается и становится больше силы тяжести и его веса в состоянии покоя. Такое состояние называется перегрузкой (рис. 38). В этом случае

$$P = m \cdot (g + a). \quad (64)$$

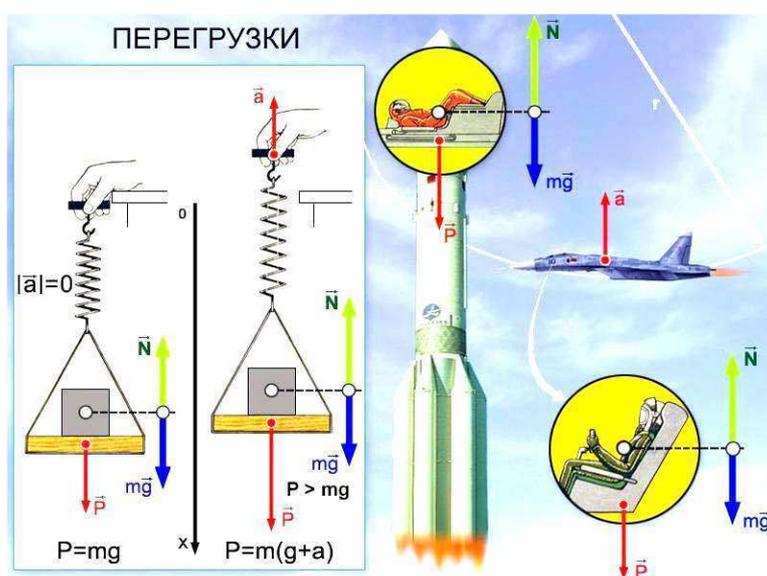


Рис. 38. Перегрузки

Перегрузкой  $n$  называют также величину, показывающую, во сколько раз вес тела  $P$ , поднимающегося с ускорением или опускающегося с замедлением, больше веса этого же тела в состоянии покоя  $P_0$ :

$$n = \frac{P}{P_0}. \quad (65)$$

### Сила упругости. Закон Гука

При деформации тела возникает сила, которая стремится восстановить прежние размеры и форму тела. Эта сила возникает вследствие электромагнитного взаимодействия между атомами и молекулами вещества. Ее называют силой упругости.

Простейшим видом деформации является деформация растяжения или сжатия (рис. 39).

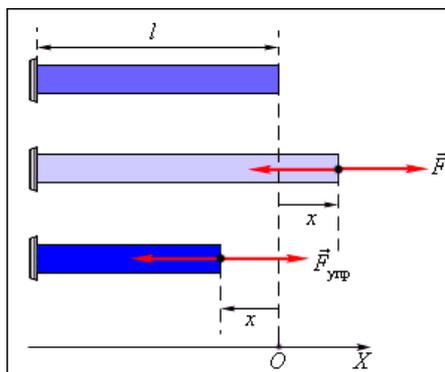


Рис. 39. Деформация растяжения ( $x > 0$ ) и сжатия ( $x < 0$ )

При малых деформациях ( $|x| \ll l$ ) сила упругости пропорциональна деформации тела и направлена в сторону, противоположную направлению перемещения частиц тела при деформации

$$F_x = F_{\text{упр}} = -k \cdot x. \quad (66)$$

Это соотношение выражает экспериментально установленный закон Гука. Коэффициент  $k$  называется жесткостью тела. В системе СИ жесткость измеряется в ньютонах на метр (Н/м). Коэффициент жесткости зависит от формы и размеров тела, а также от материала. В физике закон Гука для деформации растяжения или сжатия принято записывать в другой форме. Отношение  $\varepsilon = x/l$  называется относительной деформацией, а отношение  $\sigma = F/S = -F_{\text{упр}}/S$ , где  $S$  – площадь поперечного сечения деформированного тела, называется напряжением. Тогда закон Гука можно сформулировать так: относительная деформация  $\varepsilon$  пропорциональна напряжению  $\sigma$

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma. \quad (67)$$

Коэффициент  $E$  в этой формуле называется модулем Юнга. Модуль Юнга зависит только от свойств материала и не зависит от размеров и формы тела. Для различных материалов модуль Юнга меняется в широких пределах. Для стали, например,  $E \approx 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, а для резины  $E \approx 2 \cdot 10^6$  Н/м<sup>2</sup>, то есть на пять порядков меньше.

Закон Гука может быть обобщен и на случай более сложных деформаций. Например, при деформации изгиба упругая сила пропорциональна прогибу стержня, концы которого лежат на двух опорах (рис. 40).

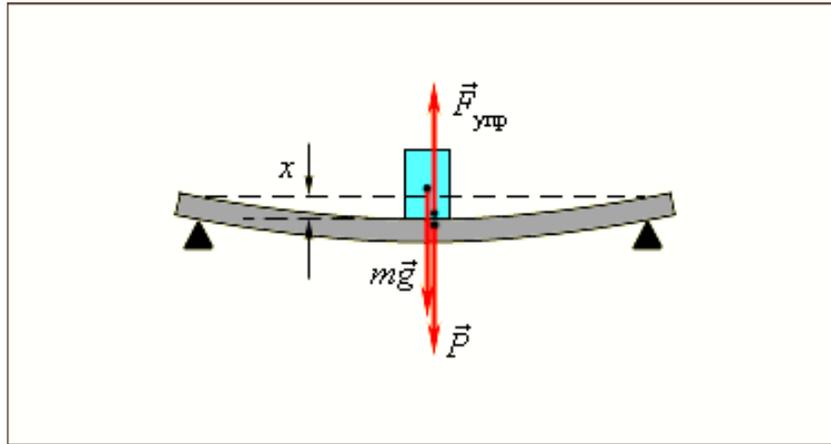


Рис.40. Деформация изгиба

Упругую силу  $\vec{N}$ , действующую на тело со стороны опоры (или подвеса), называют силой реакции опоры. При соприкосновении тел сила реакции опоры направлена перпендикулярно поверхности соприкосновения. Поэтому ее часто называют силой нормального давления. Если тело лежит на горизонтальном неподвижном столе, сила реакции опоры направлена вертикально вверх и уравнивает силу тяжести  $\vec{N} = -m \cdot \vec{g}$ . Сила  $\vec{P}$ , с которой тело действует на стол, называется весом тела.

В технике часто применяются спиралеобразные пружины (рис. 41). При растяжении или сжатии пружин возникают упругие силы, которые также подчиняются закону Гука. Коэффициент  $k$  называют жесткостью пружины. В пределах применимости закона Гука пружины способны сильно изменять свою длину. Поэтому их часто используют для измерения сил. Пружину, растяжение которой проградуировано в единицах силы, называют динамометром. Следует иметь в виду, что при растяжении или сжатии пружины в её витках возникают сложные деформации кручения и изгиба.

В отличие от пружин и некоторых эластичных материалов (например, резины) деформация растяжения или сжатия упругих стержней (или проволок) подчиняется линейному закону Гука в очень узких пределах. Для металлов относительная деформация  $\varepsilon = x/l$  не должна превышать 1%. При больших деформациях возникают необратимые явления (текучесть) и разрушение материала.

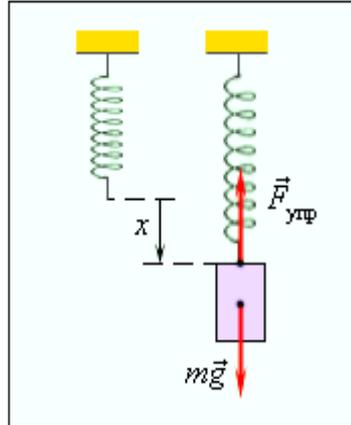


Рис.41. Деформация растяжения пружины

Рассмотрим прямоугольный брусок, закрепленный неподвижно нижней гранью (рис. 42). Под действием силы  $F$ , приложенной к верхней грани, брусок получает деформацию, называемую сдвигом. Величина  $\gamma$ , равная тангенсу угла сдвига  $\varphi$ , называется относительным сдвигом.

При упругих деформациях угол  $\varphi$  бывает очень мал, поэтому  $\operatorname{tg} \varphi \approx \varphi$ . Таким образом, относительный сдвиг определяется формулой

$$\gamma = \operatorname{tg} \varphi \approx \varphi. \quad (68)$$

Деформация сдвига приводит к возникновению в каждой точке бруска тангенциального упругого напряжения  $\tau$ , которое определяется как модуль силы, приходящейся на единицу площади

$$\tau = \frac{F_{\text{упр.}\parallel}}{S}. \quad (69)$$

Здесь  $S$  – площадь воображаемой поверхности, параллельной верхней грани бруска (например,  $AB$  на рис. 42). Предполагается, что действие внешней силы  $F$  распределено равномерно по верхней грани. Значок  $\parallel$  указывает на то, что сила  $F_{\text{упр}}$ , параллельна к площадке, на которую она действует.

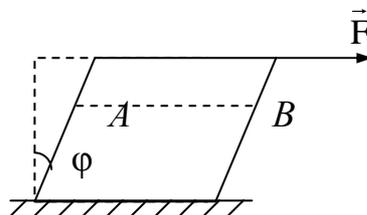


Рис. 42. К деформации сдвига

Опыт дает, что относительный сдвиг пропорционален напряжению

$$\gamma = \frac{1}{G} \cdot \tau. \quad (70)$$

Величина  $G$  зависит только от свойств материала и называется модулем сдвига. Он равен такому тангенциальному напряжению, при котором  $\gamma = \operatorname{tg} \varphi$  был бы равен единице (при  $\varphi = 45^\circ$ ), если бы столь огромные упругие деформации были возможны. Измеряется  $G$  в паскалях.

### **Упругие свойства реальных тел**

Реальные тела можно считать упругими лишь при очень малых деформациях. Если же деформации превышают некоторую предельную величину (она для разных тел разная), то свойства тел оказываются очень отличными от свойств упругих тел. Ниже (рис. 43) приведена диаграмма напряжений (график зависимости  $\sigma$  от относительной деформации  $\varepsilon$ ).

Линейная зависимость  $\sigma(\varepsilon)$ , установленная Гуком, выполняется лишь в очень узких пределах до **предела пропорциональности** ( $\sigma_{\text{п}}$ ). При дальнейшем увеличении напряжения деформация ещё упругая (хотя зависимость  $\sigma(\varepsilon)$ , а – уже нелинейная) и до **предела упругости** ( $\sigma_{\text{у}}$ ) остаточные деформации не возникают.

За пределами упругости в теле возникают остаточные деформации и график, описывающий возвращение тела в первоначальное состояние после прекращения действия силы, изобразится не кривой  $BO$ , а параллельной ей –  $CF$ .

Напряжение, при котором проявляется заметная остаточная деформация ( $\approx 0,2\%$ ), называется **пределом текучести** ( $\sigma_{\text{Т}}$ ) – точка  $C$  на кривой. В области  $CD$  деформация возрастает без увеличения напряжения, то есть тело как бы «течёт». Эта область называется **областью текучести** (или областью **пластических деформаций**).

Материалы, для которых область текучести значительна, называются вязкими; для которых же она практически отсутствует, – хрупкими. При дальнейшем растяжении (за точку  $D$ ) происходит разрушение тела. Максимальное напряжение, возникающее в теле до разрушения, называется **пределом прочности** ( $\sigma_{\text{р}}$ ).

Диаграмма напряжений для реальных твёрдых тел зависит от различных факторов. Одно и то же твёрдое тело может при кратковременном действии сил проявлять себя как хрупкое, а при длительных, но слабых – как текучее.

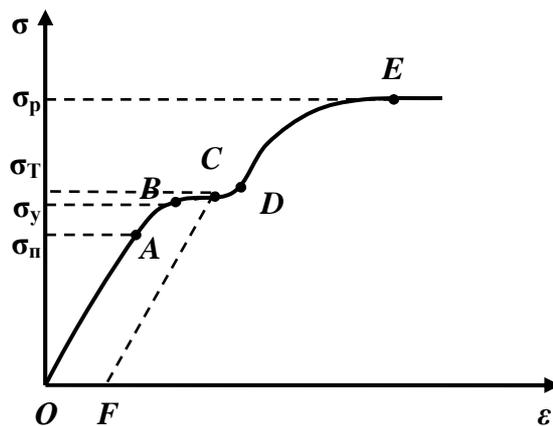


Рис.43. Диаграмма напряжений

### Сила трения

Трение – один из видов взаимодействия тел. Оно возникает при соприкосновении двух тел. Трение, как другие виды взаимодействия, подчиняется третьему закону Ньютона: если на одно из тел действует сила трения, то такая же по модулю, но направленная в противоположную сторону сила действует и на второе тело. Силы трения, как и упругие силы, имеют электромагнитную природу. Они возникают вследствие взаимодействия между атомами и молекулами соприкасающихся тел.

Силами сухого трения называют силы, возникающие при соприкосновении двух твердых тел при отсутствии между ними жидкой или газообразной прослойки. Они всегда направлены по касательной к соприкасающимся поверхностям.

Сухое трение, возникающее при относительном покое тел, называют трением покоя. Сила трения покоя всегда равна по величине внешней силе и направлена в противоположную сторону (рис. 44).

Сила трения покоя не может превышать некоторого максимального значения  $(F_{тр})_{max}$ . Если внешняя сила больше  $(F_{тр})_{max}$ , возникает относительное проскальзывание. Силу трения в этом случае называют силой трения скольжения. Она всегда направлена в сторону, противоположную направлению движения и, вообще говоря, зависит от относительной скорости тел. Однако во многих случаях приближенно силу трения скольжения можно считать независимой от величины относительной скорости тел и равной максимальной силе трения покоя. Эта модель силы сухого трения применяется при решении многих простых физических задач.

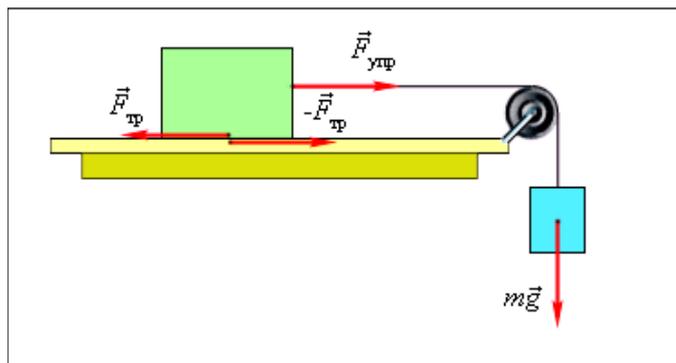


Рис. 44. Сила трения покоя ( $v = 0$ ;  $\vec{F}_{тр} = -\vec{F}_{упр}$ )

Опыт показывает, что сила трения скольжения пропорциональна силе нормального давления тела на опору, а следовательно, и силе реакции опоры  $\vec{N}$

$$F_{тр} = (F_{тр})_{max} = \mu \cdot N. \quad (71)$$

Коэффициент пропорциональности  $\mu$  называют коэффициентом трения скольжения. Коэффициент трения  $\mu$  – величина безразмерная. Обычно коэффициент трения меньше единицы. Он зависит от материалов соприкасающихся тел и от качества обработки поверхностей. При скольжении сила трения направлена по касательной к соприкасающимся поверхностям в сторону, противоположную относительной скорости (рис. 45).

При движении твердого тела в жидкости или газе возникает сила вязкого трения. Сила вязкого трения значительно меньше силы сухого трения. Она также направлена в сторону, противоположную относительной скорости тела. При вязком трении нет трения покоя.

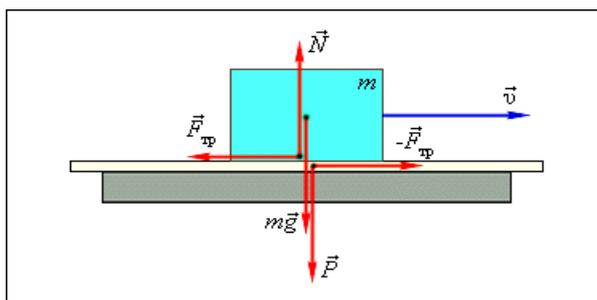


Рис. 45. Силы трения при скольжении ( $v \neq 0$ )

Сила вязкого трения сильно зависит от скорости тела. При достаточно малых скоростях  $F_{тр} \sim v$ , при больших скоростях  $F_{тр} \sim v^2$ . При этом коэффициенты пропорциональности в этих соотношениях зависят от формы тела.

Силы трения возникают и при качении тела. Однако силы трения качения обычно достаточно малы. При решении простых задач этими силами пренебрегают.

### Закон сохранения импульса

Тела, входящие в систему, могут взаимодействовать как между собой, так и с телами, не принадлежащими данной системе. В соответствии с этим силы, действующие на тела замкнутой системы, можно разделить на внутренние и внешние. Силы, с которыми на данное тело воздействуют остальные тела замкнутой системы, называются внутренними ( $\vec{F}_{ik}$ ). Внешние силы – это силы, обусловленные воздействием тел, не принадлежащих системе ( $\vec{f}_i$ ).

Второй закон Ньютона для такой системы запишется в виде

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i \neq n} \vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{f}_i, \quad (72)$$

где  $\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i$  – суммарный импульс тел, входящих в замкнутую систему;  $\sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik}$  – сумма внутренних сил системы тел;  $\sum_{i=1}^n \vec{f}_i$  – сумма внешних сил, действующих на тела системы.

Пусть мы имеем замкнутую систему, состоящую из трех тел (рис. 46). Внешние силы обозначим  $\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3$ , внутренние  $\vec{F}_{12}, \vec{F}_{21}, \vec{F}_{13}, \vec{F}_{31}, \vec{F}_{23}, \vec{F}_{32}$ .

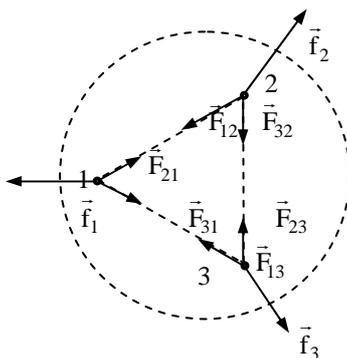


Рис. 46. Система из трёх тел

По третьему закону Ньютона

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21},$$

$$\begin{aligned}\vec{F}_{13} &= -\vec{F}_{31}, \\ \vec{F}_{32} &= -\vec{F}_{23}.\end{aligned}$$

Запишем для каждого из трех тел уравнение второго закона Ньютона в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{f}_1; \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \vec{f}_2; \\ \frac{d\vec{p}_3}{dt} &= \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \vec{f}_3.\end{aligned}$$

Сложим все три уравнения вместе. Сумма всех внутренних сил будет равна нулю согласно третьему закону Ньютона, вследствие чего

$$d(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \vec{p}_3) = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3,$$

или

$$d \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i = \sum_{i=1}^3 \vec{f}_i.$$

В случае если система замкнута, то внешние силы отсутствуют (**замкнутой** называется система тел, на которую не действуют внешние силы)

$$\sum_{i=1}^3 \vec{f}_i = 0,$$

тогда

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i = 0, \text{ т.е. } \sum_{i=1}^3 \vec{p}_i = \text{const}.$$

Этот результат легко обобщить на систему, состоящую из произвольного числа тел. Уравнение второго закона Ньютона для  $n$  тел можно представить следующим образом:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i \neq k} \vec{F}_{ik} + \sum_{i=1}^n \vec{f}_i.$$

Складывая эти уравнения с учетом того, что  $\vec{F}_{ik} = -\vec{F}_{ki}$ , получим:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \sum_{i=1}^n \vec{f}_i. \quad (73)$$

То есть **производная по времени от полного импульса системы равна векторной сумме всех внешних сил, приложенных к телам системы.** Для замкнутой системы правая часть уравнения равна нулю

( $\sum_{i=1}^n \vec{f}_i = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$ ), вследствие чего  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i$  не зависит от времени. В этом и состоит закон сохранения импульса, который формулируется следующим образом: **полный импульс замкнутой системы не изменяется.**

В основе сохранения импульса лежит однородность пространства, то есть одинаковость свойств пространства во всех точках. Одинаковость следует понимать в том смысле, что параллельный перенос замкнутой системы из одного места пространства в другое без изменения взаимного расположения и скоростей частиц не изменяет механические свойства системы (предполагается, что на новом месте замкнутость системы не нарушается).

Импульс – векторная величина, поэтому можно сформулировать закон сохранения импульса так: **в замкнутой системе векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему, остается постоянной при любых взаимодействиях тел этой системы между собой.**

Рассмотрим какие-либо два взаимодействующих тела, входящих в состав замкнутой системы. Силы взаимодействия между этими телами обозначим через  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . По третьему закону Ньютона  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$ . Если эти тела взаимодействуют в течение времени  $t$ , то импульсы сил взаимодействия одинаковы по модулю и направлены в противоположные стороны:  $\vec{F}_2 \cdot t = -\vec{F}_1 \cdot t$ . Применим к этим телам второй закон Ньютона

$$\vec{F}_1 \cdot t = m_1 \cdot \vec{v}'_1 - m_1 \cdot \vec{v}_1; \quad \vec{F}_2 \cdot t = m_2 \cdot \vec{v}'_2 - m_2 \cdot \vec{v}_2,$$

где  $m_1 \cdot \vec{v}_1$  и  $m_2 \cdot \vec{v}_2$  – импульсы тел в начальный момент времени,  $m_1 \cdot \vec{v}'_1$  и  $m_2 \cdot \vec{v}'_2$  – импульсы тел в конце взаимодействия. Из этих соотношений следует

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{v}'_1 + m_2 \cdot \vec{v}'_2. \quad (74)$$

Это равенство означает, что в результате взаимодействия двух тел их суммарный импульс не изменился.

Рис. 47 иллюстрирует закон сохранения импульса на примере нецентрального соударения двух шаров разных масс, один из которых до соударения находился в состоянии покоя.

Изображенные на рис. 47 вектора импульсов шаров до и после соударения можно спроектировать на координатные оси  $OX$  и  $OY$ . Закон сохранения импульса выполняется и для проекций векторов на каждую ось. В частности, из диаграммы импульсов (рис. 47) следует, что проекции векторов  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$  импульсов обоих шаров после соударения на ось

$OY$  должны быть одинаковы по модулю и иметь разные знаки, чтобы их сумма равнялась нулю.

Закон сохранения импульса во многих случаях позволяет находить скорости взаимодействующих тел даже тогда, когда значения действующих сил неизвестны. Примером может служить реактивное движение.

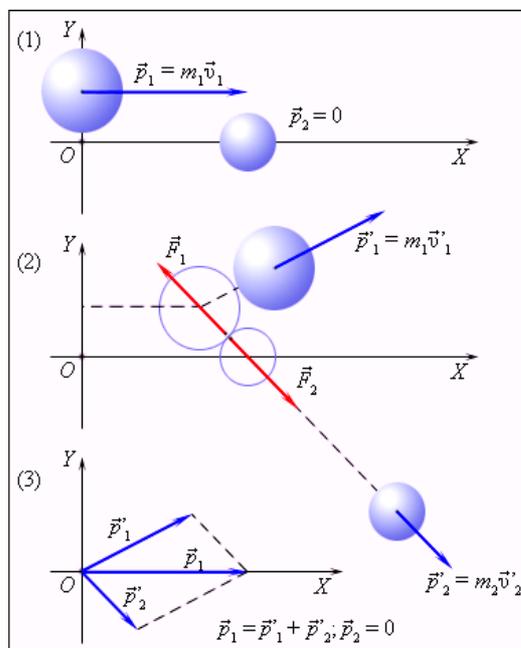


Рис. 47. Нецентрального соударения шаров разных масс:

- 1 – импульсы до соударения;
- 2 – импульсы после соударения;
- 3 – диаграмма импульсов

При стрельбе из орудия возникает отдача: снаряд движется вперед, а орудие откатывается назад. Снаряд и орудие – два взаимодействующих тела. Скорость, которую приобретает орудие при отдаче, зависит только от скорости снаряда и отношения масс (рис. 48).

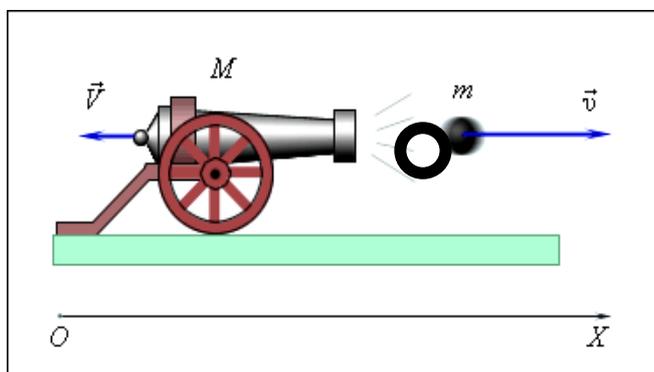


Рис. 48. Отдача при выстреле из орудия

Если скорости орудия и снаряда обозначить через  $\vec{V}$  и  $\vec{v}$ , а их массы через  $M$  и  $m$ , то на основании закона сохранения импульса можно записать в проекциях на ось  $OX$

$$M \cdot V + m \cdot v = 0; \quad V = -\frac{m}{M} \cdot v. \quad (75)$$

На принципе отдачи основано реактивное движение. В ракете при сгорании топлива газы, нагретые до высокой температуры, выбрасываются из сопла с большой скоростью  $\vec{u}$  относительно ракеты. Обозначим массу выброшенных газов через  $m$ , а массу ракеты после истечения газов через  $M$ . Тогда для замкнутой системы «ракета + газы» можно записать на основании закона сохранения импульса (по аналогии с задачей о выстреле из орудия)

$$V = -\frac{m}{M} \cdot u, \quad (76)$$

где  $V$  – скорость ракеты после истечения газов.

Здесь предполагалось, что начальная скорость ракеты равнялась нулю.

### **Закон движения центра масс**

Воображаемая точка  $C$ , положение которой характеризует распределение массы этой системы (тела) называется центром масс системы материальных точек (тела). Для определения положения центра масс достаточно поочередно подвесить тело за две различные точки на его поверхности и провести через точки подвеса вертикали, пересечение которых даст положение центра масс (центр масс может располагаться вне тела).

Радиус-вектор центра масс

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{r}_i}{m}, \quad (77)$$

где  $m_i$  и  $\vec{r}_i$  – соответственно масса и радиус-вектор  $i$ -ой материальной точки;  $n$  – число материальных точек в системе;  $m = \sum_{i=1}^n m_i$  – масса системы.

Скорость центра масс

$$\vec{v}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i}{m}. \quad (78)$$

$$\text{Учли, что } \vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \frac{dr_i}{dt}}{m} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot \vec{v}_i}{m}.$$

Импульс системы материальных точек равен произведению массы системы на скорость её центра масс

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}_c. \quad (79)$$

**Закон движения центра масс:** центр масс движется как материальная точка, в которой сосредоточена масса всей системы и на которую действует сила, равная геометрической сумме всех внешних сил, приложенных к системе

$$m \cdot \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n. \quad (80)$$

### **Уравнение движения тела переменной массы**

Полученная формула для скорости ракеты (76) справедлива лишь при условии, что вся масса сгоревшего топлива выбрасывается из ракеты одновременно. На самом деле истечение происходит постепенно в течение всего времени ускоренного движения ракеты. Каждая последующая порция газа выбрасывается из ракеты, которая уже приобрела некоторую скорость.

Для получения точной формулы процесс истечения газа из сопла ракеты нужно рассмотреть более детально. Пусть ракета в момент времени  $t$  имеет массу  $M$  и движется со скоростью  $\vec{v}$  (рис. 49 (1)). В течение малого промежутка времени  $\Delta t$  из ракеты будет выброшена некоторая порция газа с относительной скоростью  $\vec{u}$ . Ракета в момент  $t + \Delta t$  будет иметь скорость  $\vec{v} + \Delta\vec{v}$ , а её масса станет равной  $M + \Delta M$ , где  $\Delta M < 0$  (рис. 49 (2)). Масса выброшенных газов будет, очевидно, равна  $\Delta M > 0$ . Скорость газов в инерциальной системе ОХ будет равна  $\vec{v} + \vec{u}$ .

Применим закон сохранения импульса. В момент времени  $t + \Delta t$  импульс ракеты равен  $(M + \Delta M) \cdot (\vec{v} + \Delta\vec{v})$ , а импульс испущенных газов равен  $(-\Delta M) \cdot (\vec{v} + \vec{u})$ . В момент времени  $t$  импульс всей системы был равен  $M \cdot \vec{v}$ . Предполагая систему «ракета + газы» замкнутой, можно записать

$$M \cdot \vec{v} = (M + \Delta M) \cdot (\vec{v} + \Delta\vec{v}) - \Delta M \cdot (\vec{v} + \vec{u}),$$

или

$$M \cdot \Delta\vec{v} = \Delta M \cdot \vec{u} - \Delta M \cdot \Delta\vec{v}. \quad (81)$$

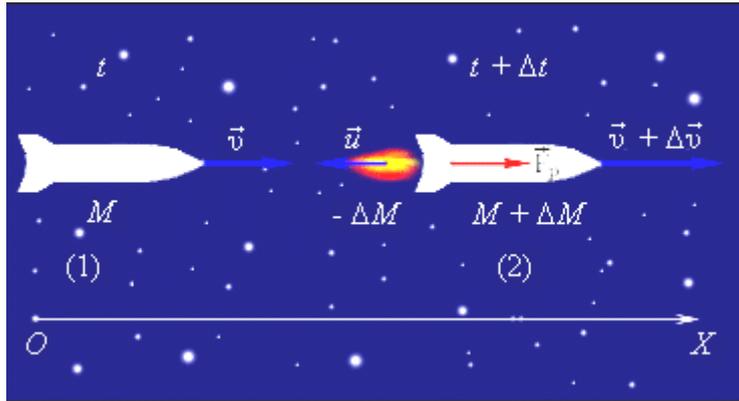


Рис. 49. Ракета, движущаяся в свободном пространстве (без гравитации)

Величиной  $\Delta M \cdot \Delta \vec{v}$  можно пренебречь, так как  $|\Delta M| \ll M$ . Разделив обе части последнего соотношения на  $\Delta t$  и перейдя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , получим:

$$M \cdot \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta M}{\Delta t} \cdot \vec{u} \quad (\Delta t \rightarrow 0) \text{ или } M \cdot \vec{a} = -\mu \cdot \vec{u}. \quad (82)$$

Величина  $\mu = -\frac{\Delta M}{\Delta t}$  ( $\Delta t \rightarrow 0$ ) есть расход топлива в единицу времени. Величина  $-\mu \cdot \vec{u}$  называется реактивной силой тяги  $\vec{F}_P$ . **Реактивная сила тяги** действует на ракету со стороны истекающих газов, она направлена в сторону, противоположную относительной скорости. Соотношение

$$M \cdot \vec{a} = \vec{F}_P = -\mu \cdot \vec{u} \quad (83)$$

выражает второй закон Ньютона для тела переменной массы. Если газы выбрасываются из сопла ракеты строго назад (рис. 49), то в скалярной форме это соотношение принимает вид

$$M \cdot a = \mu \cdot u, \quad (84)$$

где  $u$  – модуль относительной скорости. С помощью математической операции интегрирования ( $M \frac{dv}{dt} = -u \frac{dM}{dt} \Rightarrow v = -u \int \frac{dM}{M} = -u \ln M + C$ ;

$C$  определяется из начальных условий; если стартовая масса  $M_0$ , то  $C = u \ln \frac{M_0}{M}$ ); из этого соотношения можно получить формулу для конечной скорости  $v$  ракеты

$$v = u \ln \left( \frac{M_0}{M} \right), \quad (85)$$

где  $M_0 / M$  – отношение начальной и конечной масс ракеты. Эта формула называется **формулой Циолковского**. Из нее следует, что конечная скорость ракеты может превышать относительную скорость истечения газов. Следовательно, ракета может быть разогнана до больших скоростей, необходимых для космических полетов. Но это может быть достигнуто только путем расхода значительной массы топлива, составляющей большую долю первоначальной массы ракеты. Например, для достижения первой космической скорости  $v = v_I = 7,9 \cdot 10^3$  м/с при  $u = 3 \cdot 10^3$  м/с (скорости истечения газов при сгорании топлива бывают порядка 2–4 км/с) стартовая масса одноступенчатой ракеты должна примерно в 14 раз превышать конечную массу. Для достижения конечной скорости  $v = 4 \cdot u$  отношение  $\frac{M_0}{M}$  должно быть равно 50. Значительное снижение стартовой массы ракеты может быть достигнуто при использовании многоступенчатых ракет, когда ступени ракеты отделяются по мере выгорания топлива. Из процесса последующего разгона ракеты исключаются массы контейнеров, в которых находилось топливо, отработавшие двигатели, системы управления и т. д. Именно по пути создания экономичных многоступенчатых ракет развивается современное ракетостроение.

### 1.3. Работа и механическая энергия

#### *Механическая работа и мощность*

Энергия – универсальная мера различных форм движения и взаимодействия. Энергетические характеристики движения вводятся на основе понятия механической работы или работы силы.

Работой  $A$ , совершаемой постоянной силой  $\vec{F}$ , называется физическая величина, равная произведению модулей силы и перемещения, умноженному на косинус угла  $\alpha$  между векторами силы  $\vec{F}$  и перемещения  $\vec{S}$  (рис. 50):

$$A = F \cdot S \cos \alpha. \quad (86)$$

Работа является скалярной величиной. Она может быть как положительна ( $0^\circ \leq \alpha < 90^\circ$ ), так и отрицательна ( $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ ). При  $\alpha = 90^\circ$  работа, совершаемая силой, равна нулю. В системе СИ работа измеряется в джоулях (Дж).

1 Дж равен работе, совершаемой силой в 1 Н на перемещении 1 м в направлении действия силы.

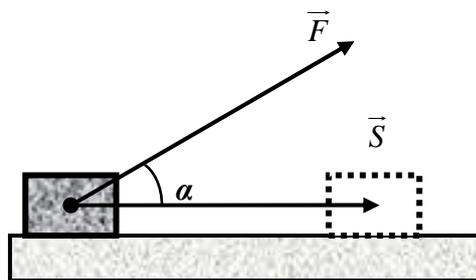


Рис.50. К определению работы постоянной силы

Если проекция  $\vec{F}_s$  силы  $\vec{F}$  на направление перемещения  $\vec{S}$  не остается постоянной, работу следует вычислять для малых перемещений  $\Delta S_i$  и суммировать результаты

$$A = \sum \Delta A_i = \sum F_{Si} \cdot \Delta S_i. \quad (87)$$

Элементарная работа силы  $\vec{F}$  на перемещении  $d\vec{r}$

$$dA = F dr = F \cos \alpha dS = F_s dS. \quad (88)$$

Сумма (87) в пределе ( $\Delta S_i \rightarrow 0$ ) переходит в интеграл. Работа силы на участке 1–2

$$A = \int_1^2 F dS \cos \alpha = \int_1^2 F_s dS. \quad (89)$$

Искомая работа определяется на графике (рис. 51) площадью заштрихованной фигуры, в этом состоит геометрический смысл выражения для  $A$ .

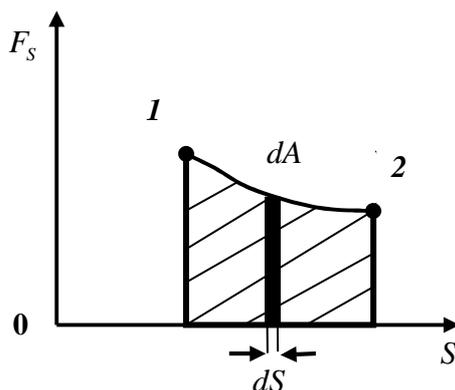


Рис. 51. Геометрический смысл выражения для работы

Примером силы, модуль которой зависит от координаты, может служить упругая сила пружины, подчиняющаяся закону Гука. Для того

чтобы растянуть пружину, к ней нужно приложить внешнюю силу  $\vec{F}$ , модуль которой пропорционален удлинению пружины (рис. 52).

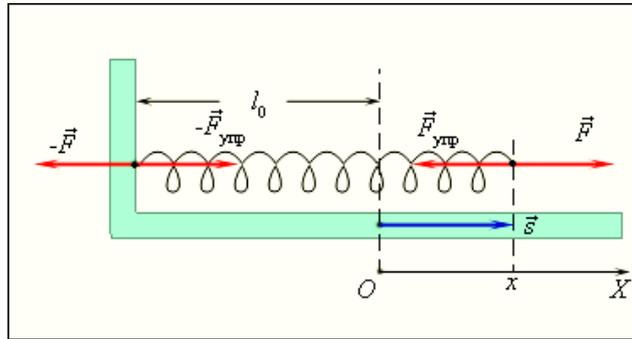


Рис. 52. Растянутая пружина

Зависимость модуля внешней силы от координаты  $x$  изображается на графике прямой линией (рис. 53).

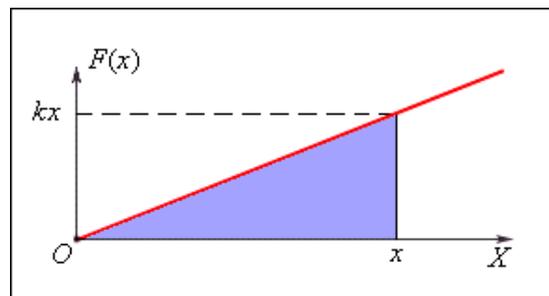


Рис. 53. Зависимость модуля внешней силы от координаты при растяжении пружины

По площади треугольника на рис. 53 можно определить работу, совершенную внешней силой, приложенной к правому свободному концу пружины:

$$A = \frac{k \cdot x^2}{2}. \quad (90)$$

Этой же формулой выражается работа, совершенная внешней силой при сжатии пружины. В обоих случаях работа упругой силы  $\vec{F}_{\text{упр}}$  равна по модулю работе внешней силы  $\vec{F}$  и противоположна ей по знаку.

**Если к телу приложено несколько сил, то общая работа всех сил равна алгебраической сумме работ, совершаемых отдельными силами, и равна работе равнодействующей приложенных сил.**

Работа силы, совершаемая в единицу времени, называется мощностью. **Мощность  $N$  – физическая (скалярная) величина, равная от-**

ношению работы  $A$  к промежутку времени  $t$ , в течение которого совершена эта работа, то есть

$$N = \frac{A}{t}. \quad (91)$$

Мощность, развиваемая силой  $\vec{F}$  равна скалярному произведению вектора силы на вектор скорости, с которой движется точка приложения этой силы

$$N = F \cdot v. \quad (92)$$

В Международной системе (СИ) единица мощности называется ватт (Вт). 1 Вт равен мощности силы, совершающей работу в 1 Дж за время 1 с (1 Вт = 1 Дж/с).

### ***Кинетическая и потенциальная энергии***

Энергия ( $[E]$  1 Дж) – скалярная физическая величина, характеризующая способность тела совершать работу. Если тело способно совершать работу, значит, оно обладает энергией.

При равноускоренном движении перемещение  $S$  выражается формулой

$$S = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a}. \quad (93)$$

Отсюда следует, что

$$A = F \cdot S = m \cdot a \cdot \frac{v_2^2 - v_1^2}{2 \cdot a} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}. \quad (94)$$

Это выражение показывает, что работа, совершенная силой (или равнодействующей всех сил), связана с изменением квадрата скорости (а не самой скорости).

Физическая величина, равная половине произведения массы тела на квадрат его скорости, называется кинетической энергией тела

$$E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}. \quad (95)$$

Кинетическая энергия механической системы – энергия механического движения этой системы. Кинетическая энергия:

- всегда положительна;
- неодинакова в разных системах отсчёта;
- является функцией состояния системы.

Работа, совершённая некоторой силой, равна изменению его кинетической энергии тела, на которое эта сила действовала. Работа сил при перемещении тела из точки 1 в точку 2

$$A = \int_1^2 F dr = \int_{v_1}^{v_2} m \cdot v dv = m \int_{v_1}^{v_2} v dv = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2}, \quad (96)$$

или

$$A = E_{K2} - E_{K1}. \quad (97)$$

Это утверждение называют **теоремой о кинетической энергии**. Теорема о кинетической энергии справедлива и в общем случае, когда тело движется под действием изменяющейся силы, направление которой не совпадает с направлением перемещения.

Кинетическая энергия – это энергия движения. Кинетическая энергия тела массой  $m$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , равна работе, которую должна совершить сила, приложенная к покоящемуся телу, чтобы сообщить ему эту скорость

$$A = \frac{m \cdot v^2}{2} = E_K. \quad (98)$$

Если тело движется со скоростью  $\vec{v}$ , то для его полной остановки необходимо совершить работу

$$A = -\frac{m \cdot v^2}{2} = -E_K. \quad (99)$$

Наряду с кинетической энергией или энергией движения в физике важную роль играет понятие потенциальной энергии или энергии взаимодействия тел.

Потенциальная энергия определяется взаимным положением тел (например, положением тела относительно поверхности Земли).

**Потенциальное поле** – поле, в котором работа, совершаемая силами при перемещении тела из одного положения в другое, не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положения.

**Консервативная сила** – сила, работа которой при перемещении тела из одного положения в другое не зависит от того, по какой траектории это перемещение произошло, а зависит только от начального и конечного положения тела.

Понятие потенциальной энергии можно ввести только для сил, работа которых не зависит от траектории движения тела и определяется только начальным и конечным положениями.

Работа консервативных сил на замкнутой траектории равна нулю. Это утверждение поясняет рис. 54 (работа на замкнутой траектории  $A = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0$ ).

Свойством консервативности обладают сила тяжести и сила упругости. Для этих сил можно ввести понятие потенциальной энергии.

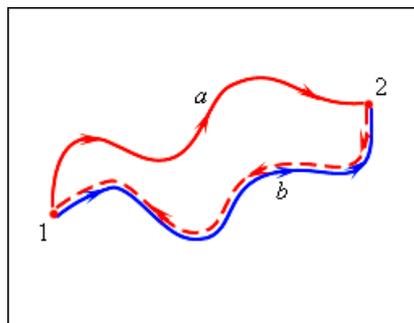


Рис. 54. Работа консервативной силы  $A_{1a2} = A_{1b2}$

Связь между консервативной силой и потенциальной энергией

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{п}}, \quad (100)$$

где  $F_x = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x}$ ,  $F_y = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y}$ ,  $F_z = -\frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z}$ ;

$$\text{grad } E_{\text{п}} = \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial E_{\text{п}}}{\partial z} \cdot \vec{k} - \text{градиент скаляра } E_{\text{п}},$$

$\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  – единичные векторы координатных осей.

Если тело перемещается вблизи поверхности Земли, то на него действует постоянная по величине и направлению сила тяжести  $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$ . Работа этой силы зависит только от вертикального перемещения тела. На любом участке пути работу силы тяжести можно записать в проекциях вектора перемещения  $\Delta \vec{S}$  на ось  $OY$ , направленную вертикально вверх:

$$\Delta A = F_T \cdot \Delta S \cos \alpha = -m \cdot g \cdot \Delta S_y, \quad (101)$$

где  $F_m = F_{my} = -m \cdot g$  – проекция силы тяжести;  $\Delta S_y$  – проекция вектора перемещения. При подъеме тела вверх сила тяжести совершает отрицательную работу, так как  $\Delta S_y > 0$ . Если тело переместилось из точки, расположенной на высоте  $h_1$ , в точку, расположенную на высоте  $h_2$  от начала координатной оси  $OY$  (рис. 55), то  $F_m$  совершила работу

$$A = -m \cdot g \cdot (h_2 - h_1) = -(m \cdot g \cdot h_2 - m \cdot g \cdot h_1). \quad (102)$$

Эта работа равна изменению некоторой физической величины  $m \cdot g \cdot h$ , взятому с противоположным знаком. Эту физическую величину называют потенциальной энергией тела в поле силы тяжести

$$E_p = m \cdot g \cdot h. \quad (103)$$

Она равна работе, которую совершает сила тяжести при опускании тела на нулевой уровень.

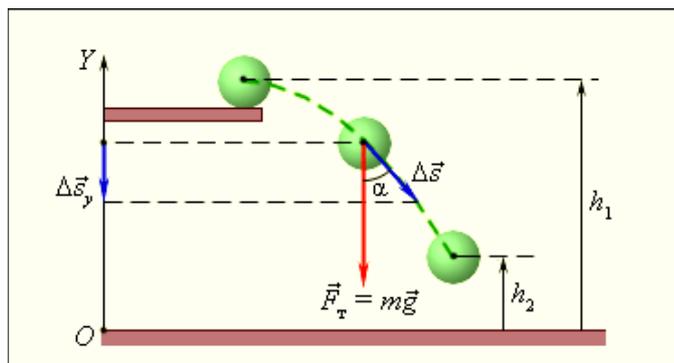


Рис.55. К работе силы тяжести

Работа силы тяжести равна изменению потенциальной энергии тела, взятому с противоположным знаком

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}). \quad (104)$$

Выражение (104) – теорема о потенциальной энергии.

Потенциальная энергия  $E_p$  зависит от выбора нулевого уровня, то есть от выбора начала координат оси  $OY$ . Физический смысл имеет не сама потенциальная энергия, а ее изменение  $\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1}$  при перемещении тела из одного положения в другое. Это изменение не зависит от выбора нулевого уровня.

Если рассматривать движение тел в поле тяготения Земли на значительных расстояниях от нее, то при определении потенциальной энергии необходимо принимать во внимание зависимость силы тяготения от расстояния до центра Земли (закон всемирного тяготения). Для сил всемирного тяготения потенциальную энергию удобно отсчитывать от бесконечно удаленной точки, то есть полагать потенциальную энергию тела в бесконечно удаленной точке, равной нулю. Формула, выражающая потенциальную энергию тела массой  $m$  на расстоянии  $r$  от центра Земли, имеет вид

$$E_p = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}, \quad (105)$$

где  $M$  – масса Земли;  $G$  – гравитационная постоянная.

Понятие потенциальной энергии можно ввести и для упругой силы. Эта сила также обладает свойством консервативности. Растягивая (или сжимая) пружину, мы можем делать это различными способами.

Можно просто удлинить пружину на величину  $x$ , или сначала удлинить её на  $2 \cdot x$ , а затем уменьшить удлинение до значения  $x$  и т. д. Во всех этих случаях упругая сила совершает одну и ту же работу, ко-

торая зависит только от удлинения пружины  $x$  в конечном состоянии, если первоначально пружина была не деформирована. Эта работа равна работе внешней силы  $A$ , взятой с противоположным знаком:

$$A_{\text{упр}} = -A = -\frac{k \cdot x^2}{2}, \quad (106)$$

где  $k$  – жесткость пружины. Растянутая (или сжатая) пружина способна привести в движение прикрепленное к ней тело, то есть сообщить этому телу кинетическую энергию. Следовательно, такая пружина обладает запасом энергии. Потенциальной энергией пружины (или любого упруго деформированного тела) называют величину

$$E_p = \frac{k \cdot x^2}{2}. \quad (107)$$

Потенциальная энергия упруго деформированного тела равна работе силы упругости при переходе из данного состояния в состояние с нулевой деформацией.

Если в начальном состоянии пружина уже была деформирована, а её удлинение было равно  $x_1$ , тогда при переходе в новое состояние с удлинением  $x_2$  сила упругости совершит работу, равную изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком:

$$A_{\text{упр}} = -(E_{p2} - E_{p1}) = -\left(\frac{k \cdot x_2^2}{2} - \frac{k \cdot x_1^2}{2}\right). \quad (108)$$

Потенциальная энергия при упругой деформации – это энергия взаимодействия отдельных частей тела между собой силами упругости.

Свойством консервативности обладают наряду с силой тяжести и силой упругости некоторые другие виды сил, например сила электростатического взаимодействия между заряженными телами. Сила трения не обладает этим свойством. Работа силы трения зависит от пройденного пути. Понятие  $E_p$  для силы трения вводить нельзя.

### **Закон сохранения энергии**

Если тела, составляющие замкнутую механическую систему, взаимодействуют между собой только силами тяготения и упругости, то работа этих сил равна изменению потенциальной энергии тел, взятому с противоположным знаком:

$$A = -(E_{p2} - E_{p1}).$$

По теореме о кинетической энергии эта работа равна изменению кинетической энергии тел

$$A = E_{k2} - E_{k1}.$$

Следовательно,

$$E_{K2} - E_{K1} = -(E_{p1} - E_{p2}),$$

или

$$E_{K1} + E_{p1} = E_{K2} + E_{p2}. \quad (109)$$

**Сумма кинетической и потенциальной энергии тел, составляющих замкнутую систему и взаимодействующих между собой силами тяготения и силами упругости, остается неизменной.**

Это утверждение выражает закон сохранения энергии в механических процессах. Он является следствием законов Ньютона. Сумму  $E = E_K + E_p$  называют полной механической энергией. Закон сохранения механической энергии выполняется только тогда, когда тела в замкнутой системе взаимодействуют между собой консервативными силами, то есть силами, для которых можно ввести понятие потенциальной энергии.

Ещё одна формулировка закона сохранения энергии: **в консервативных системах (системах, в которых действуют только консервативные силы) механическая энергия сохраняется, то есть не изменяется с течением времени.**

Закон сохранения энергии – следствие однородности времени. Однородность времени проявляется в том, что физические законы инвариантны относительно выбора начала отсчёта времени. Например, при свободном падении тела в поле сил тяжести его скорость и пройденный путь зависят лишь от начальной скорости и продолжительности свободного падения тела и не зависят от того, когда тело начало падать.

Пример применения закона сохранения энергии – нахождение минимальной прочности легкой нерастяжимой нити, удерживающей тело массой  $m$  при его вращении в вертикальной плоскости (задача Х. Гюйгенса). Рис. 56 поясняет решение этой задачи.

Закон сохранения энергии для тела в верхней и нижней точках траектории записывается в виде

$$\frac{m \cdot v_1^2}{2} = \frac{m \cdot v_2^2}{2} + m \cdot g \cdot 2 \cdot l. \quad (110)$$

Обратим внимание на то, что сила  $\vec{F}$  натяжения нити всегда перпендикулярна скорости тела, поэтому она не совершает работы.

При минимальной скорости вращения натяжение нити в верхней точке равно нулю и, следовательно, центростремительное ускорение тела в верхней точке сообщается только силой тяжести

$$\frac{m \cdot v_2^2}{l} = m \cdot g. \quad (111)$$

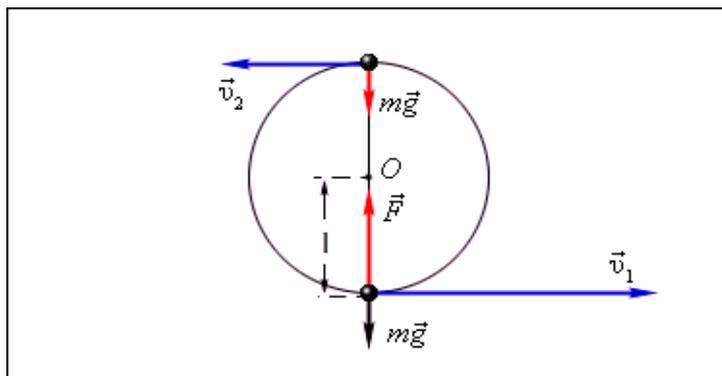


Рис. 56. К задаче Христиана Гюйгенса

Из этих соотношений (110), (111) следует

$$v_{1\min}^2 = 5 \cdot g \cdot l. \quad (112)$$

Центростремительное ускорение в нижней точке создается силами  $\vec{F}$  и  $m \cdot \vec{g}$ , направленными в противоположные стороны:

$$\frac{m \cdot v_1^2}{l} = F - m \cdot g. \quad (113)$$

Отсюда следует, что при минимальной скорости тела в верхней точке натяжение нити в нижней точке будет по модулю равно

$$F = 6 \cdot m \cdot g. \quad (114)$$

Очевидно, что прочность нити должна превышать это значение.

Важно отметить, что закон сохранения механической энергии позволил получить связь между координатами и скоростями тела в двух разных точках траектории без анализа закона движения тела во всех промежуточных точках. Применение этого закона может в значительной степени упростить решение многих задач.

В реальных условиях практически всегда на движущиеся тела наряду с силами тяготения, силами упругости и другими консервативными силами действуют силы трения или силы сопротивления среды. Сила трения не является консервативной. Работа силы трения зависит от длины пути.

Если между телами, составляющими замкнутую систему, действуют силы трения, то механическая энергия не сохраняется. Часть механической энергии превращается во внутреннюю энергию тел (нагревание).

**При любых физических взаимодействиях энергия не возникает и не исчезает. Она лишь превращается из одной формы в другую.**

Этот экспериментально установленный факт выражает фундаментальный закон природы – закон сохранения и превращения энергии.

Сущность закона сохранения и превращения энергии состоит в неуничтожимости материи и её движения. Этот закон – фундаментальный закон природы, он справедлив для систем как макроскопических, так и микроскопических тел.

Одним из следствий закона сохранения и превращения энергии является утверждение о невозможности создания «вечного двигателя» (*perpetuum mobile*) – машины, которая могла бы неопределенно долго совершать работу, не расходуя при этом энергии.

### Графическое представление энергии

1. Анализ потенциальной кривой для тела в однородном поле тяжести.

Потенциальная кривая  $E_p(h) = E_p = m \cdot g \cdot h$  – прямая линия, проходящая через начало координат, угол наклона которой к оси  $h$  тем больше, чем больше масса  $m$  тела ( $tg \alpha = m \cdot g$ ). График заданной полной энергии тела  $E$  (рис. 57) – прямая  $EE$ , параллельная оси  $h$ .

❖ Потенциальная энергия  $E_p$  тела на высоте  $h$  определяется отрезком вертикали, заключённым между точкой  $h$  на оси абсцисс и потенциальной кривой.

❖ Кинетическая энергия  $E_k$  на высоте  $h$  задаётся ординатой между потенциальной кривой и горизонтальной прямой  $EE$ .

❖ Если  $h = h_{max}$ , то  $E_k = 0$  и  $E_p = m \cdot g \cdot h_{max}$ , то есть потенциальная энергия становится равной полной энергии.

❖ Скорость тела на высоте  $h$

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot (h_{max} - h)},$$

$$(E_k = E - E_p; \frac{m \cdot v^2}{2} = m \cdot g \cdot h_{max} - m \cdot g \cdot h).$$

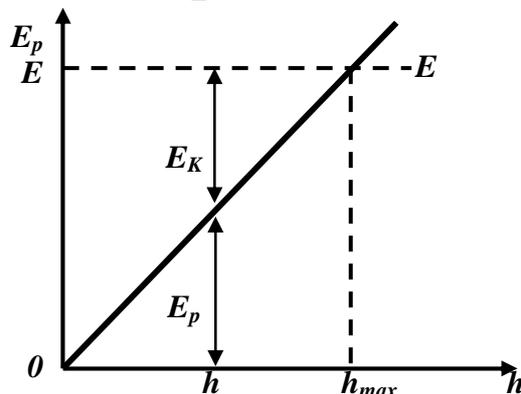


Рис. 57. Зависимость  $E_p(h)$

2. Анализ потенциальной кривой для упругодеформированного тела.

Зависимость потенциальной энергии упругой деформации  $E_p = \frac{k \cdot x^2}{2}$  от деформации – потенциальная кривая – имеет вид параболы. График заданной полной энергии  $E$  – прямая  $EE$ , параллельная оси  $x$  (рис. 58).

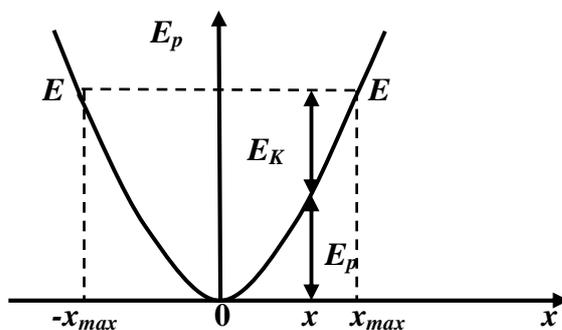


Рис. 58. Зависимость  $E_p$  для упругодеформированного тела

❖ Потенциальная энергия  $E_p$  при деформации  $x$  определяется отрезком вертикали, заключённым между точкой  $x$  на оси абсцисс и потенциальной кривой.

❖ Кинетическая энергия  $E_K$  при деформации  $x$  задаётся ординатой между потенциальной кривой и горизонтальной прямой  $EE$ .

❖ С возрастанием деформации  $x$  потенциальная энергия возрастает, а кинетическая – уменьшается.

❖ Абсцисса  $x_{max}$  определяет максимально возможную деформацию растяжения тела, а  $-x_{max}$  – максимально возможную деформацию сжатия тела.

❖ Если  $x = \pm x_{max}$ , то  $E_K = 0$  и  $E_p = E = \frac{k \cdot x_{max}^2}{2}$ , то есть потенциальная энергия становится максимальной и равной полной энергии.

❖ При полной энергии тела, равной  $E$ , тело не может сместиться правее  $x_{max}$ , так как кинетическая энергия не может быть отрицательной и, следовательно, потенциальная энергия не может быть больше полной энергии. В таком случае говорят, что тело находится в **потенциальном яме** с координатами  $-x_{max} \leq x \leq x_{max}$ .

3. Анализ потенциальной кривой (общий случай).

Так же, как и в первом случае, будем рассматривать:

– одномерное движение тела (потенциальная энергия – функция лишь одной переменной (например, координаты  $x$ ));

– только консервативные системы (в них механическая энергия превращается только в механическую).

В общем случае потенциальная кривая может иметь достаточно сложный вид, например с несколькими чередующимися максимумами и минимумами (рис. 59).

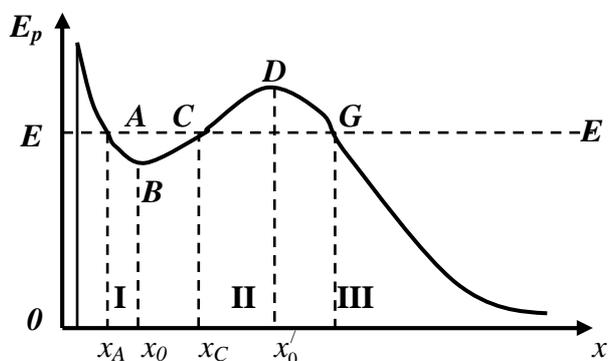


Рис. 59. Потенциальная кривая

График заданной полной энергии частицы – прямая  $EE$ , параллельная оси  $x$ .

❖ Частица может находиться только там, где  $E_p(x) \leq E$ , то есть в областях  $I$  и  $III$ .

❖ Переходить из области  $I$  в  $III$  и обратно частица не может, так как ей препятствует потенциальный барьер  $CDG$ , ширина которого равна интервалу значений  $x$ , при которых  $E < E_p$ , а его высота определяется разностью  $E_{p\max} - E$ . Для того, чтобы частица смогла преодолеть потенциальный барьер, ей необходимо сообщить дополнительную энергию, равную высоте барьера или превышающую её.

❖ В области  $I$  частица с полной энергией  $E$  оказывается «запертой» в потенциальной яме  $ABC$  и совершает колебания между точками с координатами  $x_A$  и  $x_C$ .

При смещении частицы из положения  $x_0$  (и влево и вправо) она испытывает действие возвращающей силы, поэтому положение  $x_0$  является **положением устойчивого равновесия**. Указанные условия выполняются и для точки  $x'_0$  (для  $E_p$ ). Однако эта точка соответствует **положению неустойчивого равновесия**, так как при смещении частицы из положения  $x'_0$  появляется сила, стремящаяся удалить её от этого положения.

### Удар абсолютно упругих и неупругих тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации или в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением температуры.

Существуют два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий. **Абсолютно упругим ударом называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие немеханические виды энергии.** При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкиваясь друг друга. Потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, величина и направление которых определяются сохранением полной энергии и сохранением полного импульса системы.

**Абсолютно неупругий удар характеризуется тем, что потенциальная энергия деформации не возникает, кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию. После удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся.**

При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь закон сохранения импульса. Закон сохранения механической энергии не соблюдается: – имеет место закон сохранения суммарной энергии различных видов – механической и внутренней.

Рассмотрим абсолютно неупругий удар двух частиц, образующих замкнутую систему, движущихся вдоль оси  $x$  (рис. 60).

Пусть  $m_1$  и  $m_2$  – массы частиц,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – скорости частиц до удара,  $\vec{u}$  – скорость частиц после удара.

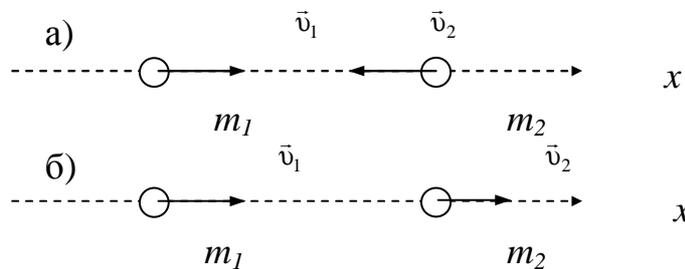


Рис. 60. К абсолютно неупругому удару

Запишем закон сохранения импульса

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \cdot \vec{u};$$

$$\vec{u} = \frac{m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2}{m_1 + m_2}. \quad (115)$$

Модуль скорости частиц после удара для первого случая (рис. 60, а) равен

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 - m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2},$$

для второго (рис. 60, б)

$$u = \frac{m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2}.$$

Выясним, как изменится полная энергия шаров при абсолютно неупругом ударе. Кинетическая энергия до удара

$$E_{\kappa_1} = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2},$$

после удара

$$E_{\kappa_2} = \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot u^2.$$

Подставим в это выражение общую скорость движения частиц (115) для случая, изображенного на рис. 60, б

$$E_{\kappa_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)^2}{m_1 + m_2}.$$

Найдем изменение кинетической энергии:

$$\Delta E = E_{\kappa_1} - E_{\kappa_2},$$

$$\Delta E = \frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2)^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (v_1 - v_2)^2 \quad (116)$$

Уменьшение кинетической энергии при неупругом ударе означает, что механическая энергия системы при этом ударе не остается постоянной: она частично или полностью превращается в тепловую энергию движущихся молекул.

Рассмотрим абсолютно упругий центральный удар двух однородных шаров (рис. 61).

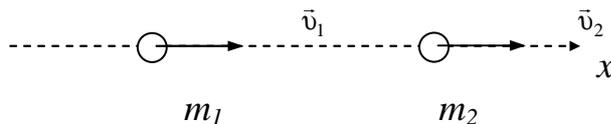


Рис. 61. К абсолютно упругому удару

Удар называется центральным, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центр. Предполагается, что шары образуют замкнутую систему тел, что внешние силы, приложенные к шарам, уравновешивают друг друга. Кроме того, вращение шаров отсутствует.

Обозначим  $m_1$  и  $m_2$  – массы шаров,  $\vec{v}_1$  и  $\vec{v}_2$  – скорости шаров до удара,  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$  – скорости шаров после удара. Положим, что скорости шаров как до удара, так и после удара направлены вдоль положительного направления оси  $x$ .

Запишем уравнение закона сохранения импульса и энергии

$$m_1 \cdot \vec{v}_1 + m_2 \cdot \vec{v}_2 = m_1 \cdot \vec{u}_1 + m_2 \cdot \vec{u}_2, \quad (117)$$

$$\frac{m_1 \cdot v_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot v_2^2}{2} = \frac{m_1 \cdot u_1^2}{2} + \frac{m_2 \cdot u_2^2}{2}. \quad (118)$$

Спроектируем уравнение закона сохранения импульса (117) на ось  $x$ :

$$m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v_2 = m_1 \cdot u_1 + m_2 \cdot u_2$$

и преобразуем его к виду

$$m_2 \cdot (v_2 - u_2) = m_1 \cdot (u_1 - v_1). \quad (119)$$

Из закона сохранения энергии (118) следует

$$m_2 \cdot (v_2^2 - u_2^2) = m_1 \cdot (u_1^2 - v_1^2). \quad (120)$$

Разделим уравнение (119) на (118), получим

$$v_2 + u_2 = u_1 + v_1. \quad (121)$$

Для нахождения скорости  $u_1$  умножим (121) на  $m_2$  и полученное соотношение сложим с уравнением (119)

$$+ \begin{cases} m_2 \cdot v_2 + m_2 \cdot u_2 = m_2 \cdot u_1 + m_2 \cdot v_1 \\ m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot u_1 - m_1 \cdot v_1 \end{cases},$$

получим

$$2 \cdot m_2 \cdot v_2 = u_1 \cdot (m_2 + m_1) + v_1 \cdot (m_2 - m_1),$$

откуда

$$u_1 = \frac{v_1 \cdot (m_1 - m_2) + 2 \cdot m_2 \cdot v_2}{m_1 + m_2} \quad (122)$$

Для определения скорости  $u_2$  умножим (121) на  $m_1$  и полученное соотношение вычтем из уравнения (119)

$$- \begin{cases} m_2 \cdot v_2 - m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot u_1 - m_1 \cdot v_1 \\ m_2 \cdot v_2 + m_2 \cdot u_2 = m_1 \cdot u_1 + m_1 \cdot v_1 \end{cases},$$

получим

$$v_2 \cdot (m_2 - m_1) - u_2 \cdot (m_1 + m_2) = -2 \cdot m_1 \cdot v_1,$$

откуда

$$u_2 = \frac{v_2 \cdot (m_2 - m_1) + 2 \cdot m_1 \cdot v_1}{m_1 + m_2}. \quad (123)$$

При  $m_1 = m_2$  из (122) и (123) следует, что  $u_1 = v_2$ , а  $u_2 = v_1$ .

## 1.4. Динамика вращательного движения

### Условия равновесия тел

**Статикой** называется раздел механики, изучающий условия равновесия тел.

Из второго закона Ньютона следует, что если геометрическая сумма всех внешних сил, приложенных к невращающемуся телу, равна нулю, то тело находится в состоянии покоя или совершает равномерное прямолинейное движение. В этом случае принято говорить, что силы, приложенные к телу, уравнивают друг друга. При вычислении равнодействующей все силы, действующие на тело, можно прикладывать к центру масс. Чтобы невращающееся тело находилось в равновесии, необходимо, чтобы равнодействующая всех сил, приложенных к телу, была равна нулю

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots = 0. \quad (124)$$

На рис. 62 дан пример равновесия твердого тела под действием трех сил. Точка пересечения  $O$  линий действия сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  не совпадает с точкой приложения силы тяжести (центр масс  $C$ ), но при равновесии эти точки обязательно находятся на одной вертикали. При вычислении равнодействующей все силы приводятся к одной точке.

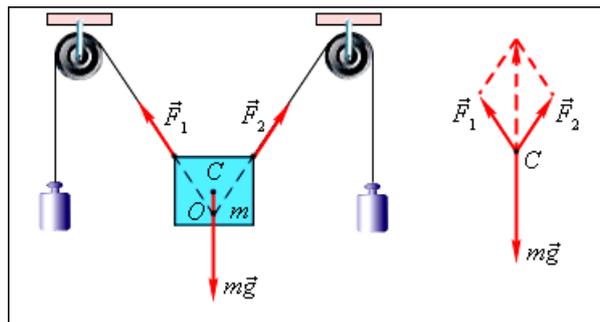


Рис. 62. Равновесие твердого тела под действием трех сил

Если тело может вращаться относительно некоторой оси, то для его равновесия недостаточно равенства нулю равнодействующей всех сил.

Вращающее действие силы зависит не только от её величины, но и от расстояния между линией действия силы и осью вращения.

**Момент силы** относительно неподвижной точки  $O$  – физическая величина, определяемая произведением радиуса-вектора  $\vec{r}$ , проведённого из точки  $O$  в точку  $A$  приложения силы, на силу  $\vec{F}$

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \quad (125)$$

$\vec{M}$  – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта (правило буравчика) при его вращении от  $\vec{r}$  к  $\vec{F}$  (рис. 63).

Модуль вектора момента силы

$$M = F \cdot r \sin \alpha = F \cdot d. \quad (126)$$

Кратчайшее расстояние между линией действия силы и точкой  $O$  – плечо силы

$$r \sin \alpha = d.$$

Момент силы относительно неподвижной оси  $z$  – скалярная величина  $M_z$ , равная проекции на эту ось вектора  $\vec{M}$  момента силы, определённого произвольной точкой  $O$  данной оси  $z$  (рис. 64).

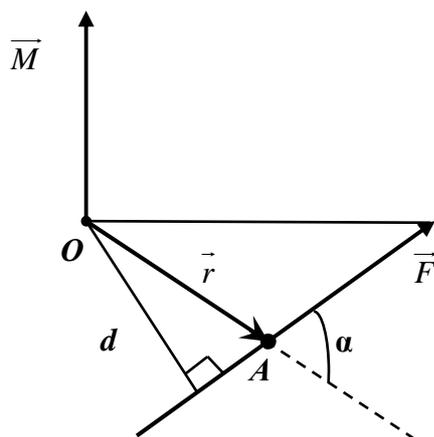


Рис. 63. К определению направления  $\vec{M}$

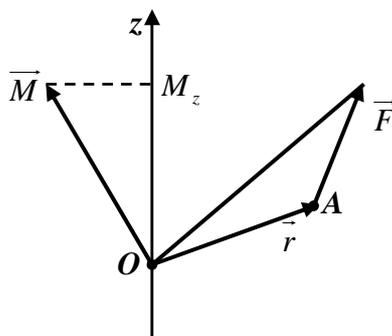


Рис. 64. Вектор  $\vec{M}$

Если ось  $z$  совпадает с направлением вектора  $\vec{M}$ , то момент силы представляется в виде вектора, совпадающего с осью.

$$[M] \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Положительными считаются моменты тех сил, которые стремятся повернуть тело против часовой стрелки (рис. 65).

**Правило моментов:** тело, имеющее неподвижную ось вращения, находится в равновесии, если алгебраическая сумма моментов всех приложенных к телу сил относительно этой оси равна нулю

$$M_1 + M_2 + \dots = 0. \quad (127)$$

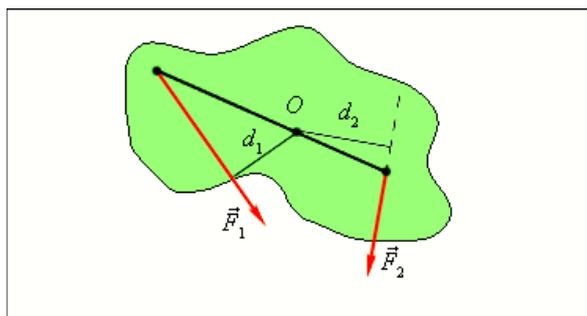


Рис. 64, а. Силы, действующие на рычаг, и их моменты

На рис. 64, а  $M_1 = F_1 \cdot d_1 > 0$ ;  $M_2 = -F_2 \cdot d_2 < 0$ . При равновесии  $M_1 + M_2 = 0$ .

В общем случае, когда тело может двигаться поступательно и вращаться, для равновесия необходимо выполнение обоих условий: равенство нулю равнодействующей силы и равенство нулю суммы всех моментов. Оба эти условия не являются достаточными для покоя.

Катящееся по горизонтальной поверхности колесо – пример безразличного равновесия (рис. 65). Если колесо остановить в любой точке, оно окажется в равновесном состоянии. Равнодействующая сила и момент сил равны нулю.

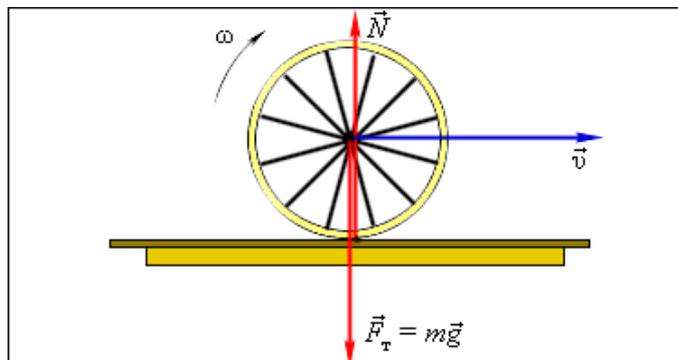


Рис. 65. Качение колеса по горизонтальной поверхности

Наряду с безразличным равновесием в механике различают устойчивые и неустойчивые состояния равновесия.

**Состояние равновесия** называется **устойчивым**, если при малых отклонениях тела от этого состояния возникают силы или моменты сил, стремящиеся вернуть тело в равновесное состояние.

При малом отклонении тела из **состояния неустойчивого равновесия** возникают силы или моменты сил, стремящиеся удалить тело от положения равновесия.

Шар, лежащий на плоской горизонтальной поверхности, находится в **безразличном состоянии равновесия**. Шар, находящийся в верхней точке сферического выступа, – пример неустойчивого равновесия. Наконец, шар на дне сферического углубления находится в состоянии устойчивого равновесия (рис. 66).

На рис. 66: (1) – безразличное равновесие; (2) – неустойчивое равновесие; (3) – устойчивое равновесие.

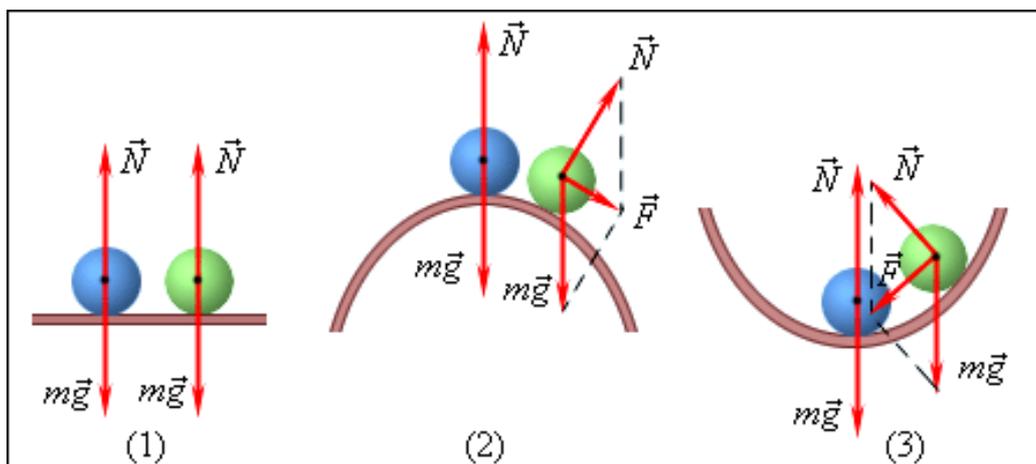


Рис. 66. Различные типы равновесия шара на опоре

Для тела, имеющего неподвижную ось вращения, возможны все три вида равновесия. Безразличное равновесие возникает, когда ось вращения проходит через центр масс. При устойчивом и неустойчивом равновесии центр масс находится на вертикальной прямой, проходящей через ось вращения. При этом, если центр масс находится ниже оси вращения, состояние равновесия оказывается устойчивым. Если же центр масс расположен выше оси – состояние равновесия неустойчиво (рис. 67). На рис. 67: ось  $O$ ; точка  $C$  – центр массы диска;  $d$  – плечо.

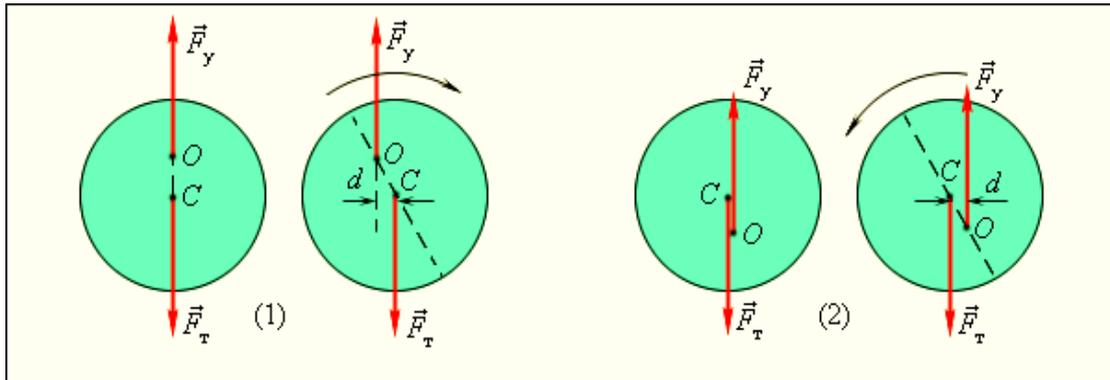


Рис. 67. Устойчивое (1) и неустойчивое (2) равновесие однородного круглого диска, закрепленного на оси  $O$

### Вращательное движение твердого тела

**Твердое тело** – это система материальных точек, расстояние между которыми остается неизменным при взаимодействии системы с другими телами. Движение твердого тела бывает поступательным и вращательным. Всякое движение твердого тела можно представить как сумму движений названных двух типов. Покажем это для случая **плоского движения**, то есть такого, при котором все точки тела перемещаются в параллельных плоскостях. В качестве примера плоского движения возьмем качение цилиндра по плоскости (рис. 68).

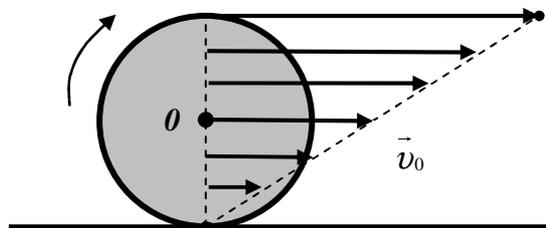


Рис.68. Качение цилиндра по плоскости

Стрелками обозначены линейные скорости различных точек цилиндра.

Скорость каждой точки цилиндра может быть представлена в виде

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}', \quad (128)$$

где  $v_0$  – скорость поступательного движения, одинаковая для всех точек тела, а  $v'$  – линейная скорость точки, обусловленная вращением тела и разная для разных точек тела. Линейная скорость точки с радиусом-вектором  $r$

$$\vec{v}' = \vec{\omega} \cdot \vec{r}. \quad (129)$$

Таким образом, скорость точки при сложном движении тела имеет вид

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \cdot \vec{r}. \quad (130)$$

Отсюда следует, что существуют точки, суммарная скорость которых равна нулю относительно неподвижной системы отсчета (рис. 69).

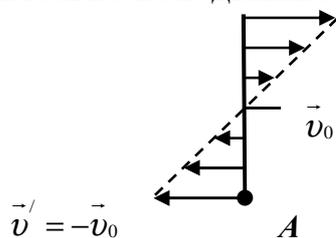


Рис. 69. Скорости точек цилиндра

Скорость точки A цилиндра равна нулю относительно неподвижной системы отсчета.

Геометрическое место точек, неподвижных в каждый рассматриваемый момент времени, образует прямую, которая является мгновенной осью вращения (рис. 70).

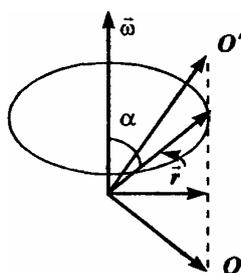


Рис. 70. Мгновенная ось вращения

Проекции всех векторов  $r$ , лежащих на прямой  $OO'$ , одинаковы. Прямая  $OO'$  образует мгновенную ось вращения цилиндра.

В случае цилиндра, перемещающегося по плоскости, мгновенная ось совпадает с линией касания цилиндра плоскости. Видно, что мгновенная ось вращения не остается постоянной, а перемещается по мере движения тела. Скорости всех точек тела в каждый момент времени можно считать обусловленными вращением вокруг соответствующей мгновенной оси. Таким образом, **плоское движение твердого тела можно рассматривать как ряд последовательных вращений вокруг мгновенных осей. В общем случае движение тела можно представлять как вращение вокруг мгновенной оси и одновременно поступательное движение вдоль этой же оси.**

### Момент инерции тела относительно оси вращения

Моментом инерции тела относительно оси вращения называется сумма произведений элементарных масс на квадрат расстояния от оси вращения

$$J = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \cdot r_i^2. \quad (131)$$

Для тела с неравномерно распределенной массой элементарная масса

$$\Delta m_i = \rho_i \cdot \Delta V_i, \quad (132)$$

где  $\rho_i$  – плотность в данной точке,  $\Delta V_i$  – элементарный объем. Поэтому момент инерции тела будет равен

$$J = \sum_{i=1}^n \rho_i \cdot r_i^2 \cdot \Delta V_i. \quad (133)$$

Если  $\rho = \text{const}$ , то

$$J = \rho \cdot \sum_{i=1}^n r_i^2 \cdot \Delta V_i. \quad (134)$$

Переходя к пределу, получим, что

$$J = \int \rho \cdot r^2 dV. \quad (135)$$

Интегралы берутся по всему объёму тела, причём величины  $\rho$  и  $r$  являются функциями точки (например, декартовых координат  $x$ ,  $y$  и  $z$ ).

Найдем момент инерции однородного диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через его центр (рис. 71). Разобьем диск на кольцевые слои толщиной  $dr$ . Объем такого слоя равен  $V = b \cdot 2 \cdot \pi r dr$ , где  $b$  – толщина диска,  $r$  – радиус кольцевого слоя.

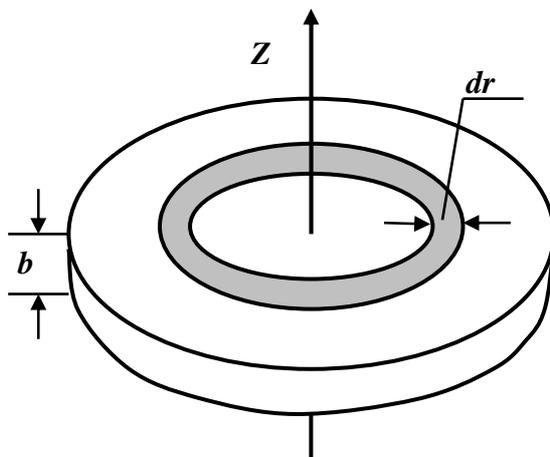


Рис. 71. Однородный диск

Поскольку диск однороден, то  $\rho = \text{const}$  и

$$J = \rho \cdot \int r^2 dV = \rho \cdot \int_0^R r^2 \cdot b \cdot 2 \cdot \pi \cdot r dr;$$

$$J = 2 \cdot \pi \cdot b \cdot \rho \cdot \int_0^R r^3 dr = \frac{2 \cdot \pi \cdot b \cdot \rho \cdot R^4}{4};$$

$$J = \rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b \cdot \frac{R^2}{2}.$$

Произведение  $\rho \cdot \pi \cdot R^2 \cdot b = \rho \cdot V = m$ ,

поэтому момент инерции диска относительно оси, перпендикулярной к плоскости и проходящий через его центр, будет равен

$$J = \frac{m \cdot R^2}{2}. \quad (136)$$

Для нахождения момента инерции диска относительно оси, не проходящей через его центр (рис. 72), нужно воспользоваться теоремой Штейнера.

#### Теорема Штейнера

**Момент инерции тела  $J$  относительно любой оси вращения равен моменту инерции  $J_C$  относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела, сложенному с произведением массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями.**

$$J = J_C + m \cdot a^2. \quad (137)$$

В соответствии с этой теоремой момент инерции диска относительно оси  $O'O'$  равен

$$J = \frac{m \cdot R^2}{2} + m \cdot R^2 = \frac{3}{2} \cdot m \cdot R^2. \quad (137^*)$$

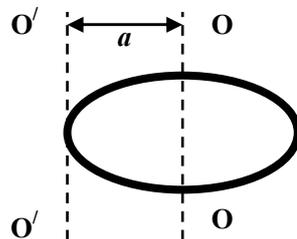
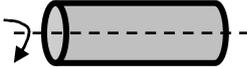
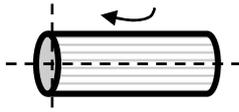
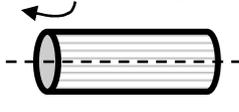


Рис. 72. К определению момента инерции диска относительно оси  $OO'$

Приведём моменты инерции некоторых однородных тел (таблица 6).

Таблица 6

*Моменты инерции однородных тел*

Тело	Положение оси вращения	Значение момента инерции
Обруч, кольцо, тонкостенный цилиндр	Ось симметрии перпендикулярна плоскости торца 	$J = m \cdot R^2$
Сплошной цилиндр, диск	Ось симметрии перпендикулярна торцу 	$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2$
Стержень	Ось перпендикулярна стержню и проходит через середину 	$J = \frac{1}{12} \cdot m \cdot l^2$
Стержень	Ось перпендикулярна стержню и проходит через конец 	$J = \frac{1}{3} \cdot m \cdot l^2$
Твердый сплошной шар	Ось, проходящая через центр масс 	$J = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2$

***Кинетическая энергия твердого тела при вращении.***

***Уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела***

Рассмотрим вращение тела вокруг неподвижной оси  $Z$  (рис. 73). Линейная скорость точки с массой  $m_i$ , равна  $v_i = \omega \cdot R$ , где  $R$  – расстояние точки до оси  $Z$ .

Для кинетической энергии  $i$ -й материальной точки тела получаем выражение

$$E_{Ki} = \frac{m \cdot v_i^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot m_i \cdot \omega^2 \cdot R_i^2. \quad (138)$$

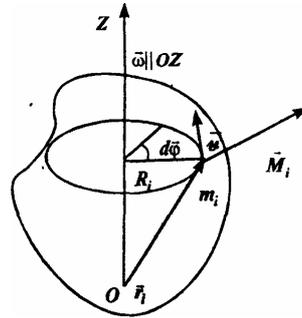


Рис.73. Вращающееся тело

Полная кинетическая энергия тела

$$E_K = \sum E_{Ki} = \omega^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum m_i \cdot R_i^2. \quad (139)$$

Поскольку входящая сюда сумма представляет собой момент инерции относительно оси Z, получаем

$$E_K = \frac{1}{2} \cdot J \cdot \omega^2. \quad (140)$$

Вычислим работу, совершаемую внешней силой при вращении твердого тела. Элемент работы

$$dA = \vec{f} \cdot d\vec{l} = \vec{f} [d\vec{\varphi}, \vec{r}] = d\varphi [\vec{r}, \vec{f}]. \quad (141)$$

Последнее выражение есть момент внешней силы M, таким образом,

$$dA = \vec{M} d\vec{\varphi} = \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt. \quad (142)$$

Полная работа может быть вычислена с помощью следующих формул:

$$A = \int dA = \int_0^{\varphi} \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} = \int_0^t \vec{M} \cdot \vec{\omega} dt. \quad (143)$$

Кинетическая энергия при плоском движении складывается из энергии поступательного движения со скоростью центра инерции тела и энергии вращения вокруг оси, проходящей через центр инерции

$$E_{nl} = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + \frac{J \cdot \omega^2}{2}. \quad (144)$$

**Момент сил твёрдого тела относительно оси равен произведению момента инерции относительно той же оси на угловое ускоре-**

**ние.** Работа вращения тела идёт на увеличение его кинетической энергии

$$dA = dE_K, \quad dA = M_z d\varphi, \quad dE_K = d\left(\frac{J_z \cdot \omega^2}{2}\right) = J_z \cdot \omega d\omega. \quad \text{Тогда}$$

$$M_z d\varphi = J_z \cdot \omega d\omega, \quad \text{или} \quad M_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \omega \cdot \frac{d\omega}{dt}. \quad \text{Так как} \quad \omega = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt}, \quad \text{то}$$

$$M_z = J_z \cdot \varepsilon. \quad (145)$$

Это и есть основное уравнение динамики вращательного движения твёрдого тела.

### Момент импульса и закон его сохранения

**Момент импульса** материальной точки относительно неподвижной точки  $O$  – физическая величина, определяемая векторным произведением радиуса-вектора  $\vec{r}_i$  материальной точки, проведённого из точки  $O$ , на импульс  $\vec{p}_i = m_i \cdot \vec{v}_i$  этой материальной точки

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = [\vec{r}_i, m_i \vec{v}_i]. \quad (146)$$

$\vec{L}_i$  – псевдовектор, его направление совпадает с направлением поступательного движения правого винта при его вращении от  $\vec{r}_i$  к  $\vec{p}_i$  (рис. 74).

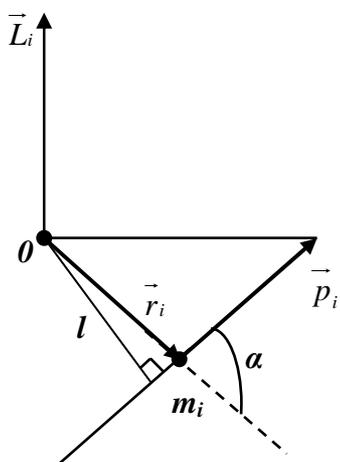


Рис. 74. К определению направления  $\vec{L}_i$

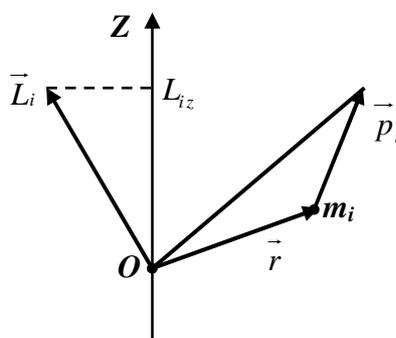


Рис. 75. К определению направления  $\vec{L}_i$

Модуль вектора момента импульса

$$L_i = r_i \cdot p_i \sin \alpha = m_i \cdot v_i \cdot r_i \sin \alpha = p_i \cdot l, \quad (147)$$

где  $\alpha$  – угол между векторами  $r_i$  и  $p_i$ ;  $l = r \sin \alpha$  – плечо импульса. Перпендикуляр опущен из точки  $O$  на прямую, вдоль которой направлен импульс частицы.

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной оси  $Z$  – скалярная физическая величина  $L_{iz}$ , равная проекции на эту ось вектора момента импульса, определённого относительно произвольной точки  $O$  данной оси  $Z$ .

Значение момента импульса  $L_{iz}$  не зависит от положения точки  $O$  на оси  $Z$ .

Момент импульса отдельной точки вращающегося абсолютно твёрдого тела

$$L_{iz} = m_i \cdot v_i \cdot r_i. \quad (148)$$

При вращении абсолютно твёрдого тела вокруг неподвижной оси  $Z$  каждая отдельная точка тела движется по окружности постоянного радиуса  $r_i$  с некоторой скоростью  $\vec{v}_i$ . Скорость  $\vec{v}_i$  и импульс  $m_i \cdot \vec{v}_i$  перпендикулярны этому радиусу, то есть радиус – плечо вектора  $m_i \cdot \vec{v}_i$ . Тогда момент импульса отдельной частицы  $L_{iz} = m_i \cdot v_i \cdot r_i$  и направлен по оси в сторону, определяемую правилом правого винта (рис. 75).

Момент импульса абсолютно твёрдого тела относительно неподвижной оси  $Z$

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot v_i \cdot r_i. \quad (149)$$

Сумма моментов импульса отдельных частиц относительно той же оси

$$L_z = \sum_{i=1}^n m_i \cdot v_i \cdot r_i = \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 \cdot \omega = \omega \cdot \sum_{i=1}^n m_i \cdot r_i^2 = J_z \cdot \omega, \text{ то есть}$$

$$L_z = J_z \cdot \omega, \quad (150)$$

учли, что  $v_i = \omega \cdot r_i$ ;  $J_z$  – момент инерции тела относительно оси  $Z$ ;  $\omega$  – угловая скорость.

Ещё одна форма записи уравнения динамики вращательного движения твёрдого тела

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z. \quad (151)$$

**Производная момента импульса твёрдого тела относительно оси равна моменту силы относительно той же оси.** Продифференцировав  $L_z = J_z \cdot \omega$  по времени, получим записанное выражение:

$$\frac{dL_z}{dt} = J_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = J_z \cdot \varepsilon = M_z.$$

Производная вектора момента импульса твёрдого тела равна моменту (сумме моментов) внешних сил

$$d\vec{L} / dt = \vec{M}. \quad (152)$$

**Закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы сохраняется, то есть не изменяется с течением времени**

$$\vec{L} = const. \quad (153)$$

Действительно, в замкнутой системе момент внешних сил

$$\vec{M} = 0; dL / dt = 0 \Rightarrow \vec{L} = const.$$

Закон сохранения момента импульса – фундаментальный закон природы, является следствием изотропности пространства. Изотропность пространства – инвариантность физических законов относительно выбора направления осей координат системы отчёта (относительно поворота замкнутой системы в пространстве на любой угол).

Иллюстрацией этого закона может служить неупругое вращательное столкновение двух дисков, насаженных на общую ось (рис. 76).

Закон сохранения момента импульса в этом случае

$$J_1 \cdot \omega_1 = (J_1 + J_2) \cdot \omega.$$

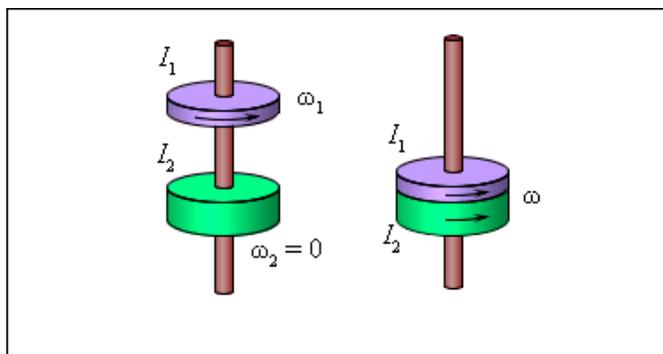


Рис. 76. Неупругое вращательное столкновение двух дисков

Ещё одним наглядным примером является человек, сидящий на скамье Жуковского (рис. 77). Если человек прижмёт гантели к себе, то момент инерции уменьшится. Поскольку момент внешних сил равен нулю, то момент импульса системы сохраняется ( $J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2$ ) и угловая скорость вращения  $\omega_2$  возрастает. Гимнаст во время прыжка через голову поджимает к туловищу руки и ноги, чтобы уменьшить момент инерции и увеличить тем самым угловую скорость вращения.

Закон сохранения момента импульса справедлив для любой замкнутой системы тел. Он выполняется, например, при движении планет по эллиптическим орбитам вокруг Солнца.

Уравнение вращательного движения тела можно записывать не только относительно неподвижной или равномерно движущейся оси, но и относительно оси, движущейся с ускорением.

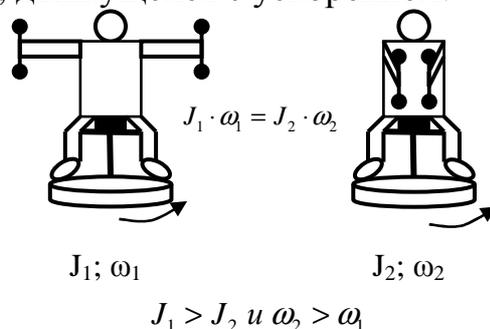


Рис. 77. Человек на скамье Жуковского

Основное уравнение динамики вращательного движения не изменяет своего вида и в случае ускоренно движущихся осей при условии, что ось вращения проходит через центр масс тела и что её направление в пространстве остается неизменным. Примером может служить качение тела (обруч, цилиндр, шар) по наклонной плоскости с трением (рис. 78).

Ось вращения  $O$  проходит через центр масс тела. Моменты силы тяжести  $m \cdot \vec{g}$  и силы реакции  $\vec{N}$  относительно оси  $O$  равны нулю. Момент  $M$  создает только сила трения  $M = F_{mp} \cdot R$ .

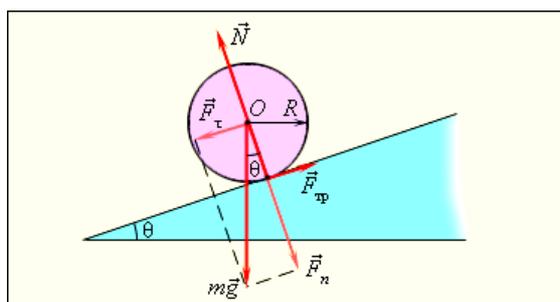


Рис. 78. Качение симметричного тела по наклонной плоскости

Уравнение вращательного движения

$$J_C \cdot \varepsilon = J_C \cdot a / R = M = F \cdot R, \quad (154)$$

где  $\varepsilon$  – угловое ускорение катящегося тела;  $a$  – линейное ускорение его центра масс;  $J_C$  – момент инерции относительно оси  $O$ , проходящей через центр масс.

Второй закон Ньютона для поступательного движения центра масс записывается в виде

$$m \cdot a = m \cdot g \sin \theta - F_{mp}. \quad (155)$$

Исключая из этих уравнений  $F_{mp}$ , получим окончательно:

$$a = \frac{m \cdot g \sin \theta}{\left( \frac{J_C}{R^2} + m \right)}. \quad (156)$$

Из этого выражения видно, что быстрее будет скатываться с наклонной плоскости тело, обладающее меньшим моментом инерции. Например, у шара

$$J_C = \frac{2}{5} \cdot m \cdot R^2,$$

а у сплошного однородного цилиндра

$$J = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2.$$

Следовательно, шар будет скатываться быстрее цилиндра.

Между параметрами и уравнениями поступательного и вращательного движения существует аналогия. Ниже (таблица 7) приведена аналогия в описании поступательного и вращательного движений.

Таблица 7

*Аналогия в описании поступательного и вращательного движений*

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса $m$	Момент инерции $J$
Скорость $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$	Угловая скорость $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Угловое ускорение $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $M_z$ или $\vec{M}$
Импульс $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$	Моментимпульса $L_z = J_z \cdot \omega$
Основное уравнение динамики $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$ $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$	Основное уравнение динамики $M_z = J_z \cdot \varepsilon$ $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$
Работа $dA = F_s dS$	Работа $dA = M_z d\varphi$
Кинетическая энергия $\frac{m \cdot v^2}{2}$	Кинетическая энергия $\frac{J_z \cdot \omega^2}{2}$

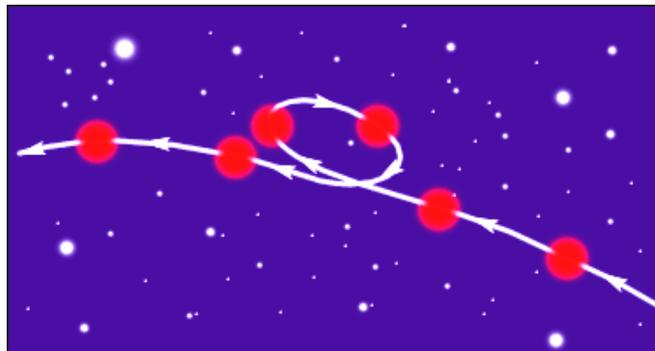
## 1.5. Тяготение. Элементы теории поля

### Законы Кеплера

В мире атомов и элементарных частиц гравитационные силы пренебрежимо малы по сравнению с другими видами силового взаимодействия между частицами. Очень непросто наблюдать гравитационное взаимодействие и между различными окружающими нас телами, даже если их массы составляют многие тысячи килограмм. Однако именно гравитация определяет поведение «больших» объектов, таких, как планеты, кометы и звезды, именно гравитация удерживает всех нас на Земле. Гравитация управляет движением планет Солнечной системы. Без неё планеты, составляющие Солнечную систему, разбежались бы в разные стороны и потерялись в безбрежных просторах мирового пространства.

Закономерности движения планет с давних пор привлекали внимание людей. Изучение движения планет и строения Солнечной системы и привело к созданию теории гравитации – открытию закона всемирного тяготения.

С точки зрения земного наблюдателя планеты движутся по весьма сложным траекториям (рис. 79). Первая попытка создания модели Вселенной была предпринята Птолемеем (~ 140 г.). В центре мироздания Птолемей поместил Землю, вокруг которой по большим и малым кругам, как в хороводе, двигались планеты и звезды.



*Рис.79. Условное изображение наблюдаемого движения Марса на фоне неподвижных звезд*

Геоцентрическая система Птолемея продержалась более 14 столетий и только в середине XVI века была заменена гелиоцентрической системой Коперника. В системе Коперника траектории планет оказались более простыми. Немецкий астроном И. Кеплер в начале XVII века на основе системы Коперника сформулировал три эмпирических закона

движения планет Солнечной системы. Кеплер использовал результаты наблюдений за движением планет датского астронома Т. Браге.

### **Первый закон Кеплера (1609 г.)**

**Все планеты движутся по эллиптическим орбитам, в одном из фокусов которых находится Солнце.**

На рис. 80 показана эллиптическая орбита планеты, масса которой много меньше массы Солнца. Солнце находится в одном из фокусов эллипса. Ближайшая к Солнцу точка  $P$  траектории называется перигелием, точка  $A$ , наиболее удаленная от Солнца, называется афелием или апогелием. Расстояние между афелием и перигелием – большая ось эллипса.

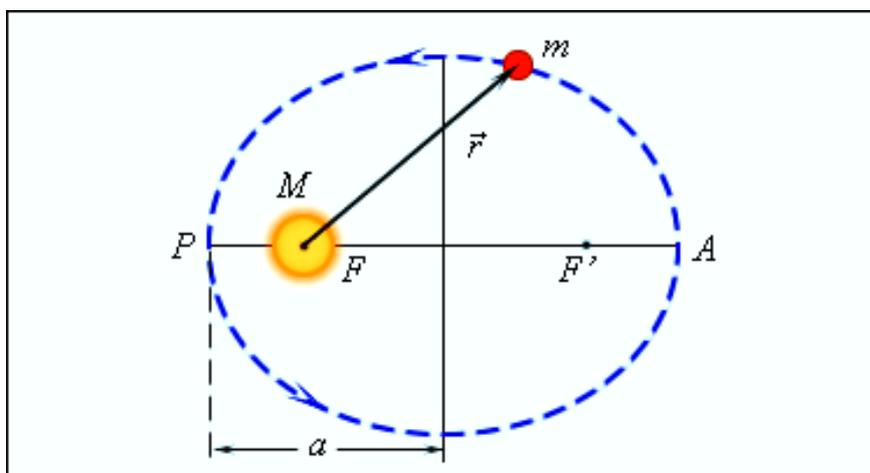


Рис. 80. Эллиптическая орбита планеты массой  $m \ll M$ .  $a$  – длина большой полуоси,  $F$  и  $F'$  – фокусы орбиты

### **Второй закон Кеплера (1609 г.)**

**Радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади.** Рис. 81 иллюстрирует второй закон Кеплера.

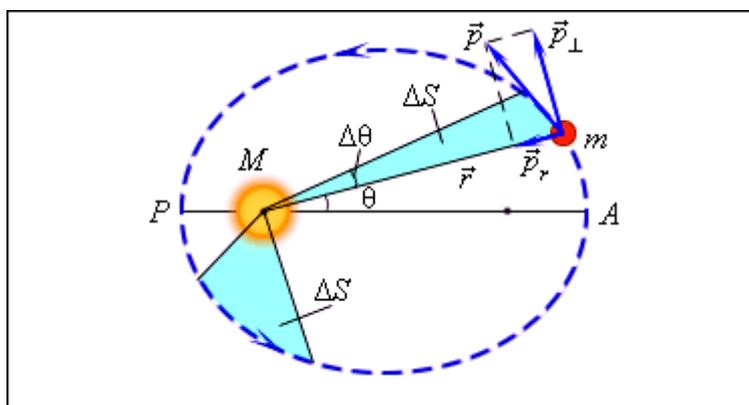


Рис. 81. Закон площадей – второй закон Кеплера

Второй закон Кеплера эквивалентен закону сохранения момента импульса. На рис. 81 изображен вектор импульса тела  $\vec{p}$  и его составляющие  $\vec{p}_r$  и  $\vec{p}_\perp$ . Площадь, замеченная радиус-вектором за малое время  $\Delta t$ , приближенно равна площади треугольника с основанием  $r\Delta\theta$  и высотой  $r$

$$\Delta S = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \Delta\theta \text{ или } \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot \omega; (\Delta t \rightarrow 0), \quad (157)$$

здесь  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ ;  $(\Delta t \rightarrow 0)$  – угловая скорость.

Момент импульса  $L$  по абсолютной величине равен произведению модулей векторов  $\vec{p}_\perp$  и  $\vec{r}$

$$L = r \cdot p_\perp = r \cdot (m \cdot v_\perp) = m \cdot r^2 \cdot \omega, \quad (158)$$

так как  $v_\perp = r \cdot \omega$ .

Из этих отношений следует

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{L}{2 \cdot m}; (\Delta t \rightarrow 0). \quad (159)$$

Поэтому, если по второму закону Кеплера  $\frac{\Delta S}{\Delta t} = const$  то и момент импульса  $L$  при движении остается неизменным.

В частности, поскольку скорости планеты в перигелии  $\vec{v}_p$  и афелии  $\vec{v}_A$  направлены перпендикулярно радиус-векторам  $\vec{r}_p$  и  $\vec{r}_A$  из закона сохранения момента импульса следует

$$r_p \cdot v_p = r_A \cdot v_A. \quad (160)$$

### Третий закон Кеплера (1619 г.)

**Квадраты периодов обращения планет относятся как кубы больших полуосей их орбит**

$$\frac{T^2}{a^3} = const \text{ или } \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}. \quad (161)$$

Третий закон Кеплера выполняется для всех планет Солнечной системы с точностью выше 1 %.

На рис. 82 изображены две орбиты, одна из которых круговая с радиусом  $R$ , а другая – эллиптическая с большой полуосью  $a$ . Третий закон утверждает, что если  $R = a$ , то периоды обращения тел по этим орбитам одинаковы.

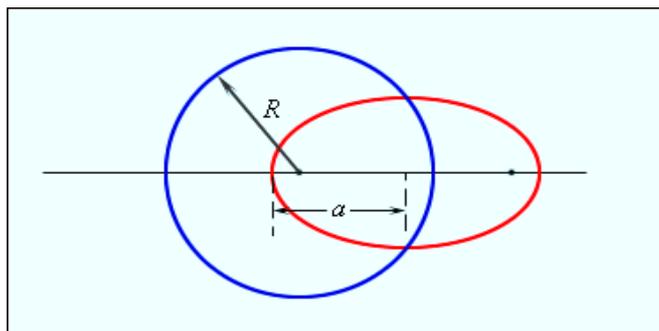


Рис. 82. Круговая и эллиптическая орбиты

### Закон всемирного тяготения

Несмотря на то, что законы Кеплера явились важнейшим этапом в понимании движения планет, они все же оставались только эмпирическими правилами, полученными из астрономических наблюдений. Законы Кеплера нуждались в теоретическом обосновании. Решающий шаг в этом направлении был сделан Исааком Ньютоном, открывшим в 1682 году **закон всемирного тяготения**.

**Между любыми двумя телами (материальными точками) действует сила взаимного притяжения, пропорциональная произведению масс этих тел ( $m_1$  и  $m_2$ ) и обратно пропорциональная квадрату расстояния ( $r$ ) между ними:**

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}, \quad (162)$$

где  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  – гравитационная постоянная.

**Гравитационные силы – это силы притяжения, они направлены по линии, соединяющей центры масс (рис. 83).** У тела в виде однородного шара центр масс совпадает с центром шара.

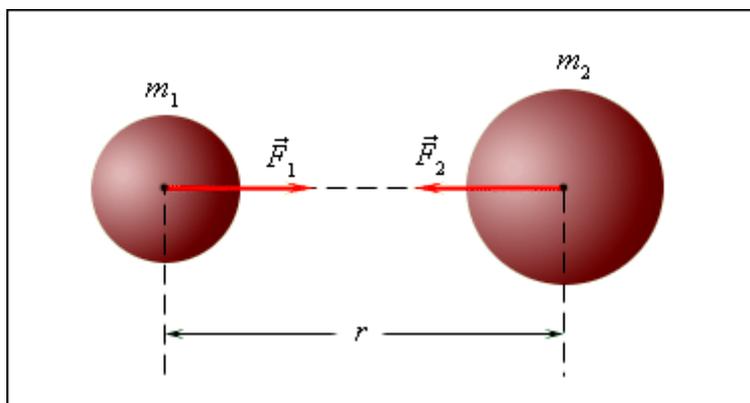


Рис. 83. Гравитационные силы притяжения между телами

На законе всемирного тяготения основывается один из центральных разделов астрономии – небесная механика. Мы ощущаем силу притяжения к Земле, однако притяжение малых тел друг к другу неощутимо. Требовалось экспериментально доказать справедливость закона всемирного тяготения и для обычных тел. **Генри Кавендиш показал, что не только небесные тела, но и обычные, окружающие нас малые тела притягиваются друг к другу по тому же закону.** Принципиальная схема опыта Кавендиша с применением крутильных весов приведена на рис. 84.

Лёгкое коромысло  $A$  с двумя одинаковыми шариками  $m = 729$  г подвешено на упругой нити. На коромысле  $B$  укреплены на той же высоте массивные шары массой  $M = 158$  кг. Поворачивая коромысло  $B$  вокруг вертикальной оси, можно измерять расстояние между шарами с массами  $m$  и  $M$ . Под действием пары сил, приложенных к шарам  $m$  со стороны шаров  $M$ , коромысло  $A$  поворачивается в горизонтальной плоскости – закручивая нить до тех пор, пока момент сил упругости не уравновесит момент сил тяготения. Зная упругие свойства нити, по измеренному углу поворота можно найти возникающие силы притяжения, а так как массы шаров известны, то и вычислить значение  $G$ .

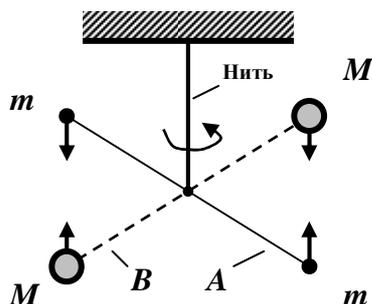


Рис.84. Крутильные весы

Согласно закону всемирного тяготения и вычисленному значению  $G$  ( $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ ), два точечных тела массой по 1 кг, находящиеся на расстоянии 1 м друг от друга, притягиваются с силой  $6,67 \cdot 10^{-11}$  Н. Это означает, что сила гравитационного взаимодействия значительна только в случае больших масс.

Ньютон первый высказал мысль о том, что гравитационные силы определяют не только движение планет Солнечной системы, они действуют между любыми телами Вселенной. В частности, сила тяжести, действующая на тела вблизи поверхности Земли, имеет гравитационную природу. Действием сил всемирного тяготения объясняются движение

планет в Солнечной системе, движение искусственных спутников Земли, траектории полета баллистических ракет и т.д.

Для круговых орбит первый и второй закон Кеплера выполняются автоматически, а третий закон утверждает, что  $T^2 \sim R^3$ , где  $T$  – период обращения,  $R$  – радиус орбиты. Отсюда можно получить зависимость гравитационной силы от расстояния. При движении планеты по круговой траектории на неё действует центростремительная сила, которая возникает за счет гравитационного взаимодействия планеты и Солнца

$$F \sim \omega^2 \cdot R = \frac{(2 \cdot \pi)^2 \cdot R}{T^2}. \quad (163)$$

Если  $T^2 \sim R^3$ , то  $F \sim \frac{1}{R^2}$ .

### **Гравитационное поле. Ускорение свободного падения**

Гравитационное поле (поле тяготения) – поле, посредством которого осуществляется гравитационное взаимодействие между телами. Это поле порождается телами и является формой существования материи.

Тяготение принадлежит к особой группе взаимодействий. Сила тяготения, например, не зависит от того, в какой среде взаимодействующие тела находятся. Тяготение существует в вакууме.

**Обобщённый закон Галилея:** все тела в одном и том же поле тяготения падают с одинаковым ускорением (ускорением свободного падения).

Согласно обобщённому закону Галилея, в данном месте Земли ускорение свободного падения одинаково для всех тел. Оно изменяется вблизи поверхности Земли с широтой в пределах от  $9,780 \text{ м/с}^2$  на экваторе до  $9,832 \text{ м/с}^2$  на полюсах.

Это обусловлено суточным вращением Земли вокруг своей оси, с одной стороны, и сплюснутостью Земли – с другой (экваториальный и полярный радиусы Земли равны соответственно  $6378 \text{ км}$  и  $6357 \text{ км}$ ). При решении практических задач применяется, что  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Если пренебречь суточным вращением Земли и высотой расположения тела над Землёй ( $h \ll R_3$ ), то можно воспользоваться связью между силой тяжести и силой тяготения

$$m \cdot g = \frac{G \cdot m \cdot M}{R_3^2}. \quad (164)$$

$$\text{Из (164)} \Rightarrow g = G \cdot \frac{M}{R_3^2}. \quad (165)$$

Сила тяжести направлена к центру Земли. В отсутствии других сил тело свободно падает на Землю с ускорением свободного падения. Среднее значение ускорения свободного падения для различных точек поверхности Земли равно  $9,81 \text{ м/с}^2$ . Зная ускорение свободного падения и радиус Земли ( $R_3 = 6,38 \cdot 10^6 \text{ м}$ ), можно вычислить массу Земли  $M$

$$M = \frac{g \cdot R_3^2}{G} = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ кг.}$$

При удалении от поверхности Земли сила земного тяготения и ускорение свободного падения изменяются обратно пропорционально квадрату расстояния  $r$  до центра Земли. Рис. 85 иллюстрирует изменение силы тяготения, действующей на космонавта в космическом корабле при его удалении от Земли. Сила, с которой космонавт притягивается к Земле вблизи ее поверхности, принята равной 700 Н.

Примером системы двух взаимодействующих тел может служить система Земля–Луна. Луна находится от Земли на расстоянии  $r_{Л} = 3,84 \cdot 10^6 \text{ м}$ . Это расстояние приблизительно в 60 раз превышает радиус Земли  $R_3$ .

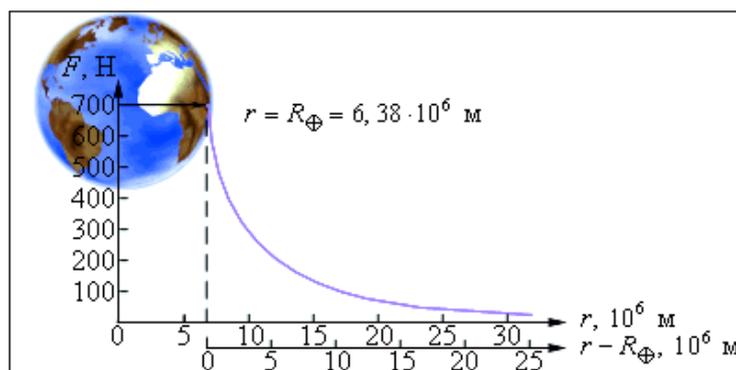


Рис. 85. Изменение силы тяготения, действующей на космонавта при удалении от Земли

Следовательно, ускорение свободного падения  $a_{Л}$ , обусловленное земным притяжением, на орбите Луны составляет

$$a_{Л} = g \cdot \left(\frac{R_3}{r_{Л}}\right)^2 = \frac{9,81 \text{ м/с}^2}{60^2} = 0,0027 \text{ м/с}^2.$$

С таким ускорением, направленным к центру Земли, Луна движется по орбите. Следовательно, это ускорение является центростремительным ускорением. Его можно рассчитать по кинематической формуле для центростремительного ускорения

$$a_{\text{Л}} = \frac{v^2}{r_{\text{Л}}} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot r_{\text{Л}})^2}{r_{\text{Л}} \cdot r_{\text{Л}} \cdot T^2} = \frac{4 \cdot \pi^2 \cdot r_{\text{Л}}}{T^2} = 0,0027 \text{ м/с}^2,$$

где  $T = 27,3$  сут – период обращения Луны вокруг Земли. Совпадение результатов расчетов, выполненных разными способами, подтверждает предположение Ньютона о единой природе силы, удерживающей Луну на орбите, и силы тяжести.

Собственное гравитационное поле Луны определяет ускорение свободного падения  $g_{\text{Л}}$  на ее поверхности. Масса Луны в 81 раз меньше массы Земли, а ее радиус приблизительно в 3,7 раза меньше радиуса Земли. Поэтому ускорение  $g_{\text{Л}}$  определится выражением

$$g_{\text{Л}} = G \cdot \frac{M_{\text{Л}}}{R_{\text{Л}}^2} = G \cdot \frac{M_{\text{З}}}{T_{\text{З}}^2} \cdot \frac{3,7^2}{81} = 0,17 \cdot g = 1,66 \text{ м/с}^2.$$

Человек в таких условиях может совершать гигантские прыжки. Например, если человек в земных условиях подпрыгивает на высоту 1 м, то на Луне он мог бы подпрыгнуть на высоту более 6 м.

### **Характеристики гравитационного поля**

**Напряжённость гравитационного поля** (силовая, векторная характеристика поля) – физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны поля на материальную точку единичной массы; совпадает по направлению с действующей силой

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (166)$$

$[g]$  1 Н/кг = 1 м/с<sup>2</sup>. 1 ньютон на килограмм – напряжённость гравитационного поля, которое на тело массой 1 кг действует с силой 1 Н. Размерность  $\vec{g}$  совпадает с размерностью ускорения.

Центральное поле тяготения – поле, во всех точках которого векторы напряжённости направлены вдоль прямых, пересекающихся в одной точке (А), неподвижной по отношению к какой-либо инерциальной системе отчёта (рис. 86).

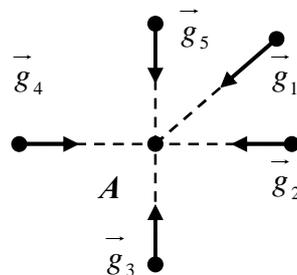


Рис. 86. Центральное поле тяготения

Линии напряжённости поля тяготения (силовые линии) – линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора напряжённости  $\vec{g}$ . Линиям напряжённости приписывается направление, совпадающее с вектором  $\vec{g}$ .

### Работа в гравитационном поле

Работа по перемещению тела массой  $m$  в поле тяготения на расстоянии  $dR$  (рис. 87)

$$dA = -G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} dR. \quad (167)$$

Знак минус появляется потому, что сила  $\left( F = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} \right)$  и перемещение противоположны по направлению.

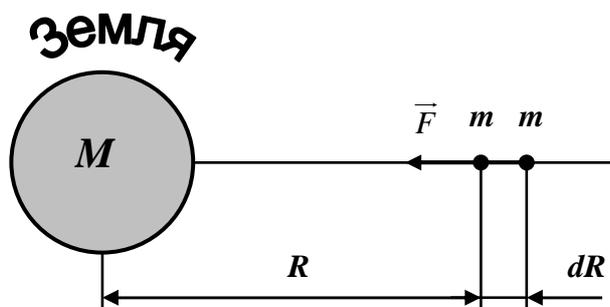


Рис. 87. Перемещение тела массой  $m$  в поле тяготения

Работа при перемещении тела с расстояния  $R_1$  до расстояния  $R_2$

$$A = \int_{R_1}^{R_2} dA = - \int_{R_1}^{R_2} G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} dR = m \cdot \left( \frac{G \cdot M}{R_2} - \frac{G \cdot M}{R_1} \right), \quad (168)$$

где  $M$  – масса Земли.

Затраченная работа в гравитационном поле не зависит от траектории перемещения, а определяется лишь начальным и конечным положениями тела, то есть **силы тяготения консервативны, а поле тяготения является потенциальным.**

### Потенциал гравитационного поля

Потенциальная энергия тела массой  $m$  в гравитационном поле

$$E_p = -G \cdot \frac{m \cdot M}{R}. \quad (169)$$

Работа, совершаемая гравитационными силами, равна изменению потенциальной энергии системы, взятому со знаком минус ( $A = -\Delta E_p = -(E_{p2} - E_{p1}) = E_{p1} - E_{p2}$ ). Тогда, учитывая выражение для  $A$  (168), имеем:

$$E_{p1} - E_{p2} = -m \cdot \left( \frac{G \cdot M}{R_1} - \frac{G \cdot M}{R_2} \right). \quad (170)$$

При  $R_2 \rightarrow \infty$  потенциальная энергия  $E_{p2} \rightarrow 0$ . Первая точка выбрана произвольно, получаем записанное выражение.

**Потенциал гравитационного поля** – физическая величина, определяемая потенциальной энергией тела единичной массы в данной точке поля или работой по перемещению единичной массы из данной точки в бесконечность

$$\varphi = E_p / m. \quad (171)$$

Потенциал гравитационного поля – энергетическая скалярная характеристика.

$[\varphi]$  1 Дж/кг. 1 джоуль на килограмм – потенциал такой точки гравитационного поля, в которой тело массой 1 кг обладает потенциальной энергией 1 Дж.

Потенциал поля тяготения, создаваемого телом массой  $M$

$$\varphi = -\frac{G \cdot M}{R}, \quad (172)$$

где  $G$  – гравитационная постоянная;  $R$  – расстояние от этого тела до рассматриваемой точки.

Потенциальная энергия тела на высоте  $h \ll R_0$  ( $R_0$  – радиус Земли)

$$E_p = m \cdot g \cdot h. \quad (173)$$

Действительно, исходя из представлений теории тяготения

$$E_p = \frac{G \cdot m \cdot M}{R_0 + h} - \left( -\frac{G \cdot m \cdot M}{R_0} \right) = \frac{G \cdot m \cdot M \cdot h}{R_0 \cdot (R_0 + h)},$$

так как  $P = \frac{G \cdot m \cdot M}{R_0^2}$  и  $g = \frac{P}{m} = \frac{G \cdot M}{R_0^2}$ , то с учётом  $h \ll R_0$ , получаем

$$E_p = \frac{m \cdot G \cdot M \cdot h}{R_0^2} = m \cdot g \cdot h.$$

### **Напряжённость как градиент потенциала**

При перемещении тела массой  $m$  на расстоянии  $dR$  совершается работа  $dA = G \cdot \frac{m \cdot M}{R^2} dR$  и  $\varphi = \frac{G \cdot M}{R}$ . Тогда  $dA = -md\varphi$ . Учитывая, что

$dA = Fdl = m \cdot gdl$ , получаем  $m \cdot gdl = -md\varphi$ , или  $g = -\frac{d\varphi}{dl}$ . Величина

$\frac{d\varphi}{dl}$  характеризует изменение потенциала на единицу длины в направлении перемещения в поле тяготения.

$$\vec{g} = -\text{grad}\varphi. \quad (174)$$

Знак минус указывает на то, что вектор напряжённости  $\vec{g}$  направлен в сторону убывания потенциала ( $\text{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}$  – градиент скаляра  $\varphi$ ).

Для графического изображения распределения потенциала используют эквипотенциальные поверхности. **Эквипотенциальные поверхности** – поверхности, во всех точках которых потенциал  $\varphi$  гравитационного поля имеет одно и то же значение.

### Космические скорости

Космические скорости – скорости для достижения определённых космических орбит (рис. 88).

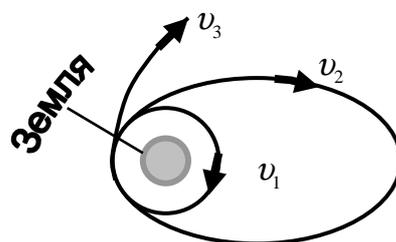


Рис. 88. Космические скорости

**Первая космическая скорость** – минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло двигаться по круговой орбите, то есть превратиться в искусственный спутник Земли.

На спутник, движущийся по круговой орбите радиусом  $r$ , действует сила тяготения Земли, сообщающая ему нормальное ускорение  $\frac{v_1^2}{r}$ .

По второму закону Ньютона  $\frac{G \cdot m \cdot M}{r^2} = \frac{m \cdot v_1^2}{r}$  (\*). Если спутник движется вблизи поверхности Земли  $r \approx R_0$  ( $R_0$  – радиус Земли).

$m \cdot g = G \cdot \frac{m \cdot M}{R_0^2} \Rightarrow g = G \cdot \frac{M}{R_0^2}$  (\*\*). Тогда у поверхности земли из (\*) и

(\*\*)

$$v_1 = \sqrt{g \cdot R_0} . \quad (175)$$

$v_1 = 7,9$  км/с.

**Вторая космическая скорость** – наименьшая скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение Земли и стать искусственным спутником Солнца, то есть, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической.

Чтобы тело (при отсутствии сопротивления среды) могло преодолеть земное притяжение и уйти в космическое пространство, его кинетическая энергия должна быть равна работе, совершаемой против сил

тяготения:  $\frac{m \cdot v_2^2}{2} = \int_{R_0}^{\infty} G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} dr = G \cdot \frac{m \cdot M}{R_0}$ , откуда

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot R_0} . \quad (176)$$

$v_2 = 11,2$  км/с.

**Третья космическая скорость** – скорость, которую необходимо сообщить телу на Земле, чтобы оно покинуло пределы Солнечной системы, преодолев притяжение Солнца.

$v_3 = 16,7$  км/с.

16,7 км/с – это минимальное значение третьей космической скорости. Величина третьей космической скорости зависит от выбора направления запуска тела и лежит в пределах (16,7–73) км/с.

## 1.6. Элементы гидро- и аэродинамики

Движение жидкостей или газов представляет собой сложное явление. Для его описания используются различные упрощающие предположения (модели). В простейшей модели жидкость (или газ) предполагается несжимаемой и идеальной (то есть без внутреннего трения между движущимися слоями).

Молекулы газа, совершая беспорядочное, хаотическое движение, не связаны или слабо связаны силами взаимодействия, поэтому они движутся свободно и в результате соударений стремятся разлететься во все стороны, заполняя весь предоставленный им объём, то есть объём газа определяется объёмом того сосуда, который газ занимает.

Жидкость же, имея определённый объём, принимает форму того сосуда, в который она заключена. Но и в жидкостях, в отличие от газов,

среднее расстояние между молекулами остаётся постоянным, поэтому жидкость обладает практически неизменным объёмом.

В ряде механических явлений поведение жидкостей и газов определяется одинаковыми параметрами и идентичными уравнениями. Поэтому пользуются единым термином «жидкость». Жидкость или газ, зависимость плотностей которых от давления в данной задаче можно пренебречь, называют **несжимаемой жидкостью**.

Давление в жидкости – физическая величина, определяемая силой, действующей со стороны жидкости на единицу площади поверхности в перпендикулярном к поверхности направлении (рис. 89):

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (177)$$

$$[p] \text{ 1 Па. } 1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2.$$

1 паскаль равен давлению, создаваемому силой 1 Н, равномерно распределённой по нормали к ней поверхности площадью 1 м<sup>2</sup>.

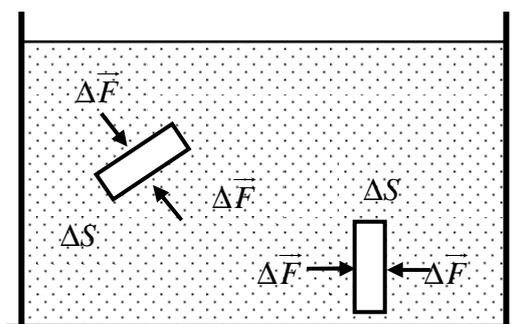


Рис. 89. Давление в жидкости

### Закон Паскаля. Закон Архимеда

**Закон Паскаля:** давление в любом месте покоящейся жидкости одинаково по всем направлениям, причём давление одинаково передаётся по всему объёму, занятому покоящейся жидкостью (рис. 90).

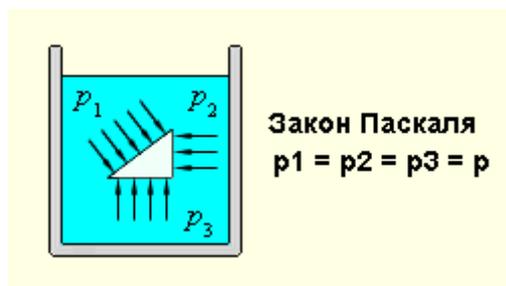


Рис. 90. К закону Паскаля

Применение закона Паскаля – гидравлический подъёмник.

В данном случае небольшая сила  $\vec{F}_1$  преобразуется в значительную силу  $\vec{F}_2$  благодаря тому, что площадь второго поршня  $S_2$  больше первого поршня  $S_1$  (рис. 91), то есть  $p_1 = p_2$ ;  $\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2} \Rightarrow$

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1. \quad (178)$$

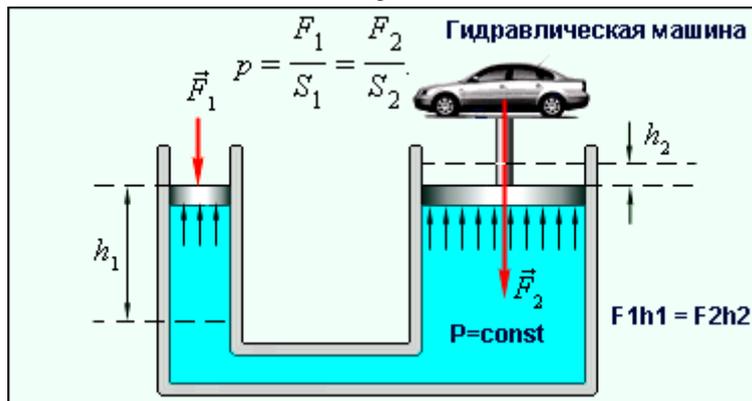


Рис. 91. Гидравлический подъёмник

**Закон Архимеда:** на тело, погруженное в жидкость (газ), действует со стороны этой жидкости направленная вверх выталкивающая сила, равная весу вытесненной телом жидкости (газа)

$$F_A = \rho \cdot g \cdot V, \quad (179)$$

где  $\rho$  – плотность жидкости;  $V$  – объём погруженной в жидкость части тела (рис. 92).



Рис. 92. К закону Архимеда

### Гидростатическое давление

При равновесии жидкости давление по горизонтали всегда одинаково, иначе не было бы равновесия. Поэтому свободная поверхность

покоящейся жидкости всегда горизонтальна вдали от стенок сосуда. Если жидкость не сжимаема, то её плотность не зависит от давления.

Тогда при поперечном сечении  $S$  столба жидкости, его высоте  $h$  и плотности  $\rho$  вес  $P = \rho \cdot g \cdot S \cdot h$ , а давление на нижнее основание

$p = \frac{P}{S} = \frac{\rho \cdot g \cdot S \cdot h}{S}$ , то есть, давление изменяется линейно с высотой (рис. 93)

$$p = \rho \cdot g \cdot h. \quad (180)$$

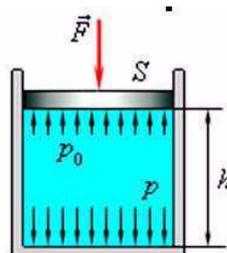


Рис. 93. Зависимость давления от высоты столба жидкости

### Уравнение неразрывности

**Течение** – движение жидкости.

**Поток** – совокупность частиц в движущейся жидкости.

**Линия тока** – линия, в каждой точке которой касательная к ней совпадает по направлению с вектором скорости в данный момент времени. Линии тока используются для графического изображения движения жидкости (рис. 94).

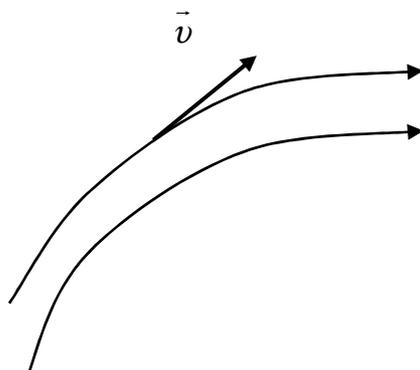


Рис. 94. Линии тока

Линии тока проводятся так, чтобы густота их, характеризуемая отношением числа линий к площади перпендикулярной им площадки, через которую они проходят, была бы больше там, где больше скорость течения жидкости, и меньше там, где жидкость течёт медленнее. По картине линий тока можно судить о направлении и модуле скорости

в разных точках пространства, то есть можно определить состояние движения жидкости.

**Трубка тока** – часть жидкости, ограниченная линиями тока. **Установившееся, стационарное течение** – течение жидкости, при котором форма и расположение линий тока, а также значение скоростей в каждой её точке со временем не изменяются.

Уравнение неразрывности для несжимаемой жидкости

$$S_1 \cdot v_1 = S_2 \cdot v_2, \quad (181)$$

или

$$S \cdot v = const. \quad (181^*)$$

**Произведение скорости течения несжимаемой жидкости на поперечное сечение трубки тока есть величина постоянная для данной трубки тока.**

### **Уравнение Бернулли**

При движении идеальной жидкости не происходит превращения механической энергии во внутреннюю энергию, поэтому выполняется закон сохранения механической энергии. Следствием этого закона для стационарного потока идеальной и несжимаемой жидкости является уравнение Бернулли, сформулированное в 1738 г. Стационарным принято называть такой поток жидкости, в котором не образуются вихри. В стационарном потоке частицы жидкости перемещаются по неизменным во времени траекториям, которые называются линиями тока. Опыт показывает, что стационарные потоки возникают только при достаточно малых скоростях движения жидкости.

Рассмотрим стационарное движение идеальной несжимаемой жидкости по трубе переменного сечения (рис. 95). Различные части трубы могут находиться на разных высотах.

За промежуток времени  $\Delta t$  жидкость в трубе сечением  $S_1$  переместится на  $l_1 = v_1 \cdot \Delta t$ , а в трубе сечением  $S_2$  – на  $l_2 = v_2 \cdot \Delta t$ , где  $v_1$  и  $v_2$  – скорости частиц жидкости в трубах. Условие несжимаемости записывается в виде

$$\Delta V = l_1 \cdot S_1 = l_2 \cdot S_2, \quad (182)$$

или 
$$v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2. \quad (182^*)$$

Здесь  $\Delta V$  – объем жидкости, протекшей через сечения  $S_1$  и  $S_2$ .

Таким образом, при переходе жидкости с участка трубы с большим сечением на участок с меньшим сечением скорость течения возрастает, то есть жидкость движется с ускорением. Следовательно, на жидкость действует сила. В горизонтальной трубе эта сила может возникнуть только из-за разности давлений в широком и узком участках трубы.

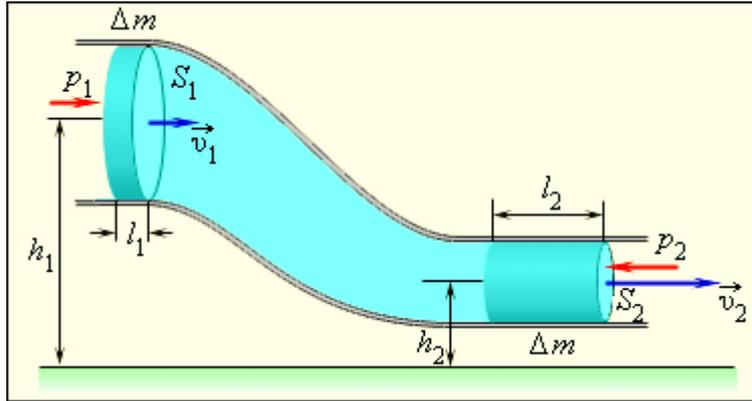


Рис. 95. Течение идеальной жидкости по трубе переменного сечения

Давление в широком участке трубы должно быть больше, чем в узком участке. Если участки трубы расположены на разной высоте, то ускорение жидкости вызывается совместным действием силы тяжести и силы давления. Сила давления – это упругая сила сжатия жидкости. Несжимаемость жидкости означает лишь то, что появление упругих сил происходит при пренебрежимо малом изменении объема любой части жидкости.

Так как жидкость предполагается идеальной, то она течет по трубе без трения. Поэтому к её течению можно применить закон сохранения механической энергии.

При перемещении жидкости силы давления совершают работу

$$\Delta A = p_1 \cdot S_1 \cdot l_1 - p_2 \cdot S_2 \cdot l_2 = p_1 \cdot S_1 \cdot v_1 \cdot \Delta t - p_2 \cdot S_2 \cdot v_2 \cdot \Delta t = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V. \quad (183)$$

Работа  $\Delta A$  сил давления равна изменению потенциальной энергии упругой деформации жидкости, взятому с обратным знаком.

Изменения, произошедшие за время  $\Delta t$  в выделенной части жидкости, заключенной между сечениями  $S_1$  и  $S_2$  в начальный момент времени, при стационарном течении сводятся к перемещению массы жидкости  $\Delta m = \rho \cdot \Delta V$  ( $\rho$  – плотность жидкости) из одной части трубы сечением  $S_1$  в другую часть сечением  $S_2$  (заштрихованные объемы на рис. 95). Закон сохранения механической энергии для этой массы имеет вид

$$E_2 - E_1 = \Delta A = (p_1 - p_2) \cdot \Delta V, \quad (184)$$

где  $E_1$  и  $E_2$  – полные механические энергии массы  $\Delta m$  в поле тяготения.

$$E_1 = \frac{\Delta m \cdot v_1^2}{2} + \Delta m \cdot g \cdot h_1; \quad E_2 = \frac{\Delta m \cdot v_2^2}{2} + \Delta m \cdot g \cdot h_2. \quad (185)$$

Отсюда следует

$$\frac{\rho \cdot v_1^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_1 + p_1 = \frac{\rho \cdot v_2^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h_2 + p_2. \quad (186)$$

Это и есть уравнение Бернулли. Из него следует, что сумма  $\frac{\rho \cdot v^2}{2} + \rho \cdot g \cdot h + p = const$  остается неизменной вдоль всей трубы.

В частности, для горизонтально расположенной трубы ( $h_1 = h_2$ ) уравнение Бернулли принимает вид

$$\frac{\rho \cdot v^2}{2} + p = const. \quad (187)$$

Величина  $p$  – статическое давление в жидкости. Оно может быть измерено с помощью манометра, перемещающегося вместе с жидкостью. Практически давление в разных сечениях трубы измеряется с помощью манометрических трубок, вставленных через боковые стенки в поток жидкости, так чтобы нижние концы трубок были параллельны скоростям частиц жидкости (рис. 96). Из уравнения Бернулли следует:

**давление в жидкости, текущей по горизонтальной трубе переменного сечения, больше в тех сечениях потока, в которых скорость ее движения меньше, и наоборот, давление меньше в тех сечениях, в которых скорость больше.**

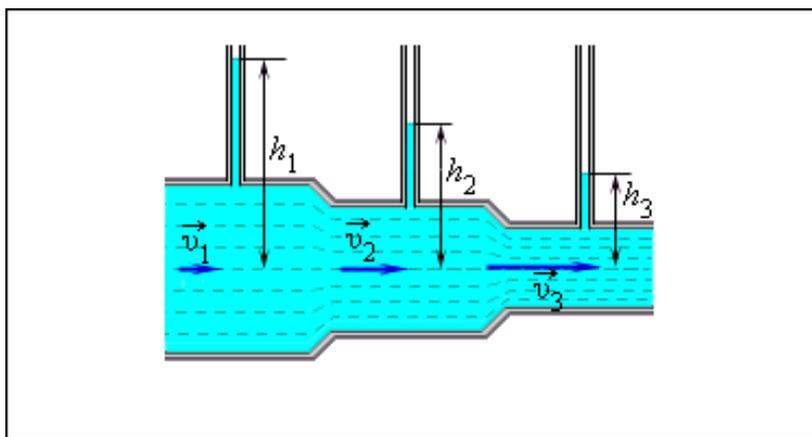


Рис. 96. Измерение давления в потоке жидкости с помощью манометров:  $v_1 < v_2 < v_3$ ;  $h_1 > h_2 > h_3$

Если сечение потока жидкости достаточно велико, то уравнение Бернулли следует применять к линиям тока, то есть линиям, вдоль которых перемещаются частицы жидкости при стационарном течении. Например, при истечении идеальной несжимаемой жидкости из отверстия в боковой стенке или дне широкого сосуда линии тока начинаются вблизи свободной поверхности жидкости и проходят через отверстие (рис. 97).

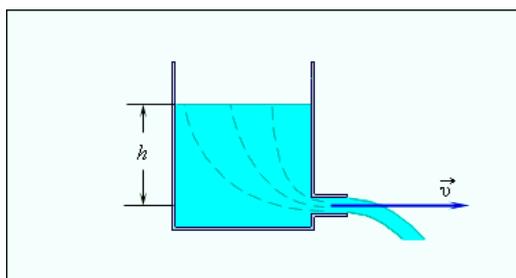


Рис. 97. Истечение жидкости из широкого сосуда

Поскольку скорость жидкости вблизи поверхности в широком сосуде пренебрежимо мала, то уравнение Бернулли принимает вид

$$\rho \cdot g \cdot h + p_0 = \frac{\rho \cdot v^2}{2} + p_0, \quad (188)$$

где  $p_0$  – атмосферное давление,  $h$  – перепад высоты вдоль линии тока. Таким образом,

$$v = \sqrt{2 \cdot g \cdot h}. \quad (189)$$

Это выражение для скорости истечения называют **формулой Торричелли**. Скорость истечения идеальной жидкости из отверстия в сосуде такая же, как и при свободном падении тела с высоты  $h$  без начальной скорости.

### Вязкость

Вязкость (внутреннее трение) – свойство реальных жидкостей оказывать сопротивление перемещению одной части жидкости относительно другой.

При перемещении одних слоёв реальной жидкости относительно других возникают силы внутреннего трения, направленные по касательной к поверхности слоёв. Действие этих сил проявляется в том, что со стороны слоя, движущегося быстрее, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила. Со стороны же слоя, движущегося медленнее, на слой, движущийся быстрее, действует тормозящая сила.

Направление, в котором отсчитывается расстояние между слоями, перпендикулярно скорости течения слоёв (рис. 98).

Градиент скорости  $\frac{\Delta v}{\Delta x}$  – величина, показывающая, как быстро меняется скорость при переходе от слоя к слою в направлении  $x$ , перпендикулярном направлению движения слоёв.

Сила внутреннего трения

$$F = \eta \cdot \left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| \cdot S. \quad (190)$$

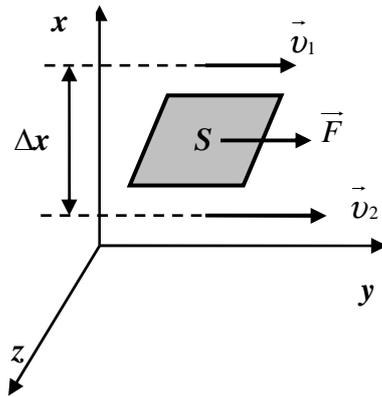


Рис. 98. Два слоя жидкости, отстоящие друг от друга на  $\Delta x$

Сила внутреннего трения тем больше, чем больше рассматриваемая площадь поверхности слоя  $S$  (рис. 98), и зависит от того, насколько быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою.

Динамическая вязкость

$$\eta = \frac{F}{\left| \frac{\Delta v}{\Delta x} \right| \cdot S} \quad (191)$$

определяется силой внутреннего трения, действующей на единицу поверхности слоя жидкости при наличии градиента скорости, равного единице.

$[\eta]$   $1 \text{ Па}\cdot\text{с} = 1 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$ . 1 паскаль-секунда равен динамической вязкости среды, в которой при ламинарном течении и градиенте скорости с модулем, равным  $1 \text{ м}/\text{с}$  на  $1 \text{ м}$ , возникает сила внутреннего трения  $1 \text{ Н}$  на  $1 \text{ м}^2$  поверхности касания слоёв.

Характер зависимости вязкости  $\eta$  от температуры для газов и жидкостей различен (для жидкостей  $\eta$  с увеличением температуры уменьшается, у газов, наоборот увеличивается), что указывает на различие в них механизмов внутреннего трения. Сильно от температуры зависит вязкость масел (вязкость касторового масла в интервале температур от  $18\text{--}40 \text{ }^\circ\text{C}$  уменьшается в 4 раза). Например, жидкий гелий при  $T = 2,17 \text{ К}$  переходит в сверхтекучее состояние, в котором его вязкость равна нулю (открытие П.Л. Капицы).

### **Ламинарное и турбулентное течения**

Ламинарное (слоистое) течение – течение, при котором вдоль потока каждый выделенный тонкий слой скользит относительно соседних, не перемешиваясь с ними.

Турбулентное (вихревое) течение – течение, при котором вдоль потока происходит интенсивное вихреобразование и перемешивание слоёв движущейся жидкости (газа).

При таком течении скорость частиц жидкости быстро возрастает по мере удаления от поверхности трубы, затем изменяется довольно незначительно. Поэтому профиль скорости при турбулентном течении в трубах (рис. 99) отличается от параболического профиля при ламинарном течении более быстрым возрастанием скорости у стенок трубы и меньшей кривизной в центральной части течения.

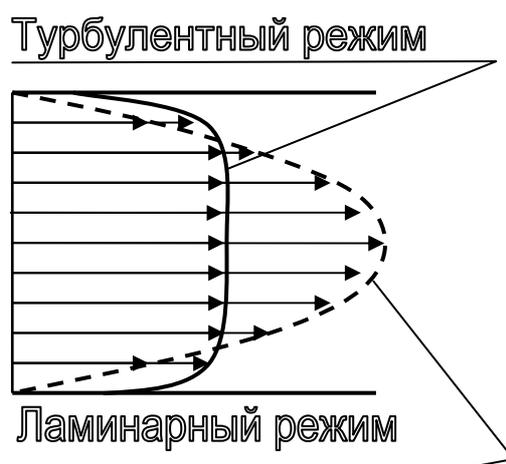


Рис. 99. Профили скорости при течении в трубе

Число Рейнольдса – безразмерная величина, определяющая характер течения жидкости

$$Re = \frac{\rho \cdot \langle v \rangle \cdot d}{\eta} = \frac{\langle v \rangle \cdot d}{\nu}, \quad (192)$$

где  $\nu = \eta / \rho$  – кинематическая вязкость;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\langle v \rangle$  – средняя по сечению трубы скорость жидкости;  $d$  – характерный линейный размер, например диаметр трубы.

При малых значениях числа Рейнольдса ( $Re \leq 1000$ ) наблюдается ламинарное течение; при  $1000 \leq Re \leq 2000$  происходит переход к турбулентному течению; при  $Re = 2300$  (для гладких труб) течение – турбулентное. При одинаковых  $Re$  режим течения различных жидкостей (газов) в трубах разных сечений одинаков.

### **Методы определения вязкости.**

#### **Метод Стокса**

**Метод Стокса** – метод, основанный на измерении скорости медленно движущихся в жидкости небольших тел сферической формы.

На шарик, падающий в жидкости вертикально вниз, действуют: сила тяжести, сила Архимеда и сила сопротивления (рис. 100).

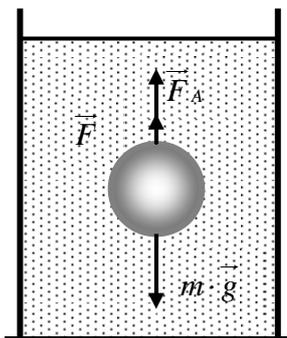


Рис. 100. Шарик, падающий в жидкости

Сила тяжести

$$m \cdot g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g. \quad (193)$$

Сила Архимеда

$$F_A = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho' \cdot g. \quad (194)$$

Сила сопротивления (установлена опытным путём)

$$F = 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v. \quad (195)$$

В формулах (193–195):

$\rho$  – плотность шарика;

$r$  – радиус шарика;

$\rho'$  – плотность жидкости;

$g$  – ускорение свободного падения;

$v$  – скорость шарика.

При равномерном движении шарика  $m \cdot g = F + F_A$  или

$$\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho \cdot g = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \cdot \rho' \cdot g + 6 \cdot \pi \cdot \eta \cdot r \cdot v, \text{ откуда}$$

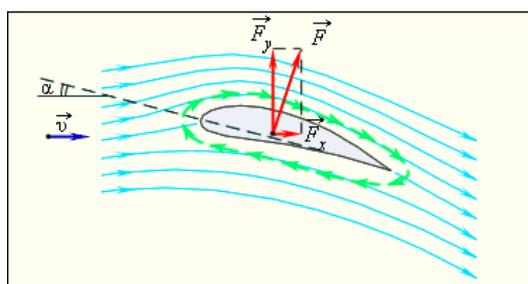
$$v = \frac{2(\rho - \rho') \cdot g \cdot r^2}{9 \cdot \eta}. \quad (196)$$

Измерив скорость равномерного движения шарика, можно определить вязкость.

### **Подъёмная сила крыла самолёта**

Уравнение Бернулли можно применять к достаточно широкому классу задач аэродинамики. Одной из таких задач является изучение

сил, действующих на крыло самолета. Строгое теоретическое решение этой задачи чрезвычайно сложно (обычно для исследования сил применяются экспериментальные методы). Уравнение Бернулли позволяет дать лишь качественное объяснение возникновению подъемной силы крыла. На рис. 101 изображены линии тока воздуха при обтекании крыла самолета. Из-за специального профиля крыла и наличия угла атаки, то есть угла наклона крыла по отношению к набегающему потоку воздуха, скорость воздушного потока над крылом оказывается больше, чем под крылом. Поэтому на рис. 101 линии тока над крылом располагаются ближе друг к другу, чем под крылом. Из уравнения Бернулли следует, что **давление в нижней части крыла будет больше, чем в верхней.** В результате появляется сила  $\vec{F}$ , действующая на крыло. **Вертикальная составляющая  $\vec{F}_y$  этой силы называется подъемной силой.** Подъемная сила позволяет скомпенсировать силу тяжести, действующую на самолет, и тем самым она обеспечивает возможность полета тяжелых летательных аппаратов в воздухе. Горизонтальная составляющая  $\vec{F}_x$  представляет собой силу сопротивления среды.



*Рис. 101. Линии тока при обтекании крыла самолета и возникновение подъемной силы;  $\alpha$  – угол атаки*

Теория подъемной силы крыла самолета была создана Н.Е. Жуковским. Он показал, что при обтекании крыла существенную роль играют силы вязкого трения в поверхностном слое. В результате их действия возникает круговое движение (циркуляция) воздуха вокруг крыла (зеленые стрелки на рис. 102). В верхней части крыла скорость циркулирующего воздуха складывается со скоростью набегающего потока, в нижней части эти скорости направлены в противоположные стороны. Поэтому возникает разность давлений и появляется подъемная сила.

Циркуляция воздуха, обусловленная силами вязкого трения, возникает и вокруг вращающегося тела (например, цилиндра). При вращении цилиндр увлекает прилегающие слои воздуха, вызывая его циркуляцию. Если такой цилиндр установить в набегающем потоке воздуха, то воз-

никнет сила бокового давления, аналогичная подъемной силе крыла самолета. Это явление называется эффектом Магнуса.

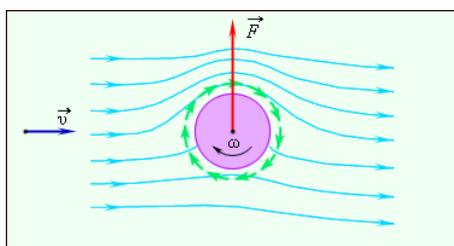


Рис. 102. Обтекание вращающегося цилиндра набегающим потоком воздуха

Рис. 102 иллюстрирует обтекание вращающегося цилиндра набегающим потоком. Эффект Магнуса проявляется, например, при полете закрученного мяча при игре в теннис или футбол.

## 1.7. Элементы релятивистской механики

### Преобразования Галилея.

#### Механический принцип относительности

Рассмотрим две системы отсчёта, движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью  $v$ . Одну из этих систем обозначим буквой  $K$  и будем считать условно неподвижной. Тогда вторая система  $K'$  будет двигаться прямолинейно и равномерно со скоростью  $v$ . Выберем координатные оси  $x', y', z'$  системы  $K'$  так, чтобы оси  $x$  и  $x'$  совпадали, а оси  $y$  и  $y'$ , а также  $z$  и  $z'$  были параллельны друг другу (рис. 103).

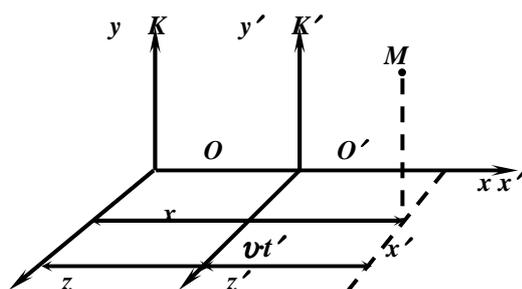


Рис. 103. Системы отсчёта  $K$  и  $K'$

Найдем связь между координатами  $x, y, z$  некоторой точки  $M$  в системе  $K$  и координатами той же точки в системе  $K'$ .

За начало отсчета времени выберем момент, когда начало координат обеих систем совпадало.

Из рис.103 видно, что

$$\begin{aligned}x &= x' + vt'; \\y &= y'; \\z &= z'.\end{aligned}$$

Добавим к этим соотношениям принятое в классической механике предположение, что время в обеих системах течет одинаковым образом, то есть  $t = t'$ , и получим совокупность четырех уравнений, называемых преобразованиями Галилея:

$$\begin{aligned}x &= x' + vt'; \\y &= y'; \\z &= z'; \\t &= t'.\end{aligned}\tag{197}$$

Продифференцировав соотношения (197) по времени, найдем связь между скоростями точки  $M$  по отношению к системам отсчета  $K$  и  $K'$ :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt'} + v; \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt'}; \quad \frac{dz}{dt} = \frac{dz'}{dt'}.\tag{198}$$

Обозначим проекции скоростей точки  $M$  в системе  $K$  на оси  $x, y, z$

$$\frac{dx}{dt} = u_x, \quad \frac{dy}{dt} = u_y, \quad \frac{dz}{dt} = u_z,$$

в системе  $K'$  на оси  $x', y', z'$

$$\frac{dx'}{dt'} = u'_x, \quad \frac{dy'}{dt'} = u'_y, \quad \frac{dz'}{dt'} = u'_z$$

и перепишем соотношения (198) в виде

$$u_x = u'_x + v; \quad u_y = u'_y; \quad u_z = u'_z.\tag{199}$$

Три скалярных уравнения (199) эквивалентны векторному соотношению

$$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}.\tag{200}$$

Соотношения (199) и (200) выражают классический закон сложения скоростей.

Докажем, что любая система отсчета, движущаяся относительно некоторой инерциальной системы с постоянной скоростью, будет также инерциальной.

Система отсчета, относительно которой тело при компенсации внешних воздействий движется равномерно и прямолинейно ( $v = \text{const}$ ) называется инерциальной системой отсчета.

Продифференцируем по времени соотношение (200), учитывая, что  $\vec{v} = \text{const}$ ,

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}'}{dt},$$

получим

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (201)$$

Отсюда следует, что ускорение какого-либо тела во всех системах отсчета, движущихся относительно друг друга с постоянной скоростью, оказывается одним и тем же.

Если система отсчета  $K$  инерциальная, то есть ускорение тела  $a = 0$ , то и остальные системы  $K'$  будут инерциальными, то есть  $a' = 0$ .

В классической механике считается, что масса материальной точки (тела) не зависит от скорости её движения, то есть одинакова во всех инерциальных системах отсчета  $m = m'$ .

Из второго закона Ньютона имеем

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}, \quad \vec{a}' = \frac{\vec{F}'}{m}.$$

Так как  $\vec{a} = \vec{a}'$ , то  $\frac{\vec{F}}{m} = \frac{\vec{F}'}{m}$  и

$$\vec{F} = \vec{F}'. \quad (202)$$

Силы, действующие на тело в системе  $K$  и  $K'$  также будут одинаковы, то есть уравнение динамики не изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Это означает, что с механической точки зрения все инерциальные системы отсчета совершенно эквивалентны.

Все это позволяет сформулировать **принцип относительности Галилея** или механический принцип относительности в следующем виде: **все механические явления в различных инерциальных системах отсчета протекают одинаковым образом при одинаковых начальных условиях.**

Неизменность вида уравнения при замене в нём координат и времени одной системы отсчета координатами и временем другой системы называется инвариантностью уравнения.

Так как системы  $K$  и  $K'$  выбраны произвольно, то можно утверждать, что согласно (201) **ускорение одинаково во всех инерциальных системах отсчета**, то есть является инвариантным относительно преобразований Галилея.

**Силы**, с которыми взаимодействуют материальные точки (или тела) согласно (202), **также являются инвариантными относительно преобразований Галилея.** Это следует из того, что, во-первых, силы взаимодействия зависят от расстояния между точками, которые в клас-

сической механике принимаются одинаковыми во всех системах отсчета, во-вторых, они зависят от относительных скоростей точек, которые одинаковы во всех системах отсчета.

Второй и третий законы Ньютона (при  $m = \text{const}$ ) запишутся следующим образом:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}, \quad \vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (\text{для системы } K);$$

$$\vec{F}' = m \cdot \vec{a}', \quad \vec{F}'_{12} = -\vec{F}'_{21} \quad (\text{для системы } K').$$

Учитывая инвариантность ускорений и сил, можно утверждать, что **уравнения, выражающие второй и третий законы Ньютона, инвариантны относительно преобразований Галилея.**

Принцип относительности Галилея можно записать в иной формулировке: никакими механическими опытами, проводимыми в инерциальной системе отсчета, нельзя обнаружить движение этой системы относительно других инерциальных систем.

Механический принцип относительности свидетельствует о том, что в рамках классической механики все инерциальные системы отсчета совершенно равноправны. Среди них нет какой-то главной, раз и навсегда выделенной абсолютной системы отсчета, движение всех тел относительно которой можно было бы назвать абсолютным движением.

### ***Постулаты специальной теории относительности. Преобразования Лоренца***

Для описания движения тел со скоростями  $v$ , сравнимыми со скоростью света  $c$ , используется релятивистская механика, учитывающая требования специальной теории относительности.

Основоположником теории относительности Эйнштейном (1905 г.) был предложен принципиально новый подход к электродинамике движущихся тел. Проанализировав огромный экспериментальный материал, Эйнштейн выбрал два наиболее бесспорных положения и построил на их основе свою теорию.

Эти положения называются **постулатами специальной теории относительности**. Они формулируются следующим образом.

**1. В любых инерциальных системах отсчета все физические явления (механические, электромагнитные и другие) при одних и тех же условиях протекают одинаково; иначе говоря, с помощью любых опытов, проведенных в замкнутой системе тел, нельзя обнаружить, покоится эта система или движется равномерно и прямолинейно.**

**2. Скорость света в вакууме не зависит от скорости движения источников света; она одинакова во всех направлениях и во всех инерциальных системах отсчета, т.е. представляет собой универсальную постоянную.**

**Первый постулат** Эйнштейна выражает **принцип относительности**, являющийся обобщением механического принципа относительности Галилея на любые физические процессы. Его справедливость, как и второго постулата, подтверждают разнообразные опыты.

**Принцип относительности** можно сформулировать исходя из понятия инвариантности: **уравнения, выражающие законы природы, инвариантны по отношению к преобразованиям координат и времени от одной инерциальной системы отсчета к другой.**

Эйнштейн показал, что в соответствии с двумя постулатами теории относительности между координатами и временем в двух инерциальных системах отсчета  $K$  и  $K'$ , изображенных на рис. 103, выражаются не преобразованием Галилея (197), а более сложным образом.

Рассмотрим распространение светового сигнала в системе  $K'$ . Скорость светового сигнала в этой системе  $u'_x = c$ . Тогда согласно выражению (199) скорость светового сигнала в системе  $K$  окажется равной

$$u = c + v,$$

то есть превзойдет  $c$ , что согласно второму постулату Эйнштейна невозможно. Отсюда вытекает, что преобразования Галилея должны быть заменены другими формулами.

Предположим, что правильное преобразование координат отличается от Галилеевского множителями  $\gamma$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma \cdot (x - vt); \\ x &= \gamma \cdot (x' + vt'). \end{aligned} \tag{203}$$

Для отыскания множителя  $\gamma$  рассмотрим распространение фронта светового сигнала.

Пусть световой сигнал начал свое движение вдоль оси  $x$  и  $x'$  из начала координат систем  $K$  и  $K'$  в тот момент времени, когда они совпали. Тогда соответственно второму постулату Эйнштейна

$$x = c \cdot t, \text{ а } x' = c \cdot t'. \tag{204}$$

Подставив (204) в (203), получим два уравнения:

$$c \cdot t' = \gamma \cdot (c \cdot t - vt) = \gamma \cdot (c - v) \cdot t, \tag{205}$$

$$c \cdot t = \gamma \cdot (c \cdot t' + vt') = \gamma \cdot (c + v) \cdot t'. \tag{206}$$

Выразим из уравнения (206) время  $t$

$$t = \frac{\gamma \cdot (c + v) \cdot t'}{c}$$

и подставим в уравнение (205)

$$c \cdot t' = \gamma^2 \cdot \frac{(c^2 - v^2)}{c} \cdot t',$$

откуда

$$\gamma^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2},$$

а

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (207)$$

С учетом (207) выражения (203) переписутся в следующем виде:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \\ x &= \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (208)$$

В направлении осей  $y$  и  $y'$  смещение не происходит. Соотношения между  $y$  и  $y'$  от времени не зависят, так как оси перпендикулярны к вектору относительной скорости.

Следовательно, в направлениях, перпендикулярных к вектору скорости, координаты преобразуются тождественно, то есть

$$\begin{aligned} y' &= y; & y &= y'; \\ z' &= z; & z &= z'. \end{aligned} \quad (209)$$

Для нахождения замены преобразования времени решим совместно два уравнения (203):

$$x = \gamma \cdot [\gamma(x - vt) + vt']; \quad \frac{x}{\gamma} = \gamma(x - vt) + vt'; \quad \frac{x}{\gamma \cdot v} = \frac{\gamma \cdot x}{v} - t + t';$$

$$t' = \gamma \cdot \left[ t - \frac{x}{v} \cdot \left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) \right],$$

откуда, учитывая, что  $\left( 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right) = \frac{v^2}{c^2}$ , получим

$$t' = \gamma \left( t - x \frac{v}{c^2} \right),$$

или

$$t' = \frac{t - x \cdot \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (210)$$

Объединяя (208), (209), (210), найдем, что преобразования координат и времени при переходе от систем  $K \rightarrow K'$  и  $K' \rightarrow K$  будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} & \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}' \\ x' &= \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (211),$$

$$\begin{aligned} & \mathbf{K}' \rightarrow \mathbf{K} \\ x &= \frac{x' + v \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ y &= y' \\ z &= z' \end{aligned} \quad (212).$$

$$t' = \frac{t - x \cdot \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$t = \frac{t' + x' \cdot \frac{v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Эти преобразования носят название преобразований Лоренца. Они устраняют противоречие преобразований Галилея постоянству скорости света.

Однако это не означает, что преобразования Галилея всегда неверны.

Преобразования Лоренца верны при любых скоростях, как при малых, так и при сколь угодно больших, возможных в природе скоростях.

Но при малых скоростях, где  $\frac{v}{c} \ll 1$ , членами, содержащими  $\frac{v^2}{c^2}$  и  $\frac{v}{c^2}$ , можно пренебречь и преобразования Лоренца переходят в преобразования Галилея. Следовательно, преобразования Галилея являются частным случаем общих преобразований Лоренца.

Особенно важным являются следующие отличия преобразований Лоренца от преобразований Галилея.

В рамках преобразований Галилея расстояния между двумя событиями есть абсолютная величина. Это расстояние не меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. То же относится и к промежутку времени между этими событиями. Преобразования Лоренца показывают, что как расстояния, так и промежутки времени меняется при

переходе от одной системы отсчета к другой. При этом оказывается, что пространственные и временные отношения не независимы.

Из преобразований Лоренца вытекает ряд необычных с точки зрения классической механики следствий.

### **Следствия из преобразований Лоренца**

#### **1. Одновременность событий в разных системах отсчета**

Пусть в системе  $K$  (рис. 103) с координатами  $x_1$  и  $x_2$  происходят одновременно два события в момент времени  $t_1 = t_2 = b$ .

Согласно преобразованиям Лоренца (211), в системе  $K'$  этим событиям будут соответствовать координаты

$$x'_1 = \frac{x_1 - v \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - v \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (213)$$

и моменты времени

$$t'_1 = \frac{b - \frac{v}{c^2} \cdot x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t'_2 = \frac{b - \frac{v}{c^2} \cdot x_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (214)$$

Если рассматривать два события, происходящие в системе  $K$  в разных точках, например ( $x_2 > x_1$ ), то из преобразований Лоренца (214) следует, что в системе  $K'$   $t'_1 > t'_2$ .

Таким образом, **события, одновременные в одной системе отсчета, будут неодновременными в другой системе, движущейся относительно первой**, то есть имеет место относительность одновременности двух событий, происходящих в разных точках пространства.

Если одновременные события в системе  $K$  происходят в одном и том же месте пространства  $x_1 = x_2$ , то и в системе  $K'$ , согласно (213),  $x'_1 = x'_2$  и, согласно (214),  $t'_1 = t'_2$ .

Следует отметить, что сказанное относится лишь к событиям, между которыми отсутствует причинно-следственная связь.

Например, выстрел и попадание пули в мишень ни в одной из систем отсчета не будут одновременными. И во всех системах события, являющиеся причиной, будут предшествовать следствию.

#### **2. Длина тел в разных системах отсчета**

Рассмотрим стержень, расположенный вдоль оси  $x$  и покоящийся относительно подвижной системы отсчета  $K'$  (рис. 104).

Длина стержня в системе  $K'$  равна  $\ell_0 = x'_2 - x'_1$ , где  $x'_1$  и  $x'_2$  – не изменяющиеся со временем координаты концов стержня. Эта величина называется собственной длиной или собственными размерами тела.

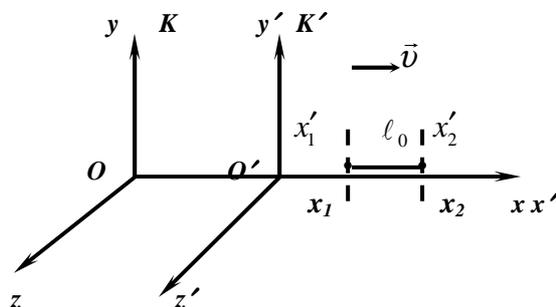


Рис.104. Стержень в системах  $K$  и  $K'$

Относительно системы  $K$  стержень движется со скоростью  $v$ . Для определения длины стержня в неподвижной системе  $K$  нужно отметить координаты концов стержня  $x_1$  и  $x_2$  в один и тот же момент времени  $t_1 = t_2 = b$ . Их разность  $x_2(t) - x_1(t) = \ell$  и даёт длину стержня, измеренную в системе  $K$ . Выразим  $\ell$  через  $\ell_0$ . Для этого запишем соотношения (211) из преобразований Лоренца

$$x'_1 = \frac{x_1 - v \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad x'_2 = \frac{x_2 - v \cdot b}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{откуда } x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то есть

$$\ell_0 = \frac{\ell}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

или

$$\ell = \ell_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (215)$$

Из полученного соотношения следует, что длина стержня, измеренная в системе, относительно которой движется, оказывается меньше длины  $\ell_0$ , измеренной в системе, относительно которой стержень покоится.

Это явление называется лоренцевым сокращением.

Из второго и третьего соотношений (211), не содержащих времени, следует, что

$$y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1; \quad z'_2 - z'_1 = z_2 - z_1,$$

то есть поперечные размеры тела не зависят от скорости его движения и одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Обобщая

все сказанное, можно утверждать, что **линейные размеры тела максимальны в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело находится в покое.**

### 3. Длительность событий в разных системах отсчета.

Пусть в точке, неподвижной относительно системы  $K'$ , происходит событие, длящееся время  $\tau_0 = t'_2 - t'_1$ .

Началу события в этой системе соответствует координата  $x'_1 = a$  и момент времени  $t'_1$ , концу события – координата  $x'_2 = a$  и момент времени  $t'_2$  (рис.105).

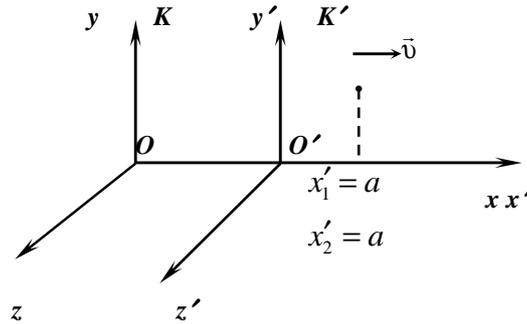


Рис. 105. Системы отсчёта  $K$  и  $K'$

Относительно системы  $K$  точка, в которой происходит событие, перемещается со скоростью  $v$ . Согласно преобразованиям Лоренца, началу и концу события соответствует в системе  $K$

$$t_1 = \frac{t'_1 + \frac{v}{c^2} \cdot a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad t_2 = \frac{t'_2 + \frac{v}{c^2} \cdot a}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \text{откуда } t_2 - t_1 = \frac{t'_2 - t'_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad \text{Обозначим } t_2 - t_1 = \tau,$$

полученная формула примет вид

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (216)$$

Рассматривая протекание события в системе  $K$ , можно определить  $\tau$  как длительность события, измеренную по неподвижным часам. Тогда  $\tau_0$  – это длительность события, измеренная по часам, движущимся вместе с телом. Оно называется собственным временем тела.

Из соотношения (216) следует, что длительность события, происходящая в некоторой точке  $a$ , минимальна в той инерциальной системе отсчета, относительно которой точка  $a$  неподвижна.

Этот результат можно также сформулировать следующим образом: **часы, движущиеся относительно инерциальной системы отсчета, идут медленнее покоящихся часов**, как видно из (216). Замедление хода часов становится существенным при скоростях  $v$ , близких к скорости  $c$  – скорости света в вакууме.

Релятивистский эффект замедления хода времени был подтвержден в опытах с мюонами – нестабильными, самопроизвольно распадающимися элементарными частицами.

Среднее время жизни покоящегося мюона  $\tau_0$ , то есть время, измеренное по часам, движущимся вместе с ним, как показали измерения, равно  $2,2 \cdot 10^{-6}$  с. Если бы релятивистского эффекта не было, то мюоны, рождающиеся в верхних слоях атмосферы под действием первичных космических лучей и движущихся к Земле со скоростью  $v$ , близкой к  $c$ , должны были бы проходить в атмосфере сравнительно небольшие расстояния порядка  $c \cdot \tau_0 = 660$  м, поэтому они не могли бы достигать поверхности Земли, где они в действительности наблюдаются. Формула (216) легко объясняет этот парадокс. Для земного наблюдателя срок жизни мюона

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

а путь мюона в атмосфере равен

$$v\tau = \frac{c\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

то есть  $v\tau \gg c \cdot \tau_0$ .

Время, отсчитанное по часам экспериментатора, связанного с Землей оказывается гораздо большим  $\tau \gg \tau_0$ , и экспериментатор наблюдает пробег мюона гораздо больше 600 м. Наблюдения показывают, что мюоны образуются в космических лучах на высоте 20–30 км и успевают в значительном количестве достигнуть земной поверхности.

#### **4. Пространственно-временной интервал.**

Какое либо событие можно охарактеризовать местом, где оно произошло (координатами  $x, y, z$ ), и временем  $t$ , когда оно произошло.

Таким образом, событию можно сопоставить четыре числа:  $x, y, z, t$ . Введем воображаемое четырехмерное пространство, на координатных осях которого будем откладывать пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изобразится точкой, которую принято

называть мировой точкой. Всякой частице (даже неподвижной) соответствует в четырехмерном пространстве некоторая линия, называемая мировой линией (для покоящейся частицы она имеет вид прямой линии, параллельной оси  $t$ ).

Пусть одно событие имеет координаты  $x_1, y_1, z_1, t_1$ , другое событие – координаты  $x_2, y_2, z_2, t_2$ . Величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2} \quad (217)$$

называют интервалом между соответствующими событиями.

Введя расстояние

$$\ell_{12} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

между точками обычного трехмерного пространства, в которых произошли оба события, и обозначив разность  $(t_2 - t_1)$  через  $t_{12}$ , выражение для интервала можно записать в следующем виде:

$$s_{12} = \sqrt{c^2 \cdot t_{12}^2 - \ell_{12}^2}. \quad (218)$$

Легко убедиться в том, что **величина интервала между двумя данными событиями оказывается во всех инерциальных системах одной и той же**. Чтобы упростить выкладки, запишем квадрат интервала в системе  $K$  в виде

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

где  $\Delta t = t_2 - t_1$ ,  $\Delta x = x_2 - x_1$ ,  $\Delta y = y_2 - y_1$ ,  $\Delta z = z_2 - z_1$ .

Интервал между теми же событиями в системе  $K'$  равен

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (219)$$

Согласно формулам (211),

$$\Delta x' = \frac{\Delta x - v \cdot \Delta t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad \Delta y' = \Delta y; \quad \Delta z' = \Delta z; \quad \Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2} \cdot \Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

подставив эти значения в формулу (219) получим, что

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2,$$

то есть  $\Delta s'^2 = \Delta s^2$ .

Таким образом, интервал (217) является инвариантом по отношению к переходу от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Из рассуждений, приведённых выше, видно, что  $t_{12}$  и  $\ell_{12}$  не являются инвариантом, то есть каждое слагаемое (218) и (219) изменяется при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, сама же величина  $s_{12}^2$  остается постоянной.

Согласно (216), собственное время события, то есть время, измеренное по часам, движущимся относительно инерциальной системы отсчета

$$\tau_0 = \tau \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Преобразуем выражение, учитывая, что  $\tau = t_2 - t_1 = \Delta t$ ,  $\Delta l = v \cdot \Delta t$

$$\tau_0 = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \cdot \Delta t^2 - v \cdot (\Delta t)^2} = \frac{1}{c} \sqrt{c^2 \cdot \Delta t^2 - \Delta l^2},$$

тогда

$$\tau_0 = \frac{1}{c} \cdot \Delta s. \quad (220)$$

Промежуток собственного времени пропорционален интервалу между событиями. Поскольку  $\Delta s$  – интервал между событиями является инвариантом, т.е. одинаков во всех инерциальных системах отсчета, то согласно (220) и собственное время так же является инвариантом.

Таким образом, **собственное время не зависит от того, в какой системе отсчета наблюдается движение данного тела.**

### **Релятивистская кинематика**

Механику, основанную на принципе относительности, одинаковости скорости света во всех инерциальных системах и преобразованиях Лоренца принято называть релятивистской (от латинского слова *relativ* – отношение). Законы релятивистской механики в общем случае отличаются от законов классической механики Галилея-Ньютона.

**1. Релятивистский закон сложения скоростей.** В классической механике считалось, что тела могут двигаться с любыми, сколь угодно большими скоростями. Однако уже из преобразований Лоренца (211) и (212) видно, что **относительные скорости тел имеют верхнюю границу**

$$v < c.$$

При  $v > c$  знаменатели, равные  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , становятся мнимыми и координаты  $x'$  и  $t'$  теряют физический смысл.

**2. Движущиеся тела изменяют размеры.** Длина стержня, движущегося со скоростью  $v$  относительно системы отсчета  $K$ , связана с длиной неподвижного стержня  $l_0$  соотношением

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

При малых скоростях движения ( $v \ll c$ )  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \cong 1$ , релятивистскими сокращениями длин движущихся тел можно пренебречь. При  $v$ , близком к  $c$ , это сокращение становится существенным. Так, при относительной скорости двух инерциальных систем  $v = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot c \cong 260000 \text{ км/с}$ ,

$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$  и метр, покоящийся в одной системе, будет иметь в другой длину  $1/2 \text{ м}$ .

Скорости такого порядка, при которых сокращение размеров движущихся материальных частиц становится заметным, носят название релятивистских скоростей. В настоящее время они достигнуты в крупных лабораториях и в новых промышленных установках. Так, в ядерных реакторах атомных электростанций быстрые нейтроны движутся со скоростями, для которых  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,997$ , то есть сокращение длин порядка 3%.

Сильно релятивистские частицы проходящих на Землю космических лучей имеют  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 10^{-7}$ , и их продольные размеры сокращаются в 10 миллионов раз.

### 3. В движущейся системе изменится ход течения времени

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

В неподвижной системе  $K$  два события будут разделены промежутком времени в  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$  большим.

Представим себе, что удалось реализовать фантастический проект и отправить к звезде ракету со скоростью, столь близкой к скорости света, что  $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,001$ . По земным часам ракета будет лететь к звезде 1000 лет. Но для материальной системы – ракеты и путешественника в ней – путешествие займет всего 1 год.

Расчет показывает, что при полетах в пределах солнечной системы релятивистские эффекты скажутся лишь в виде малых поправок.

#### 4. Релятивистский закон сложения скоростей.

Рассмотрим движение материальной точки в инерциальной системе  $K$  и  $K'$ .

В системе  $K$  положение точки определяется в каждый момент времени  $t$  координатами  $x, y, z$ . Выражения

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \quad u_y = \frac{dy}{dt}, \quad u_z = \frac{dz}{dt}$$

представляют собой проекции на оси  $x, y, z$  вектора скорости точки относительно системы  $K$ .

В системе  $K'$  положение точки характеризуется в каждый момент времени  $t'$  координатами  $x', y', z'$ . Проекции на оси  $x', y', z'$  вектора скорости точки относительно системы  $K'$  определяются следующими выражениями:

$$u'_x = \frac{dx'}{dt'}, \quad u'_y = \frac{dy'}{dt'}, \quad u'_z = \frac{dz'}{dt'}.$$

Из формулы (212) преобразований Лоренца вытекает, что

$$dx = \frac{dx' + v \cdot dt'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}; \quad dy = dy'; \quad dz = dz'; \quad dt = \frac{dt' + \frac{v}{c^2} dx'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Разделив первые три равенства на четвертое, получим формулы преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчета к другой:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x}; \quad u_y = \frac{u'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x}; \quad u_z = \frac{u'_z \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c^2} \cdot u'_x}. \quad (221)$$

Формулы (221) выражают закон сложения скоростей в релятивистской кинематике.

В случае, когда  $v \ll c$  (221) переходят в формулы сложения скоростей (199) в классической механике.

Все изложенное выше показывает, что законы релятивистской механики в случае малых скоростей ( $v \ll c$ ) переходят в законы классической механики.

Таким образом, **классическая механика не отвергается, а лишь ограничивается определенными пределами применимости: случая-**

ми, когда относительные скорости тел много меньше скорости света. Она верна как частный случай общей механики Эйнштейна – случай малых скоростей.

### **Релятивистская динамика**

В классической механике Ньютона предполагается, что масса тела постоянна независимо от состояния его движения и одинакова во всех инерциальных системах отсчета ( $m = m'$ ).

Эйнштейн показал, что при  $v \sim c$  масса тела зависит от скорости её движения по отношению к рассматриваемой инерциальной системе отсчета по следующему закону:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (222)$$

где  $m_0$  – масса того же тела, измеренная в инерциальной системе отсчета, по отношению к которой тело покоится. Эта величина называется массой покоя тела. Масса  $m$  движущегося тела называется релятивистской массой тела или просто массой.

В связи с уравнением (222) **основной закон релятивистской динамики будет иметь вид**

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \vec{v} \right) = \vec{F}. \quad (223)$$

Это выражение является инвариантным по отношению к преобразованиям Лоренца.

При  $v \ll c$   $m \sim m_0$  и релятивистское уравнение (223) совпадает с основным законом динамики в классической механике

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}, \text{ или } \frac{d}{dt} \vec{p} = \vec{F},$$

где  $\vec{p}$  – импульс.

Из (223) следует, что импульс релятивистской частицы равен

$$\vec{p} = \frac{m_0 \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Найдем выражение для кинетической энергии свободной материальной частицы в релятивистской механике.

Пусть в начале эта частица покоилась. А затем под действием силы  $F$  приобрела некоторую скорость  $v$  и соответствующую энергию  $E_\kappa$ , после чего действие силы прекратилось и частица вновь стала свободной.

Приращение  $\Delta E_\kappa$  кинетической энергии материальной частицы на элементарном перемещении  $dr$  равно работе, совершаемой силой  $F$  на этом перемещении

$$dE_\kappa = dA.$$

Работа может быть записана через скалярное произведение векторов  $\vec{F}$  и  $d\vec{r}$ :  $dA = (\vec{F} d\vec{r})$ .

Учитывая, что  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , получим  $dA = (\vec{F} \cdot \vec{v} dt)$  и, соответственно,

$$dE_\kappa = (\vec{F} \cdot \vec{v} dt). \quad (224)$$

Из основного уравнения релятивистской динамики (222) имеем

$$\vec{F} = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{m_0 \cdot v}{c^2 \cdot \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}} \frac{dv}{dt} \cdot \vec{v}. \quad (225)$$

Подставляя (225) в уравнение (224) получим следующее выражение для приращения кинетической энергии материальной частицы:

$$dE_\kappa = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot (\vec{v} d\vec{v}) + \frac{m_0 \cdot v \cdot dv}{c^2 \left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}} (\vec{v} \cdot \vec{v}).$$

Учитывая, что  $(\vec{v} d\vec{v}) = v dv$ , а  $(\vec{v} \cdot \vec{v}) = v^2$ , перепишем предыдущее выражение в таком виде:

$$dE_\kappa = \frac{m \cdot v dv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \left[1 + \frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right] = \frac{m_0 \cdot v \cdot dv}{\left[1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right]^{3/2}}, \quad (226)$$

с другой стороны

$$dm = \frac{m_0 \cdot v dv}{c^2 \cdot \left[1 - \frac{v^2}{c^2}\right]^{3/2}}. \quad (227)$$

Сравнивая (226) и (227), делаем вывод, что

$$dE_\kappa = c^2 dm, \quad (228)$$

то есть при изменении скорости материальной точки изменение её кинетической энергии и массы пропорциональны друг другу.

Проинтегрируем уравнение (228), учитывая, что кинетическая энергия покоящейся точки равна нулю, а её масса равна  $m_0$

$$\int_0^{E_k} dE_k = c^2 \int_{m_0}^m dm ;$$

$$E_k = m \cdot c^2 - m_0 \cdot c_0^2 \quad (229)$$

Подставим в уравнение (229) выражение для массы (222), получим формулу для вычисления кинетической энергии в релятивистской динамике:

$$E_k = \frac{m_0 \cdot c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - m_0 \cdot c^2 ;$$

$$E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (230)$$

При  $v \ll c$  легко получить обычное выражение для кинетической энергии материальной точки в классической механике. Для этого раз-

ложим в бином Ньютона  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ :  $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{v^2}{c^2}\right) \dots$  и под-

ставим в уравнение (230):  $E_k = m_0 \cdot c^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} - 1\right) = \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot v^2$ .

Из уравнения (228) следует, что при сообщении телу кинетической энергии  $dE_k$  его масса возрастает на величину  $dm = \frac{dE_k}{c^2}$ .

Естественно ожидать, что масса тела должна возражать не только при сообщении ему кинетической энергии, но также при любом увеличении его полной энергии независимо от того, за счет какого конкретного вида энергии это увеличение произошло, то есть  $dm = \frac{dE}{c^2}$ .

Интегрируя это уравнение, находим универсальное соотношение между  $m$  и  $E$ :

$$E = m \cdot c^2 + k. \quad (231)$$

Постоянную интегрирования ( $k$ ) нужно положить равной нулю, так как уравнение (231) при любом значении  $k \neq 0$  неинвариантно относительно преобразований Лоренца. Таким образом, **полная энергия системы равна произведению её полной релятивистской массы на квадрат скорости света в вакууме**

$$E = m \cdot c^2. \quad (232)$$

Уравнение (232) выражает один из важнейших законов природы – закон взаимосвязи массы и энергии.

Связь между импульсом и энергией можно найти следующим образом. Подставим в (232) уравнение для массы (222), получим:

$$E = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot c^2.$$

Возведем в квадрат обе части уравнения и освободимся от знаменателя:  $E^2 = \frac{m_0^2 \cdot c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ ;  $E^2 - E^2 \cdot \frac{v^2}{c^2} = m_0^2 \cdot c^4$ . Преобразуем полученное со-

отношение:  $E^2 = m_0^2 \cdot c^4 + \frac{m^2 \cdot c^4 \cdot v^2}{c^2}$ ;  $E^2 = m_0^2 \cdot c^4 + m^2 \cdot v^2 \cdot c^2$ . Учитывая, что  $m \cdot v$  есть импульс  $p$ , получим:

$$E = \sqrt{p^2 \cdot c^2 + m_0^2 \cdot c^4}. \quad (233)$$

Эта формула выражает связь между полной энергией свободной частицы (тела) и её импульсом. **Величина  $m_0 \cdot c^2 = E_0$  носит название энергии покоя частицы или собственной энергии.** Собственная энергия сохраняется (как и масса покоя) за каждой частицей, пока она не превращается в другие частицы.

## 2. Основы молекулярной физики и термодинамики

### 2.1. Идеальные газы

#### *Статистический и динамический методы исследования*

Молекулярная физика и термодинамика – разделы физики, в которых изучаются макроскопические процессы в телах, связанных с огромным числом содержащихся в телах атомов и молекул. В основе исследования лежат два метода: статистический и термодинамический.

**Молекулярная физика** – раздел физики, в котором изучаются строение и свойства вещества, исходя из молекулярно-кинетических представлений, основывающихся на том, что все тела состоят из молекул, находящихся в непрерывном хаотическом движении.

В основе молекулярно-кинетической теории лежат **три основных положения**:

1. Все вещества – жидкие, твердые и газообразные – образованы из мельчайших частиц – молекул, которые сами состоят из атомов («элементарных молекул»). Молекулы химического вещества могут быть простыми и сложными, т.е. состоять из одного или нескольких атомов. Молекулы и атомы представляют собой электрически нейтральные частицы. При определенных условиях молекулы и атомы могут приобретать дополнительный электрический заряд и превращаться в положительные или отрицательные ионы.

2. Атомы и молекулы находятся в непрерывном хаотическом движении.

3. Частицы взаимодействуют друг с другом силами, имеющими электрическую природу. Гравитационное взаимодействие между частицами пренебрежимо мало.

Наиболее ярким экспериментальным подтверждением представлений молекулярно-кинетической теории о беспорядочном движении атомов и молекул является **броуновское движение**. Это тепловое движение мельчайших микроскопических частиц, взвешенных в жидкости или газе. Оно было открыто английским ботаником Р. Броуном в 1827 г. Броуновские частицы движутся под влиянием беспорядочных ударов молекул. Из-за хаотического теплового движения молекул эти удары никогда не уравновешивают друг друга. В результате скорость броуновской частицы беспорядочно меняется по модулю и направлению, а ее траектория представляет собой сложную зигзагообразную кривую (рис. 106).



Рис. 106. Траектория броуновской частицы

Теория броуновского движения была создана А. Эйнштейном в 1905 г. Экспериментально теория Эйнштейна была подтверждена в опытах французского физика Ж. Перрена, проведенных в 1908–1911 гг.

Главный вывод теории А. Эйнштейна состоит в том, что квадрат смещения  $\langle r^2 \rangle$  броуновской частицы от начального положения, усредненный по многим броуновским частицам, пропорционален времени наблюдения  $t$

$$\langle r^2 \rangle = D \cdot t. \quad (234)$$

Это соотношение выражает так называемый диффузионный закон. Как следует из теории коэффициент пропорциональности  $D$  монотонно возрастает с увеличением температуры.

Постоянное хаотичное движение молекул вещества проявляется также в другом легко наблюдаемом явлении – диффузии. **Диффузией называется явление проникновения двух или нескольких соприкасающихся веществ друг в друга.** Наиболее быстро процесс протекает в газе, если он неоднороден по составу. Диффузия приводит к образованию однородной смеси независимо от плотности компонентов. Так, если в двух частях сосуда, разделенных перегородкой, находятся кислород  $O_2$  и водород  $H_2$ , то после удаления перегородки начинается процесс взаимопроникновения газов друг в друга, приводящий к образованию взрывоопасной смеси – гремучего газа. Этот процесс идет и в том случае, когда легкий газ (водород) находится в верхней половине сосуда, а более тяжелый (кислород) – в нижней.

Значительно медленнее протекают подобные процессы в жидкостях. Взаимопроникновение двух разнородных жидкостей друг в друга, растворение твердых веществ в жидкостях (например, сахара в воде) и образование однородных растворов – примеры диффузионных процессов в жидкостях.

Наиболее медленно процесс диффузии протекает в твердых телах. Однако опыты показывают, что при контакте хорошо очищенных по-

верхностей двух металлов через длительное время в каждом из них обнаруживаются атомы другого металла.

Диффузия и броуновское движение – родственные явления, которые происходят вследствие хаотичного теплового движения молекул.

**Термодинамика** – раздел физики, в котором изучаются общие свойства макроскопических систем, находящихся в состоянии термодинамического равновесия, и процессы перехода между этими состояниями. Суть статистического и термодинамического методов и пояснения к ним приведены в таблице 8.

Таблица 8

*Статистический и термодинамический методы*

<b>Метод</b>	<b>Суть метода</b>	<b>Пояснения</b>
Статистический (основа молекулярной физики)	Метод исследования систем из большого числа частиц, оперирующий статистическими закономерностями и средними значениями физических величин, характеризующих всю совокупность частиц (например, среднее значение скоростей теплового движения молекул и их энергий)	Процессы, изучаемые молекулярной физикой, являются результатом совокупного действия огромного числа молекул. Температура тела, например, определяется скоростью беспорядочного движения его молекул, но так как в любой момент времени разные молекулы имеют разные скорости, то она может быть выражена только через среднее значение скорости движения молекул. Нельзя говорить о температуре одной молекулы
Термодинамический (основа термодинамики)	Метод исследования систем из большого числа частиц, оперирующий на основе законов превращения энергии величинами, характеризующими систему в целом (например, давление, объём, температура), не рассматривая её микроструктуры и совершающихся в системе микропроцессов	Нет таких областей физики и химии, в которых нельзя было бы пользоваться этим методом. Однако термодинамика ничего не говорит о микроскопическом строении вещества, о механизме явлений, а лишь устанавливает связи между макроскопическими свойствами вещества

Оба подхода – термодинамический и статистический – не противоречат, а дополняют друг друга. Только совместное использование термодинамики и молекулярно-кинетической теории может дать наиболее полное представление о свойствах систем, состоящих из большого числа частиц.

При описании термодинамических систем используются следующие понятия.

**Термодинамическая система** – совокупность макроскопических тел, которые взаимодействуют и обмениваются энергией как между собой, так и с внешней средой.

**Внешняя среда** – тела, не входящие в исследуемую термодинамическую систему.

**Замкнутая термодинамическая система** – термодинамическая система, не обменивающаяся с внешней средой ни энергией, ни веществом.

**Термодинамические параметры** (параметры состояния) – совокупность физических величин, характеризующих свойства термодинамической системы. Обычно в качестве параметров состояния выбирают температуру, давление и объём.

**Термодинамический процесс** – любое изменение в термодинамической системе, связанное с изменением хотя бы одного из её термодинамических параметров. Например, изобарный (происходит при постоянном давлении), изохорный (происходит при постоянном объёме), изотермический (происходит при постоянной температуре) процессы.

**Термодинамическое равновесие** состоит в том, что с течением времени её состояние не меняется.

### ***Тепловое движение. Термодинамическая шкала***

Для изучения закономерностей поведения вещества, находящегося в газообразном состоянии, широко используется идеализированная модель реальных газов – идеальный газ.

**Идеальный газ** (идеализация) – модель, согласно которой:

- собственный объём газа пренебрежимо мал по сравнению с объёмом сосуда;
- между молекулами газа отсутствуют силы взаимодействия;
- столкновения молекул газа между собой и стенками сосуда абсолютно упругие.

Эта модель может быть использована при изучении реальных газов, так как они в условиях, близких к нормальным, а также при низких

давлениях и высоких температурах близки по свойствам к идеальному газу.

В реальных газах между молекулами действуют силы взаимодействия. Силы, действующие между двумя молекулами, зависят от расстояния между ними. Молекулы состоят из атомов.

**Атом** – наименьшая часть химического элемента, являющаяся носителем его свойств.

**Молекула** – наименьшая устойчивая частица вещества, обладающая его основными химическими свойствами и состоящая из атомов, соединённых между собой химическими связями. Молекулы представляют собой сложные пространственные структуры, содержащие как положительные, так и отрицательные заряды. Если расстояние между молекулами достаточно велико, то преобладают силы межмолекулярного притяжения. На малых расстояниях преобладают силы отталкивания. Зависимости результирующей силы  $F$  взаимодействия между молекулами и потенциальной энергии  $E_p$  от расстояния между их центрами качественно изображены на рис. 107 ( $F > 0$  – сила отталкивания,  $F < 0$  – сила притяжения). На рис.108 показана зависимость  $F(r)$  и модель взаимодействия между частицами вещества.

При некотором расстоянии  $r = r_0$  сила взаимодействия обращается в нуль. Это расстояние условно можно принять за диаметр молекулы. Потенциальная энергия взаимодействия при  $r = r_0$  минимальна. Чтобы удалить друг от друга две молекулы, находящиеся на расстоянии  $r_0$ , нужно сообщить им дополнительную энергию  $E_0$ . Величина  $E_0$  называется глубиной потенциальной ямы или энергией связи.

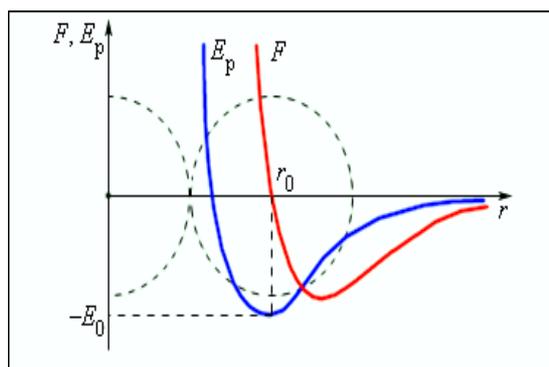


Рис. 107. Зависимость  $F$  и  $E_p$  между молекулами от  $r$

Молекулы имеют чрезвычайно малые размеры. Простые одноатомные молекулы имеют размер порядка  $10^{-10}$  м. Сложные многоатомные молекулы могут иметь размеры в сотни и тысячи раз больше.

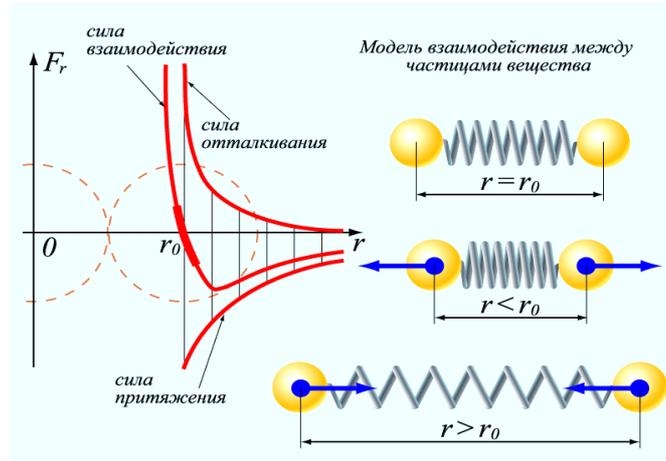


Рис. 108. Зависимость  $F(r)$  и модель взаимодействия между частицами

Беспорядочное хаотическое движение молекул называется тепловым движением. Кинетическая энергия теплового движения растет с возрастанием температуры. При низких температурах средняя кинетическая энергия молекулы может оказаться меньше глубины потенциальной ямы  $E_0$ . В этом случае молекулы конденсируются в жидкое или твердое вещество; при этом среднее расстояние между молекулами будет приблизительно равно  $r_0$ . При повышении температуры средняя кинетическая энергия молекулы становится больше  $E_0$ , молекулы разлетаются, и образуется газообразное вещество.

В твердых телах молекулы совершают беспорядочные колебания около фиксированных центров (положений равновесия). Эти центры могут быть расположены в пространстве нерегулярным образом (аморфные тела) или образовывать упорядоченные объемные структуры (кристаллические тела).

В жидкостях молекулы имеют значительно большую свободу для теплового движения. Они не привязаны к определенным центрам и могут перемещаться по всему объему. Этим объясняется текучесть жидкостей. Близко расположенные молекулы жидкости также могут образовывать упорядоченные структуры, содержащие несколько молекул. Это явление называется ближним порядком в отличие от дальнего порядка, характерного для кристаллических тел.

В газах расстояния между молекулами обычно значительно больше их размеров. Силы взаимодействия между молекулами на таких больших расстояниях малы, и каждая молекула движется вдоль прямой линии до очередного столкновения с другой молекулой или со стенкой сосуда. Среднее расстояние между молекулами воздуха при нормальных условиях порядка  $10^{-8}$  м, то есть в десятки раз превышает размер молекул. Слабое взаимодействие между молекулами объясняет способность

газов расширяться и заполнять весь объем сосуда. В пределе, когда взаимодействие стремится к нулю, мы приходим к представлению об идеальном газе.

Понятие температуры тесно связано с понятием теплового равновесия. Тела, находящиеся в контакте друг с другом, могут обмениваться энергией. Энергия, передаваемая одним телом другому при тепловом контакте, называется количеством теплоты. Температура – это физический параметр, одинаковый для всех тел, находящихся в тепловом равновесии. Возможность введения понятия температуры следует из опыта и носит название нулевого закона термодинамики.

**Температура** – физическая величина, характеризующая состояние термодинамического равновесия макроскопической системы и определяющая направление теплообмена между телами, это одно из основных понятий в физике.

**Температура** – это мера средней кинетической энергии теплового движения молекул.

Для измерения температуры используются физические приборы – термометры, в которых о величине температуры судят по изменению какого-либо физического параметра. Для создания термометра необходимо выбрать термометрическое вещество (например, ртуть, спирт) и термометрическую величину, характеризующую свойство вещества (например, длина ртутного или спиртового столбика). В различных конструкциях термометров используются разнообразные физические свойства вещества (например, изменение линейных размеров твердых тел или изменение электрического сопротивления проводников при нагревании).

Термометры должны быть откалиброваны. Для этого их приводят в тепловой контакт с телами, температуры которых считаются заданными. Чаще всего используют простые природные системы, в которых температура остается неизменной, несмотря на теплообмен с окружающей средой – это смесь льда и воды и смесь воды и пара при кипении при нормальном атмосферном давлении. По температурной шкале Цельсия точке плавления льда приписывается температура  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а точке кипения воды –  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Изменение длины столба жидкости в капиллярах термометра на одну сотую длины между отметками  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$  и  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  принимается равным  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В ряде стран (США) широко используется шкала Фаренгейта (ТF), в которой температура замерзающей воды принимается равной  $32\text{ }^{\circ}\text{F}$ , а температура кипения воды равной  $212\text{ }^{\circ}\text{F}$ . Следовательно,

$$t_F = \frac{9}{5} \cdot t_C + 32^0; \quad t_C = \frac{5}{9} \cdot (t_F - 32^0). \quad (235)$$

Английский физик У. Кельвин (Томсон) в 1848 г. предложил использовать точку нулевого давления газа для построения новой температурной шкалы (шкала Кельвина). В этой шкале единица измерения температуры такая же, как и в шкале Цельсия, но нулевая точка сдвинута

$$T = t + 273,16, \quad (236)$$

при этом  $\Delta T = \Delta t$ .

В системе СИ принято единицу измерения температуры по шкале Кельвина называть кельвином и обозначать буквой *K*. Например, комнатная температура  $t = 20$  °C по шкале Кельвина равна  $T = 293,16$  K.

Температурная шкала Кельвина называется абсолютной шкалой температур и является международной практической шкалой. Она оказывается наиболее удобной при построении физических теорий.

Нет необходимости привязывать шкалу Кельвина к двум фиксированным точкам – точке плавления льда и точке кипения воды при нормальном атмосферном давлении, как это принято в шкале Цельсия.

Кроме точки нулевого давления газа, которая называется абсолютным нулем температуры, достаточно принять еще одну фиксированную опорную точку. В шкале Кельвина в качестве такой точки используется температура тройной точки воды (0,01 °C), в которой в тепловом равновесии находятся все три фазы – лед, вода и пар. По шкале Кельвина температура тройной точки принимается равной 273,16 K. Ниже (рис. 109) приведены шкала Цельсия и шкала Кельвина (термодинамическая шкала).

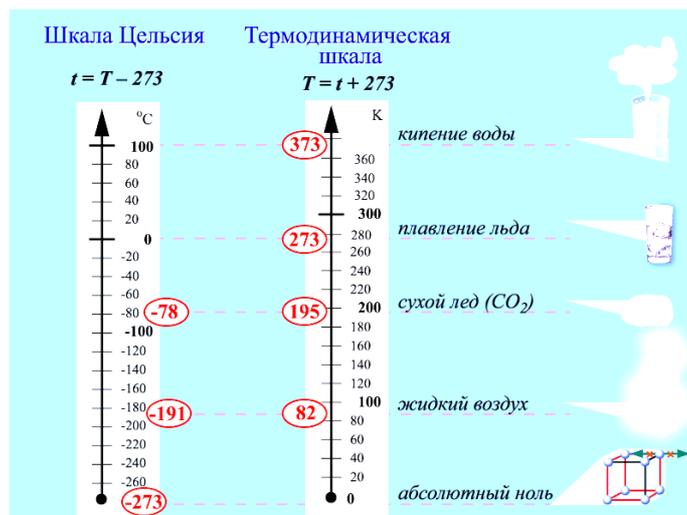


Рис. 109. Шкала Цельсия и термодинамическая шкала

На рис. 110. приведён диапазон температур в природе и технике.

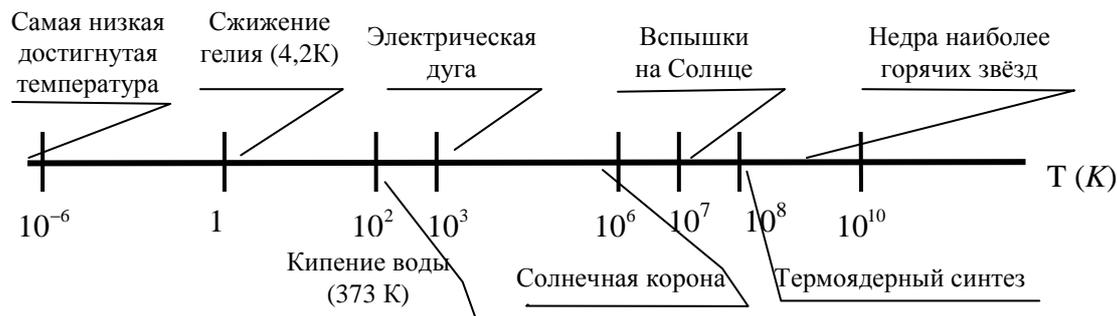


Рис. 110. Диапазон температур

### Основные понятия молекулярно-кинетической теории

**Относительная молекулярная масса**  $M_r$  – это отношение массы молекулы к  $\frac{1}{12}$  части массы атома углерода

$$M_r = \frac{m_0}{\frac{1}{12} \cdot m_{amC}}, \quad (237)$$

где  $m_0$  – масса молекулы.

**Относительная атомная масса** – это отношение массы молекулы к  $1/12$  части массы атома углерода.

Относительные атомная и молекулярная массы – безразмерные величины.

$$1 \text{ а.е.м.} = \frac{1}{12} \cdot m_{amC} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг.}$$

**Количество вещества** ( $\nu$ ) – физическая величина, определяемая числом специфических структурных элементов – молекул, атомов, ионов, из которых состоит вещество.

Единица количества вещества – 1 моль. 1 моль – количество вещества системы, содержащей столько же структурных элементов, сколько атомов содержится в 12 граммах углерода.

Массу одного моля вещества принято называть молярной массой  $M$ . **Молярная масса** равна произведению массы  $m_0$  одной молекулы данного вещества на постоянную Авогадро

$$M = N_A \cdot m_0, \quad (238)$$

$$N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \frac{1}{\text{моль}}.$$

Физический смысл  $N_A$ : число Авагадро показывает, что в одном моле любого вещества содержится  $6,02 \cdot 10^{23}$  молекул.

Молярную массу можно найти как отношение массы вещества  $m$  к количеству молей  $\nu$  в нём

$$M = m / \nu. \quad (239)$$

Молярная масса – величина скалярная.  $[M] 1 \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ .

Используя таблицу Менделеева, можно легко определить молярную массу

$$M = M_r \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}. \quad (240)$$

Например, для воды:  $M_{H_2O} = (2 + 16) \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ .

Масса одной молекулы

$$m_0 = \frac{M}{N_A} = \frac{m}{N}. \quad (241)$$

Кроме того, массу одной молекулы  $m_0$  можно определить, разделив плотность вещества  $\rho$  на концентрацию его молекул  $n$ :

$$m_0 = \frac{\rho}{n}, \quad (242)$$

где  $n = \frac{N}{V}$  – число частиц в единице объёма (концентрация).

Для оценки объёма молекулы можно объём одного моля твёрдого или жидкого вещества разделить на число молекул в одном моле, то есть на число Авогадро. Например, один моль воды занимает объём  $18 \text{ см}^3 = 18 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$ . Тогда объём одной молекулы воды

$V_{H_2O} = \frac{18 \cdot 10^{-6}}{6,02 \cdot 10^{23}} \text{ м}^3 = 30 \cdot 10^{-30} \text{ м}^3$ , а её диаметр  $D$ , считая, что форма молекулы – шар, примерно равен корню кубическому из объёма молекулы:

$$D = \sqrt[3]{V_{H_2O}} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ м} = 3 \text{ \AA}.$$

Здесь  $\text{\AA}$  – ангстрем, внесистемная единица длины, часто используемая в молекулярной и атомной физике.

$$1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}.$$

**Молярный объём** ( $V_m$ ) – физическая величина, равная отношению объёма  $V$  однородной системы к количеству вещества  $\nu$  системы

$$V_m = \frac{V}{\nu}. \quad (243)$$

$[V_m] 1 \text{ м}^3 / \text{моль}$ . 1 кубический метр на моль – молярный объём вещества, занимающего при количестве вещества 1 моль объём  $1 \text{ м}^3$ .

**Закон Авогадро:** моли любых газов при одинаковых температуре и давлении занимают одинаковые объёмы.

При нормальных условиях  $V_m = 22,41 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$ .

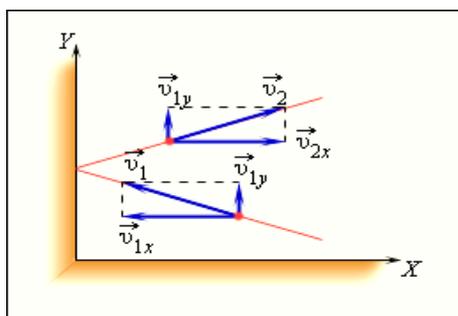
**Закон Дальтона:** давление смеси идеальных газов равно сумме парциальных давлений  $p_1, p_2, \dots, p_n$  входящих в неё газов

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n. \quad (244)$$

**Парциальное давление** – давление, которое производил бы газ, входящий в состав газовой смеси, если бы он один занимал объём, равный объёму смеси при той же температуре.

### **Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеальных газов**

Используя модель идеального газа, вычислим давление газа на стенку сосуда. В процессе взаимодействия молекулы со стенкой сосуда между ними возникают силы, подчиняющиеся третьему закону Ньютона. В результате проекция  $v_x$  скорости молекулы, перпендикулярная стенке, изменяет свой знак на противоположный, а проекция  $v_y$  скорости, параллельная стенке, остается неизменной (рис. 111).



*Рис. 111. Упругое столкновение молекулы со стенкой*

При каждом соударении молекула, движущаяся перпендикулярно площадке, передаёт ей импульс

$$m_0 \cdot v - (-m_0 \cdot v) = 2 \cdot m_0 \cdot v,$$

где  $m_0$  – масса молекулы,  $v$  – её скорость.

За время  $\Delta t$  площадки  $\Delta S$  достигнут только те молекулы, которые заключены в объёме цилиндра с основанием  $\Delta S$  и высотой  $v \cdot \Delta t$  (рис. 112). Число этих молекул равно

$$n \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t,$$

где  $n$  – концентрация молекул.

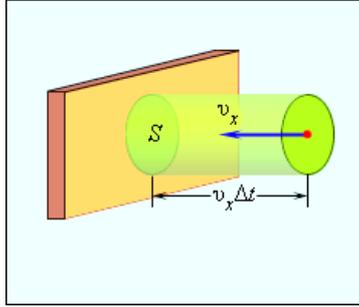


Рис. 112. Определение числа столкновений молекул с площадкой  $S$

Реально молекулы движутся к площадке  $\Delta S$  под разными углами и имеют различные скорости, причём при каждом соударении скорость молекул меняется. Для упрощения расчётов хаотическое движение молекул заменяют движением вдоль трёх взаимно перпендикулярных направлений, так что в любой момент времени вдоль каждого из них движется  $\frac{1}{3}$  молекул, причём половина молекул  $\frac{1}{6}$  движется вдоль данного направления в одну сторону, половина – в противоположную. Тогда число ударов молекул, движущихся в заданном направлении, о площадку  $\Delta S$  будет  $\frac{1}{6} \cdot n \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t$ . При столкновении с площадкой эти молекулы передадут ей импульс

$$\Delta P = 2 \cdot m_0 \cdot v \cdot \frac{1}{6} \cdot n \cdot \Delta S \cdot v \cdot \Delta t = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \cdot v^2 \cdot \Delta S \cdot \Delta t.$$

Тогда давление газа, оказываемое им на стенку сосуда:

$$p = \Delta P / (\Delta t \cdot \Delta S) = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \cdot v^2. \quad (245)$$

Если газ в объёме  $V$  содержит  $N$  молекул, движущихся со скоростями  $v_1, v_2, \dots, v_N$ , то целесообразно рассматривать квадратичную скорость (корень квадратный из среднего значения квадратов скоростей всех молекул)

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{1}{N} \cdot \sum_{i=1}^N v_i^2}, \quad (246)$$

характеризующую всю совокупность молекул газа.

Уравнение (245) с учётом (246) примет вид

$$p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \cdot \langle v_{кв} \rangle^2. \quad (247)$$

Это уравнение называется **основным уравнением молекулярно-кинетической теории идеальных газов**. Точный расчёт с учётом движения молекул по всевозможным направлениям даёт ту же формулу.

Учитывая, что  $E_k = \frac{m \cdot v^2}{2}$ , получим

$$p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \langle E_k \rangle, \quad (248)$$

где  $\langle E_k \rangle$  – суммарная  $E_k$  поступательного движения всех молекул газа.

Так как плотность газа  $\rho = m_0 \cdot n$ , то

$$p = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle v \rangle^2. \quad (249)$$

### Уравнение состояния идеального газа

Связь между давлением идеального газа, его концентрацией и абсолютной температурой

$$p = n \cdot k \cdot T, \quad (250)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана.

Так как  $n = \frac{N}{V}$  (\*), то, подставив (\*) в (250), получим  $p = \frac{N}{V} \cdot k \cdot T$ ,

$$p \cdot V = N \cdot k \cdot T \quad (2*), \text{ так как } m = \nu \cdot N = \frac{M}{N_A} \cdot N, \text{ то } N = \frac{m \cdot N_A}{M} \quad (3*).$$

Подставим (3\*) в (2\*), получим  $p \cdot V = \frac{m \cdot N_A \cdot k \cdot T}{M}$ .

$k \cdot N_A = R = 8,31$  Дж/моль,  $R$  – универсальная газовая постоянная. Окончательно получаем

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T. \quad (251)$$

(251) – уравнение Клапейрона–Менделеева.

Для одного моля газа  $p \cdot V = R \cdot T \Rightarrow \frac{p \cdot V}{T} = R$ , так как  $\frac{p \cdot V}{T}$  – величина постоянная для данной массы газа.

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = const, \quad (252)$$

или

$$\frac{p \cdot V}{T} = const. \quad (252*)$$

Уравнение (252), (252\*) – уравнение Клапейрона. Поэтому уравнение (251) называется уравнением Клапейрона–Менделеева.

### **Средняя квадратичная скорость молекул**

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории идеальных газов ( $p = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \cdot \langle v_{кв} \rangle^2$  (247)) и уравнения Клапейрона–Менделеева ( $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$  (251) для одного моля газа) можно получить

$$R \cdot T = \frac{1}{3} \cdot M \cdot \langle v_{кв} \rangle^2. \quad (253)$$

Из (253) следует, что

$$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot R \cdot T}{M}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}. \quad (254)$$

### **Средняя кинетическая энергия поступательного движения одной молекулы идеального газа**

Используем основное уравнение МКТ  $p = \frac{2}{3} \cdot n \cdot \langle E_k \rangle$ .

$p = \frac{2}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot \langle E_k \rangle \Rightarrow p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot N \cdot \langle E_k \rangle$ ;  $p \cdot V = \frac{2}{3} \cdot E$ , так как

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{E}{N} = \frac{m_0 \cdot \langle v_{кв} \rangle^2}{2}. \quad (255)$$

Учитывая, что  $\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}$ , получим

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T. \quad (256)$$

Из (256) следует физический смысл термодинамической температуры. **Термодинамическая температура является мерой средней кинетической энергии поступательного движения молекул идеального газа.** При температурах, близких к  $0\text{ K}$ , это выражение несправедливо, то есть  $\langle \varepsilon_0 \rangle$  непропорционально  $T$ . Поэтому некорректно говорить о том, что при  $0\text{ K}$  движение молекул прекращается. В настоящее время доказано, что даже при  $0\text{ K}$  частицы вещества совершают нулевые колебания.

## Изопроцессы в идеальном газе

**Изопроцессами** в газах называются процессы, при которых один из параметров состояния (давление, объём или температура) остаётся неизменным в течение всего процесса. Закономерности, наблюдаемые при изопроцессах, называют газовыми законами. Газовые законы являются следствиями уравнения Клапейрона  $\left(\frac{p \cdot V}{T} = const\right)$ .

1. **Изотермическим процессом** называется процесс (рис. 113), протекающий при постоянной температуре.

**Закон Бойля-Мариотта:** при постоянной температуре произведение давления данной массы идеального газа ( $m = const$ ) и его объёма есть величина постоянная

$$p \cdot V = const. \quad (257)$$

Уравнение изотермического процесса было получено из эксперимента английским физиком Р. Бойлем (1662 г.) и независимо французским физиком Э. Мариоттом (1676 г.). Поэтому это уравнение называют законом Бойля-Мариотта.

Процесс в реальном газе можно считать изотермическим, если он протекает очень медленно, столь медленно, что изменением температуры газа за некоторый малый промежуток времени можно пренебречь.

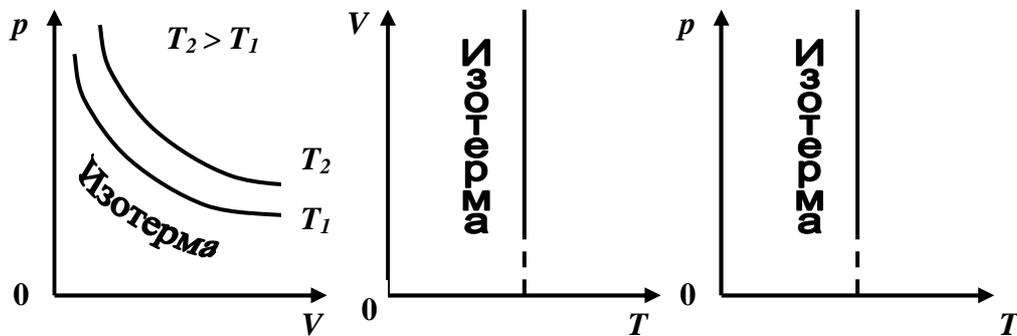


Рис. 113. Зависимость  $p(V)$ ,  $V(T)$ ,  $p(T)$  для изотермического процесса

2. **Изобарный процесс** – это процесс квазистатического нагревания или охлаждения газа при постоянном давлении и при условии, что количество вещества  $\nu$  в сосуде остается неизменным (рис.114).

**Закон Гей-Люссака:** при постоянном давлении объём данной массы идеального газа прямопропорционален его абсолютной температуре,

то есть (при  $p = const; m = const$ )  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$ , или

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}. \quad (258)$$

Зависимость объема газа от температуры при неизменном давлении была экспериментально исследована французским физиком Ж. Гей-Люссаком (1862 г.). Поэтому уравнение изобарного процесса называют законом Гей-Люссака.

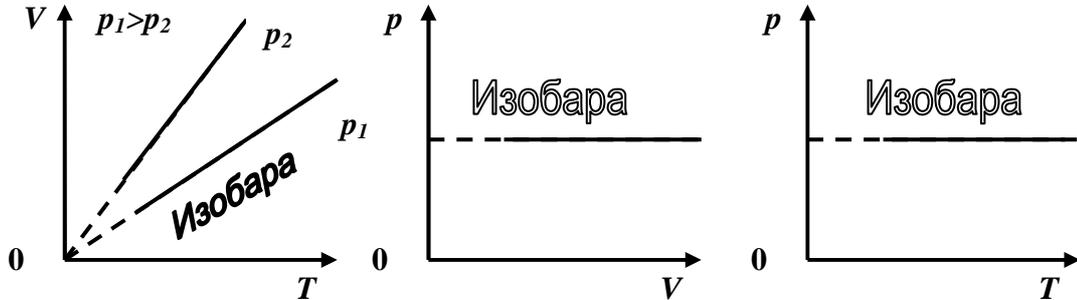


Рис. 114. Зависимость  $V(T)$ ,  $p(V)$ ,  $p(T)$  для изобарного процесса

**3. Изохорный процесс** – это процесс квазистатического нагревания или охлаждения газа при постоянном объеме  $V$  и при условии, что количество вещества  $\nu$  в сосуде остается неизменным (рис.115).

**Закон Шарля:** при постоянном объеме давление данной массы идеального газ прямо пропорционально его абсолютной температуре.

Как следует из уравнения Клапейрона ( $V = const; m = const$ ),  $\frac{p_1}{p_2} = \frac{T_1}{T_2}$ ,

или

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}. \quad (259)$$

Экспериментально зависимость давления газа от температуры исследовал французский физик Ж. Шарль (1787 г.). Поэтому уравнение изохорного процесса называется законом Шарля.

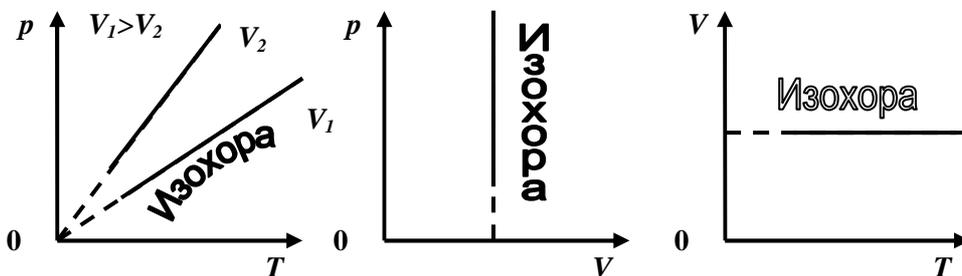
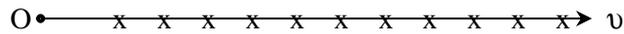


Рис. 115. Зависимость  $p(T)$ ,  $p(V)$ ,  $V(T)$  для изохорного процесса

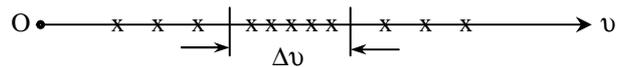
### **Распределение молекул по скоростям. Закон Максвелла**

Предположим, что мы располагаем способом одновременного определения скоростей  $N$ -молекул некоторого количества газа. Изобразим полученные результаты в виде точек на оси  $v$ . При этом мы получим «моментальную фотографию» скоростей молекул для некоторого момента времени  $t$ . Если бы все значения были одинаково вероятны, точки распределялись бы по оси равномерно (рис. 116).



*Рис. 116. Скорости молекул*

Однако скорости группируются в основном вблизи некоторого, наиболее вероятного значения. Близкие к нулю и очень большие значения скоростей встречаются сравнительно редко. Поэтому распределение точек по оси  $v$  будет неравномерным с плотностью, различной на разных участках оси (рис. 117).



*Рис. 117. Распределение точек по оси  $v$*

Отношение числа точек  $\Delta N_v$ , попадающих в пределах интервала  $\Delta v$  к величине этого интервала, называется плотностью точек ( $\rho$ )

$$\rho(v) = \frac{\Delta N_v}{\Delta v}.$$

Если сопоставить ряд фотографий для разных моментов времени, то плотность будет различна. Для газа, находящегося в равновесном состоянии, то есть для газа с неизменяющимися параметрами, плотность, с которой распределены точки на различных участках оси  $v$  для всех моментов времени, будет одна и та же.

Если взять несколько порций газа, находящегося в идентичных условиях, то распределение молекул по скоростям будет также идентично. Однако плотность точек по оси  $v$  при одинаковом характере распределения по оси, очевидно, пропорциональна количеству молекул  $N$  и, следовательно, для различных порций газа будет различна. Одинаковым для различных порций будет соотношение

$$f(v) = \frac{\rho(v)}{N} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\Delta N_v}{\Delta v}. \quad (260)$$

Определенная таким образом функция  $f(v)$  характеризует распределение молекул газа по скоростям и называется функцией распределения, где  $\Delta N_v = \Delta f(v)\Delta v$  – число молекул, скорость которых больше  $v$ , но меньше  $v+\Delta v$ ;  $\frac{\Delta N_v}{N} = f(v)\Delta v$  есть вероятность того, что скорость молекулы будет иметь значение в пределах данного интервала скоростей.

Найдём аналитическое выражение закона распределения молекулярных скоростей. Скорость каждой молекулы изображается вектором. В прямоугольной системе координат вектор скорости  $v$  определяется координатами  $v_x, v_y, v_z$  (рис.118). Очевидно, что эти координаты одновременно будут являться компонентами скорости вдоль выбранных осей координат. Тогда число молекул  $\Delta N_{v_x}$ , составляющие скорости которых больше  $v_x$ , но меньше  $v_x+\Delta v_x$  согласно равенству (260), равны

$$\Delta N_{v_x} = Nf(v_x)\Delta v_x. \quad (261)$$

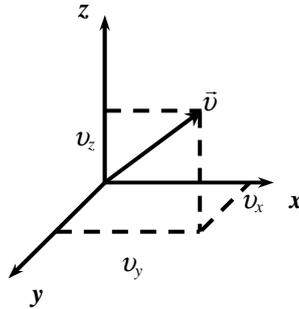


Рис. 118. Вектор  $\vec{v}$

Отношение  $\frac{\Delta N_{v_x}}{N} = f(v_x)\Delta v_x$  есть вероятность для произвольно выбранной молекулы обладать скоростью, лежащей в указанном интервале.

Рассуждая аналогично, можно написать выражение вероятности для молекул обладать составляющей скорости вдоль оси  $y$ , большей  $v_y$  и меньшей  $v_y+\Delta v_y$

$$\frac{\Delta N_{v_y}}{N} = f(v_y)\Delta v_y. \quad (262)$$

Вероятность составляющей скорости вдоль оси  $z$ , заключенной в пределах от  $v_z$  до  $v_z+\Delta v_z$ :

$$\frac{\Delta N_{v_z}}{N} = f(v_z)\Delta v_z. \quad (263)$$

Из теории вероятности известно, что вероятность совместного осуществления трех независимых событий равна произведению их вероятностей. Поэтому вероятность  $\frac{\Delta N_v}{N}$  для молекулы обладать скоростью, компоненты которой заключены в пределах от  $v_x, v_y, v_z$ , до  $(v_x + \Delta v_x), (v_y + \Delta v_y), (v_z + \Delta v_z)$  найдется перемножением 3-х вероятностей (261), (262) и (263) и будет

$$\frac{\Delta N_v}{N} = f(v_x) \Delta v_x \cdot f(v_y) \Delta v_y \cdot f(v_z) \Delta v_z. \quad (264)$$

Допустим, что нижний предел скорости  $v = \text{const}$ , в этом случае  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = \text{const}$ ;  $v_x \Delta v_x + v_y \Delta v_y + v_z \Delta v_z = 0$ .

Допустим также, что

$$\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z = \text{const}.$$

При выполнении этих предположений должна оставаться неизменной и вероятность  $\frac{\Delta N_v}{N}$  того, что молекула обладает скоростью, удовлетворяющей сформулированным выше требованиям. Если это так, то

$$d\left(\frac{\Delta N_v}{N}\right) = 0, \quad (265)$$

$$d(\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z) = 0. \quad (266)$$

Подставив в равенство (265) равенство (264) и учитывая (266), получим:

$$f(v_y) \cdot f(v_z) \cdot f'(v_x) \Delta v_x + f(v_z) \cdot f(v_x) \cdot f'(v_y) \Delta v_y + f(v_x) \cdot f(v_y) \cdot f'(v_z) \Delta v_z = 0.$$

Разделим полученное уравнение на произведение функций  $f(v_x) f(v_y) f(v_z)$ , получим

$$\frac{f'(v_x)}{f(v_x)} dv_x + \frac{f'(v_y)}{f(v_y)} dv_y + \frac{f'(v_z)}{f(v_z)} dv_z = 0. \quad (267)$$

Умножим выражение (265) на произвольную величину  $\lambda$ , сложим с уравнением (267), сгруппируем члены в соответствии с индексами  $v$  и получим

$$\left[ \frac{f'(v_x)}{f(v_x)} + \lambda v_x \right] dv_x + \left[ \frac{f'(v_y)}{f(v_y)} + \lambda v_y \right] dv_y + \left[ \frac{f'(v_z)}{f(v_z)} + \lambda v_z \right] dv_z = 0.$$

В силу произвольности величин  $dv_x, dv_y, dv_z$  написанное уравнение может выполняться в том случае, если каждый из стоящих в скобках двучленов порознь равен нулю, то есть

$$\left[ \frac{f'(v_x)}{f(v_x)} + \lambda v_x \right] = 0; \quad (268)$$

$$\left[ \frac{f'(v_y)}{f(v_y)} + \lambda v_y \right] = 0; \quad (269)$$

$$\left[ \frac{f'(v_z)}{f(v_z)} + \lambda v_z \right] = 0. \quad (270)$$

Обозначим  $f(v_x) = y$ , тогда  $f'(v_x) = \frac{dy}{dv_x}$  и (268) переписывается в виде

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dv_x} + \lambda v_x = 0.$$

После интегрирования

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \lambda \cdot v_x dx$$

имеем

$$\ln y = -\lambda \cdot \frac{v_x^2}{2} + \ln A,$$

где  $A$  – постоянная интегрирования. Потенцируя данное выражение, получим

$$y = A \cdot e^{-\frac{\lambda \cdot v_x^2}{2}}.$$

Таким образом, искомое выражение вероятности  $\frac{\Delta N_{v_x}}{N}$  того, что скорость молекулы в направлении оси  $x$ , заключенной в пределах от  $v_x$  до  $v_x + \Delta v_x$ , будет равна

$$f(v_x) \Delta v_x = A \cdot e^{-\frac{\lambda \cdot v_x^2}{2}} \Delta v_x.$$

Аналогичные выражения можно получить из (269) для вероятности того, что скорость молекулы вдоль оси  $y$  заключена в пределах от  $v_y$  до  $v_y + \Delta v_y$  и из (270) для вероятности того, что скорость молекулы в направлении оси  $z$  заключена в пределах от  $v_z$  до  $v_z + \Delta v_z$ .

Вероятность совместного события найдется перемножением соответствующих вероятностей, то есть

$$\frac{\Delta N_v}{N} = A^3 \cdot e^{-\lambda \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2}} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z.$$

Если в этом выражении заменить  $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$  и определить значение постоянных, то вероятность того, что молекула движется независимо от направления со скоростью, заключенной в пределах от  $v$  до  $v+\Delta v$ , будет выражаться следующим соотношением:

$$\frac{\Delta N_v}{N} = 4 \cdot \pi \cdot \left[ \frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right]^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}} \Delta v, \quad (271)$$

где  $m_0$  – масса молекулы;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – абсолютная температура. Учитывая, что  $f(v)\Delta v = \frac{\Delta N_v}{N}$ , из (271) получим

$$f(v) = 4 \cdot \pi \cdot \left[ \frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right]^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}. \quad (272)$$

**Это выражение и является искомым законом распределения молекулярных скоростей Максвелла.**

Таким образом, конкретный вид функции распределения зависит от рода газа (массы молекул) и от температуры. Давление газа и объем на распределение молекул по скоростям не влияют.

Дж. Максвелл в 1860 г. вывел закон распределения молекул газа по скоростям, исходя из основных положений молекулярно-кинетической теории. На рис. 119 представлены типичные кривые распределения молекул по скоростям. По оси абсцисс отложен модуль скорости, а по оси ординат – относительное число молекул, скорости которых лежат в интервале от  $v$  до  $v + \Delta v$ . Это число равно площади выделенного на рис. 119 столбика.

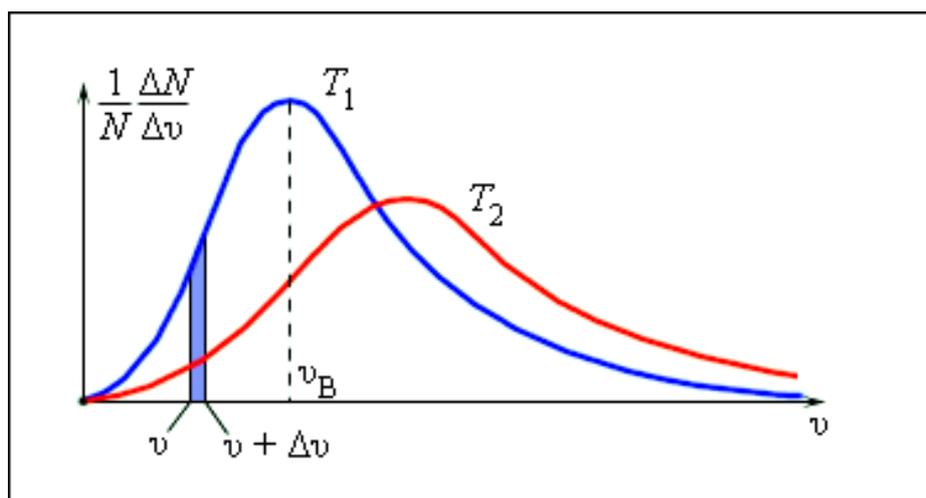


Рис.119. Распределение молекул по скоростям.  $T_2 > T_1$

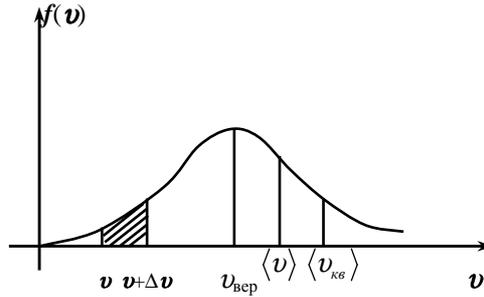


Рис. 120. К закону Максвелла

Из графика (рис.120) видно, что  $f(v)$  – функция распределения – стремится к нулю при

$$v \rightarrow 0 \text{ и } v \rightarrow \infty.$$

Следовательно, относительное число молекул в газе, обладающее очень малыми и очень большими скоростями, ничтожно мало. Скорость, отвечающая максимальному значению функции распределения, будет, очевидно, наиболее вероятной.

Для нахождения максимума функции  $f(v)$  продифференцируем выражение (272), заменив через  $C = 4 \cdot \pi \cdot \left[ \frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right]^{3/2}$

$$f(v) = C \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}} \cdot v^2; \quad \frac{df(v)}{dv} = C \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}} \cdot v \left( 2 - \frac{m \cdot v^2}{k \cdot T} \right) \text{ и приравняв}$$

к нулю  $\frac{df(v)}{dv} = 0$ , получим

$$C \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}} \cdot v \cdot \left( 2 - \frac{m_0 \cdot v^2}{k \cdot T} \right) = 0.$$

Значение  $v$ , обращающее в нуль выражение, стоящее в скобках, представляет собой искомое  $v_{\text{вер}}$

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2 \cdot k \cdot T}{m_0}}. \quad (273)$$

Вычисления показывают, что

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_0}}, \quad (274)$$

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}, \quad (275)$$

поэтому  $v_{вер} : \langle v \rangle : \langle v_{кв} \rangle = 1 : 1,13 : 1,22$ .

При возрастании температуры средняя скорость  $\langle v \rangle$  и наиболее вероятная скорость  $v_{вер}$  увеличиваются пропорционально  $\sqrt{T}$ , и максимум распределения сдвигается вправо (рис.119). При этом число медленных молекул убывает, а число быстрых – возрастает. Но **площадь под кривой, равная полному числу всех молекул газа  $N$ , остается постоянной.** Необходимо подчеркнуть, что **установленный Максвеллом закон распределения молекул по скоростям и все вытекающие из него следствия, справедливы только для газа, находящегося в равновесном состоянии.**

Закон справедлив для любого числа  $N$ , если только это число достаточно велико. Закон Максвелла – статистический закон, а законы статистики выполняются тем точнее, чем к большему числу одинаковых объектов они применяются. При малом числе объектов могут наблюдаться значительные отклонения от предсказаний статистики. Следует обратить внимание на то, что при каждом столкновении молекул в газе изменяется не только направление, но и величины скоростей обеих сталкивающихся молекул. Скорости одних молекул при этом увеличиваются, других – уменьшаются. Но число молекул, скорость которых лежит в любом определенном интервале скоростей  $\Delta v$ , не меняется.

Если в результате столкновений в единицу времени  $\Delta t$  молекул, обладавших скоростью в интервале  $\Delta v$ , изменяют свою скорость, то ровно столько же молекул, обладавших ранее другими скоростями, приобретут в результате столкновений скорость в пределах  $\Delta v$ . Как показал Больцман, в результате взаимодействия между молекулами, каким бы ни было исходное распределение скоростей, в конце концов (весьма быстро) устанавливается максвелловское распределение.

### **Барометрическая формула**

Действие силы тяжести приводит к определенному распределению молекулярной плотности по высоте газового столба. Одновременно с изменением плотности изменяется и давление, измеряемое барометром.

Пусть имеется свободный столб газа, поддерживаемый при постоянной температуре. Выделим мысленно столб газа с основанием  $1 \text{ см}^2$  (рис. 120). Обозначим  $p_0$  давление газа у основания столба,  $p$  – давление газа на высоте  $h$ . Тогда давление газа на высоте  $h + dh$  равно  $p + dp$ . Причём давление во втором сечении будет меньше, чем в первом на величину  $p + dp$ .

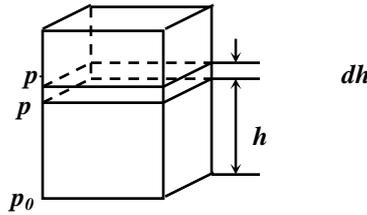


Рис. 120. Столб газа

Уменьшение давления равно весу столба газа сечением  $1 \text{ см}^2$ , заключенного между 1-м и 2-м сечениями, который равен  $\rho \cdot g \cdot dh$ , то есть

$$p - (p + dp) = \rho \cdot g \cdot dh,$$

где  $\rho$  – плотность газа на высоте  $h$ .

Отсюда

$$dp = -\rho \cdot g \cdot dh. \quad (276)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона следует, что

$$p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T,$$

где  $V$  – объем газа;  $M$  – молярная масса газа;  $m$  – масса газа. Заменим

в данном уравнении  $\frac{m}{V}$  через  $\rho$  – плотность газа и получим

$$\rho = \frac{p \cdot M}{R \cdot T}. \quad (277)$$

Подставим (277) в (276), тогда

$$dp = -\frac{p \cdot M}{R \cdot T} \cdot g \cdot dh,$$

разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение:

$$\frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} dh; \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{p} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} dh; \quad \ln \frac{p}{p_0} = -\frac{M \cdot g}{R \cdot T} dh.$$

Потенцируя последнее уравнение, найдем зависимость давления от высоты при сделанном нами допущении о постоянстве температуры:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}}. \quad (278)$$

**Эта формула называется барометрической.**

Из нее следует, что давление убывает с высотой тем быстрее, чем тяжелее газ (больше  $M$ ) и чем ниже температура (рис. 121).

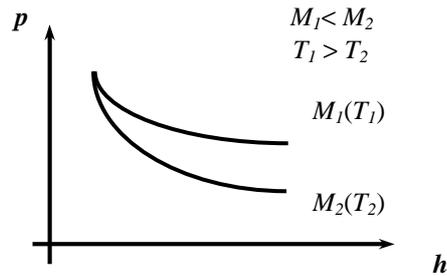


Рис. 121. Зависимость  $p(h)$  для газа

**Больцмановское распределение частиц в потенциальном поле.  
Закон Максвелла-Больцмана**

Если в барометрическую формулу (278) подставить основное уравнение молекулярно-кинетической теории газов в виде  $p = n \cdot k \cdot T$ , то получим закон изменения с высотой числа молекул в единице объема

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{M \cdot g \cdot h}{R \cdot T}}, \quad (279)$$

где  $n_0$  – число молекул в единице объема на высоте, равной нулю;  $n$  – то же число на высоте  $h$ .

Величина  $\frac{M}{R} = \frac{m_0 \cdot N_A}{R} = \frac{m_0}{k}$ , где  $m_0$  – масса одной молекулы;  $N_A$  – число Авогадро;  $k$  – постоянная Больцмана. Следовательно,

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}}. \quad (280)$$

Графически эта зависимость изображается следующим образом (рис.122).

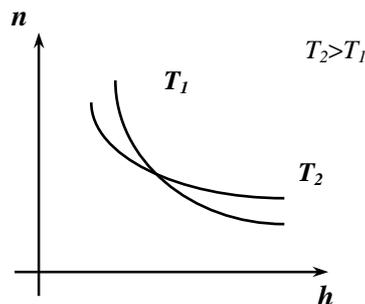


Рис. 122. Зависимость  $n(h)$

Каждое конкретное распределение молекул на высоте устанавливается в результате действия двух тенденций:

- 1) притяжение молекул к Земле, характеризуемое силой  $m \cdot g$ , стремится расположить их на поверхности Земли;

2) тепловое движение, характеризуемое величиной  $k \cdot T$ , стремится разбросать молекулы равномерно по поверхности Земли.

Чем больше  $m_0$  и меньше  $T$ , тем сильнее преобладает первая тенденция, и молекулы сгущаются у поверхности Земли. При высоких температурах преобладает тепловое движение, и плотность молекул медленно убывает с высотой. На разной высоте молекула обладает различным запасом потенциальной энергии

$$\varepsilon_p = m_0 \cdot g \cdot h. \quad (281)$$

Следовательно, распределение молекул по высоте является вместе с тем и распределением их по значениям потенциальной энергии. Подставляя (281) в (279), получим распределение Больцмана в виде

$$n = n_0 \cdot e^{-\frac{\varepsilon_p}{k \cdot T}}, \quad (282)$$

где  $n_0$  – число молекул в единице объема, в том месте, где  $\varepsilon_p = 0$ ,  $n$  – число молекул, где потенциальная энергия молекулы равна  $\varepsilon_p$ .

Выражение (282) показывает, что **молекулы располагаются с большей плотностью там, где меньше их потенциальная энергия и, наоборот, с меньшей плотностью в местах, где их потенциальная энергия больше.**

Если взять отношения  $n_1$  и  $n_2$  в точках, где потенциальная энергия молекулы имеет значение  $\varepsilon_{p_1}$  и  $\varepsilon_{p_2}$ , то

$$\frac{n_1}{n_2} = e^{-\frac{\varepsilon_{p_1} - \varepsilon_{p_2}}{k \cdot T}}. \quad (283)$$

Больцман показал, что распределение (282) и вытекающее из него выражение (283) справедливо не только в случае потенциального поля сил земного тяготения, но и в любом потенциальном поле сил для совокупности любых одинаковых частиц, находящихся в состоянии хаотического теплового движения.

Таким образом, закон Максвелла дает распределение частиц по значениям кинетической энергии, закон Больцмана дает распределение частиц по значениям потенциальной энергии. Для обоих распределений характерно наличие экспоненциального множителя, в показателе которого стоит отношение кинетической или соответственно потенциальной энергии одной молекулы к величине, определяющей среднюю энергию теплового движения молекул. Эти два распределения можно объединить в один закон Максвелла-Больцмана. Согласно распределению Максвелла, количество молекул, содержащихся в единице объема, скорость которых лежит между  $v$  и  $v+dv$ , равно

$$dn = n \cdot f(v) \cdot dv, \quad (284)$$

где

$$f(v) = 4 \cdot \pi \cdot \left( \frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{3/2} v^2 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot v^2}{2 \cdot k \cdot T}}. \quad (285)$$

Подставляя (282) и (285) в (284), получим закон Максвелла-Больцмана:

$$dn_{\varepsilon_p, v} = n_0 \cdot 4 \cdot \pi \cdot \left( \frac{m_0}{2 \cdot \pi \cdot k \cdot T} \right)^{3/2} \cdot e^{-\frac{\left( \varepsilon_p + \frac{m_0 \cdot v^2}{2} \right)}{k \cdot T}} \cdot v^2 dv, \quad (286)$$

или

$$dn_{\varepsilon_p, v} \approx e^{-\frac{E}{k \cdot T}} \cdot v^2 dv, \quad (287)$$

где  $E$  – полная энергия молекулы.

### **Экспериментальный метод определения числа Авогадро**

В газе, находящемся в поле силы тяжести, число молекул в единице объема убывает с высотой. Если число молекул в единице объема на нулевой высоте равно  $n_0$ , то на высоте  $h$  оно равно

$$n_h = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}}, \quad (288)$$

где  $m_0$  – масса молекулы;  $g$  – ускорение силы тяжести;  $k$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура по шкале Кельвина.

Эта формула была применена Перреном для броуновских частиц и использована для определения числа Авогадро.

Взвешенные в жидкости, очень мелкие твердые частицы, находящиеся в состоянии непрерывного беспорядочного движения, называются броуновскими частицами. Принимая участие в тепловом движении, эти частицы должны вести себя подобно гигантским молекулам, и для них должны выполняться закономерности кинетической теории, в частности, закон (288).

Во время опыта по определению числа Авогадро была взята стеклянная трубка с эмульсией глубиной 0,1 мм и помещена под микроскоп. Микроскоп имел столь малую глубину поля зрения, что в него были видны только частицы, находящиеся в горизонтальном слое толщиной примерно один микрон. Перемещая микроскоп в вертикальном направлении, можно было исследовать распределение броуновских частиц по высоте.

Обозначим высоту слоя, видимого в микроскоп над дном кюветы, буквой  $h$ . Число частиц, попадающих в поле зрения микроскопа, определяется формулой

$$\Delta N = n(h) \cdot s \cdot \Delta h,$$

где  $n(h)$  – число броуновских частиц в единице объема на высоте  $h$ ;  $s$  – площадь;  $\Delta h$  – глубина поля зрения микроскопа.

Согласно формуле (288) можно записать для броуновских частиц, что

$$n(h) = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h}{k \cdot T}},$$

где  $m \cdot g$  – сила тяжести броуновской частицы в эмульсии, взятая с учетом закона Архимеда.

Запишем выражение числа частиц  $\Delta h$  для двух разных высот  $h_1$  и  $h_2$  и получим

$$\Delta N_1 = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h_1}{k \cdot T}} \cdot s \cdot \Delta h,$$

$$\Delta N_2 = n_0 \cdot e^{-\frac{m_0 \cdot g \cdot h_2}{k \cdot T}} \cdot s \cdot \Delta h.$$

Возьмем отношение этих двух величин и, прологарифмировав данное выражение, получим:

$$\ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2} = \frac{m_0 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)}{k \cdot T}.$$

Измеряя  $m \cdot g$ ,  $T$ ,  $(h_2 - h_1)$ ,  $\Delta N_1$  и  $\Delta N_2$ , можно определить постоянную Больцмана:

$$k = \frac{m_0 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)}{T \cdot \ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}}.$$

Число Авогадро связано с  $k$  соотношением  $k = \frac{R}{N_A}$ , откуда  $N_A = \frac{R}{k}$ ,

где  $R$  – универсальная газовая постоянная, то есть

$$N_A = \frac{R \cdot T \cdot \ln \frac{\Delta N_1}{\Delta N_2}}{m_0 \cdot g \cdot (h_2 - h_1)}.$$

Исходя из данных этого эксперимента, Перрен получил значение  $N_A$  в пределах от  $6,5 \cdot 10^{26}$  до  $7,2 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>. Определенное другими, более точными, методами значение  $N_A = 6,02 \cdot 10^{26}$  кмоль<sup>-1</sup>.

Таким образом, значение, полученное Перреном, находится в хорошем согласии со значениями, полученными другими методами, что доказывает применимость к броуновским частицам закона распределения Больцмана.

### Эффективный диаметр молекулы. Число столкновений и средняя длина свободного пробега молекулы

Молекулы газа, находясь в тепловом движении, непрерывно сталкиваются друг с другом. **Минимальное расстояние, на которое сближаются при столкновении центры двух молекул, называется эффективным диаметром молекулы  $d$**  (рис.123). Путь, который проходит молекула за время между двумя последовательными соударениями, называется **длиной свободного пробега ( $\ell$ )**.

Длина свободного пробега – случайная величина. Поэтому имеет смысл ввести понятие средней арифметической длины свободного пробега. Средняя арифметическая величина свободных пробегов называется **средней длиной свободного пробега**, то есть

$$\bar{\ell} = \frac{\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_z}{z}, \quad (289)$$

где  $z$  – число соударений.

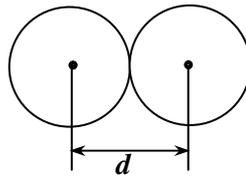


Рис. 123. Эффективный диаметр молекулы

Число свободных пробегов за какой-то промежуток времени совпадает с числом соударений молекулы за то же время. Если за 1 с молекула испытала  $z$  соударений, то длина её траектории, численно равная средней скорости её движения, будет состоять из  $z$  свободных пробегов.

Отношение средней скорости движения молекулы к средней длине свободного пробега определяет среднее число соударений

$$\bar{z} = \frac{\bar{v}}{\bar{\ell}}. \quad (290)$$

Для вычисления средней длины свободного пробега молекулы предположим, что все молекулы газа, за исключением одной, неподвижны и распределены равномерно по всему объему. Будем считать, что скорость движущейся молекулы совпадает со средней скоростью молекулярного движения идеального газа. Двигаясь, молекула соударяется с другими всякий раз, когда она приближается к ним настолько, что расстояние между их центрами делается равным эффективному диаметру молекулы (рис. 124).

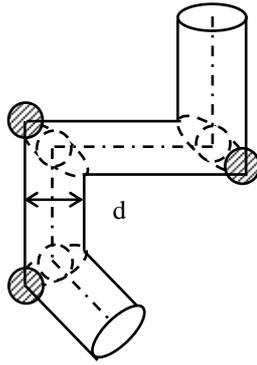


Рис. 124. К движению молекулы

Опишем вокруг движущейся молекулы сферу радиусом, равным эффективному диаметру молекулы, и назовем её сферой ограждения молекулы. Всякий раз, когда движущаяся молекула сближается с какой-либо другой молекулой настолько, что центр последней находится на поверхности сферы ограждения, происходит соударение молекул. При движении молекулы сфера ограждения вырезает в пространстве цилиндр с основанием  $\pi d^2$ .

Если молекула движется в течение 1 с, то высота этого цилиндра равна средней скорости молекулы  $\bar{v}$ , а объем, вырезанный сферой ограждения, составляет

$$V = \pi \cdot d^2 \cdot \bar{v}. \quad (291)$$

Очевидно, что соударения будут происходить всякий раз, когда центр встречной молекулы будет находиться вблизи цилиндра, вырезанного сферой ограждения. Следовательно, для определения среднего числа соударений  $\bar{z}$  достаточно подсчитать число молекул газа, центры которых находятся вблизи указанного цилиндра. Это число равно произведению объема цилиндра  $V$  на количество молекул газа в единице объема  $n_0$ .

Таким образом, среднее число соударений молекулы за одну секунду равно

$$\bar{z} = n_0 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \bar{v}. \quad (292)$$

При получении этого соотношения все молекулы газа, кроме одной, считались неподвижными.

Более строгая теория показывает, что при учёте движения всех молекул и при условии, что скорости молекулярного движения распределены согласно закону Максвелла, среднее число соударений молекулы за 1 с будет несколько больше и может быть подсчитано по уравнению

$$\bar{z} = \sqrt{2} \cdot n_0 \cdot \pi \cdot d^2 \cdot \bar{v}. \quad (293)$$

Зная среднее число соударений молекулы, можно определить среднюю длину пробега молекулы

$$\bar{\ell} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot n_0 \cdot \pi \cdot d^2}, \quad (294)$$

где  $n_0$  – число молекул газа в единице объема.

Из основного уравнения молекулярно-кинетической теории

$$n_0 = \frac{P}{k \cdot T}, \quad (295)$$

подставив (295) в (294), получим:

$$\bar{\ell} = \frac{k \cdot T}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot p}. \quad (296)$$

Таким образом, при **постоянной температуре средний свободный пробег молекулы обратно пропорционален давлению**. При повышении температуры средняя длина пробега несколько растет. Зависимость  $\ell$  от  $T$  дается формулой Сёзерленда

$$\ell = \ell_{\infty} \cdot \frac{T}{T + C}, \quad (297)$$

где  $C$  – характерная для каждого газа постоянная величина, имеющая размерность температуры и носящая название постоянной Сёзерленда,  $\ell_{\infty}$  – средняя длина свободного пробега при  $T \rightarrow \infty$ .

### **Явления переноса в термодинамически неравновесных системах**

До сих пор мы рассматривали газ, находящийся в равновесном состоянии. Такое состояние газа характеризуется тем, что параметры газа (объем, давление, температура) не изменяются. Теперь рассмотрим явления, возникающие при отклонении газа от равновесия, причем ограничимся случаями, когда отклонения невелики. Подобные явления называются явлениями переноса.

**Явления переноса** – необратимые процессы в термодинамически неравновесных системах, в результате которых происходит пространственный перенос энергии, массы или импульса (таблица 8).

В таблице 8:  $j_E, j_m, j_p$  – соответственно плотность теплового потока, плотность потока массы и плотность потока импульса;  $\lambda, D, \eta$  – соответственно коэффициенты теплопроводности, диффузии и динамической вязкости;  $\frac{dT}{dx}, \frac{d\rho}{dx}, \frac{dv}{dx}$  – соответственно градиенты температуры, плотности и скорости;  $c_v$  – удельная теплоёмкость газа при постоянном

объёме;  $\rho$  – плотность газа;  $\langle v \rangle$  – средняя скорость теплового движения молекул;  $\langle l \rangle$  – средняя длина свободного пробега молекул.

Таблица 8

*Общие сведения о явлениях переноса (одномерный случай)*

Явление переноса	Переносимая физическая величина	Закон, описывающий явление переноса	Коэффициенты $\lambda$ , $D$ и $\eta$
Теплопроводность	Энергия	Закон Фурье $j_E = -\lambda \cdot \frac{dT}{dx}$ (298)	$\lambda = \frac{1}{3} \cdot c_v \cdot \rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$
Диффузия	Масса	Закон Фика $j_m = -D \cdot \frac{d\rho}{dx}$ (299)	$D = \frac{1}{3} \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$
Внутреннее трение (вязкость)	Импульс	Закон Ньютона $j_p = -\eta \cdot \frac{dv}{dx}$ (300)	$\eta = \frac{1}{3} \cdot \rho \cdot \langle v \rangle \cdot \langle l \rangle$

$$[\lambda] 1 \frac{Вт}{м \cdot К}; [D] 1 \frac{м^2}{с}; [\eta] 1 Па \cdot с.$$

**Теплопроводность** – один из видов явлений переноса, заключающийся в том, что если в одной области газа средняя кинетическая энергия молекул больше, чем в другой, то с течением времени, вследствие постоянных столкновений молекул, происходит процесс выравнивания средних кинетических энергий молекул, то есть выравнивание температур.

В законе Фурье (298) знак минус показывает, что энергия переносится в направлении убывания температуры; ось  $x$  ориентирована в направлении переноса энергии.

**Плотность теплового потока**  $j_E$  – величина, определяемая энергией, переносимой в форме теплоты в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ .

**Градиент температуры**  $\frac{dT}{dx}$  определяется скоростью изменения температуры на единицу длины  $x$  в направлении нормали к площадке.

**Коэффициент теплопроводности** (теплопроводность)  $\lambda$  равен плотности теплового потока при градиенте температуры, равном единице.

**Диффузия** – один из видов явлений переноса, заключающихся в том, что происходит самопроизвольное проникновение и перемешивание.

вание частиц двух соприкасающихся газов, жидкостей и даже твёрдых тел; диффузия сводится к обмену масс частиц этих тел, возникает и продолжается, пока существует градиент плотности.

В законе Фика (299) ось  $x$  ориентирована в направлении переноса массы. Знак минус показывает, что перенос массы происходит в направлении убывания плотности.

**Плотность потока массы**  $j_m$  – величина, определяемая массой вещества, диффундирующего в единицу времени через площадку, перпендикулярную оси  $x$ .

**Градиент плотности**  $\frac{d\rho}{dx}$  – определяется скоростью изменения плотности на единицу длины  $x$  в направлении нормали к площадке.

**Коэффициент диффузии** (диффузия)  $D$  равен плотности потока массы при градиенте плотности, равном единице.

**Внутреннее трение** (вязкость) – один из видов явлений переноса, заключающийся в том, что из-за хаотического теплового движения происходит обмен молекулами между слоями, в результате чего импульс слоя, движущегося быстрее, уменьшается, движущегося медленнее – увеличивается, что приводит к торможению слоя, движущегося быстрее, и ускорению слоя, движущегося медленнее.

Взаимодействие двух слоёв, согласно второму закону Ньютона, можно рассматривать как процесс, при котором от одного слоя к другому в единицу времени переносится импульс, по модулю равный действующей силе. Тогда выражение для силы внутреннего трения между слоями газа (жидкости), определяемого законом Ньютона  $F = \eta \cdot \left| \frac{dv}{dx} \right| (S$  – площадь, на которую действует сила  $F$ ), можно представить в виде (300).

В законе Ньютона (300) ось  $x$  ориентирована в направлении переноса импульса. Знак минус показывает, что импульс переносится в направлении убывания скорости.

**Плотность потока импульса**  $j_p$  – величина, определяемая полным импульсом, переносимым в единицу времени в положительном направлении  $x$  через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ .

**Градиент скорости**  $\frac{dv}{dx}$  определяется быстротой изменения скорости на единицу длины  $x$  в направлении нормали к площадке.

**Динамическая вязкость**  $\eta$  равна плотности потока импульса при градиенте скорости, равном единице.

Закономерности всех явлений переноса сходны между собой. Законы Фурье, Фика и Ньютона были установлены задолго до того, как они были обоснованы и выведены из молекулярно-кинетической теории, позволившей установить, что внешнее сходство их математических выражений обусловлено общностью лежащего в основе явлений теплопроводности, диффузии и внутреннего трения молекулярного механизма перемешивания молекул в процессе их хаотического движения и столкновений друг с другом.

Формулы для коэффициентов теплопроводности, диффузии и внутреннего трения связывают коэффициенты переноса и характеристики теплового движения молекул. Из этих выражений вытекают следующие зависимости между  $\lambda, D, \eta$ :

$$\eta = \rho \cdot D, \quad (301)$$

$$\frac{\lambda}{\eta \cdot c_v} = 1. \quad (302)$$

## 2.2. Основы термодинамики

### ***Внутренняя энергия системы. Работа. Количество теплоты***

В отличие от молекулярно-кинетической теории термодинамика рассматривает разнообразные физические явления не с точки зрения их механизма, а с точки зрения тех превращений энергии, которыми эти явления сопровождаются.

Исторически термодинамика возникает как раздел физики, изучающий соотношение между теплотой, работой и внутренней энергией системы. Для описания состояния системы вводится понятие о параметрах состояния системы. К ним следует отнести объем, давление, температуру.

Параметры состояния не являются независимыми переменными, их связывает соотношение, называемое **уравнением состояния**, которое можно записать в общем случае в виде

$$F(p, V, T) = 0. \quad (303)$$

Величины, однозначно определяемые параметрами состояния, называются функциями состояния. Важнейшей функцией состояния является внутренняя энергия системы. Внутренней энергией системы называют общий запас энергии, которым обладает термодинамическая система.

Из молекулярно-кинетической теории известно, что внутренняя энергия тела складывается из кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимного расположения.

Покажем, что внутренняя энергия является функцией состояния. Предположим, что термодинамическая система находится в состоянии  $1$  с параметрами  $p_1, V_1, T_1$ . Внутренняя энергия имеет в этом случае единственное значение  $U_1 = U(p_1, V_1, T_1)$ . Переведем рассматриваемую систему из состояния  $1$  в состояние  $2$  с параметрами  $p_2, V_2, T_2$ . Значение энергии в этом случае  $U_2 = U(p_2, V_2, T_2)$ . Разница во внутренних энергиях при переходе системы из первого состояния во второе  $\Delta U = U_2 - U_1$  будет иметь одно и то же значение, вне зависимости от того, каким путем совершается переход из одного состояния в другое (рис.125) по  $abc$  или по  $adc$ . Это справедливо для всех функций состояния, то есть для любой функции состояния изменение её при переходе системы из одного состояния в другое не зависит от пути перехода.

Рассмотрим два важнейших понятия термодинамики, теплоту и работу, и покажем, что они не являются функцией состояния.

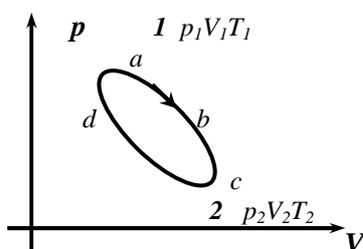


Рис. 125. Состояния системы 1 и 2

Пусть система переходит из состояния  $1$  с параметрами  $p_1, V_1, T_1$  в состояние  $2$  с параметрами  $p_2, V_2, T_2$  по различным путям: в первом случае по кривой  $abc$ , во втором случае по кривой  $adc$ .

**Элементарная работа**  $dA$  при элементарном изменении объема  $\Delta V$  определяется как

$$dA = p \cdot dV, \quad (304)$$

где  $p = \text{const}$ .

Полная работа найдётся интегрированием

$$A_{1,2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (305)$$

Работа численно равна площади под графиком процесса на диаграмме  $p, V$  (рис. 126).

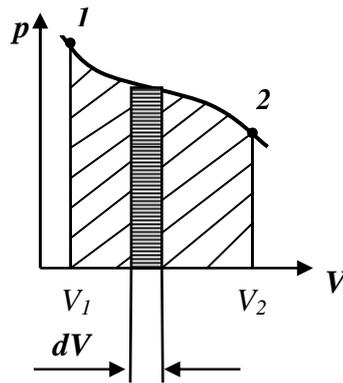


Рис. 126. Графическое представление работы

Величина работы зависит от того, каким путем совершался переход из начального состояния в конечное. На рис. 127 изображены три различных процесса, переводящих газ из состояния (1) в состояние (2). Во всех трех случаях газ совершает различную работу. Во всех трех случаях газ совершает разную работу, равную площади под графиком процесса.

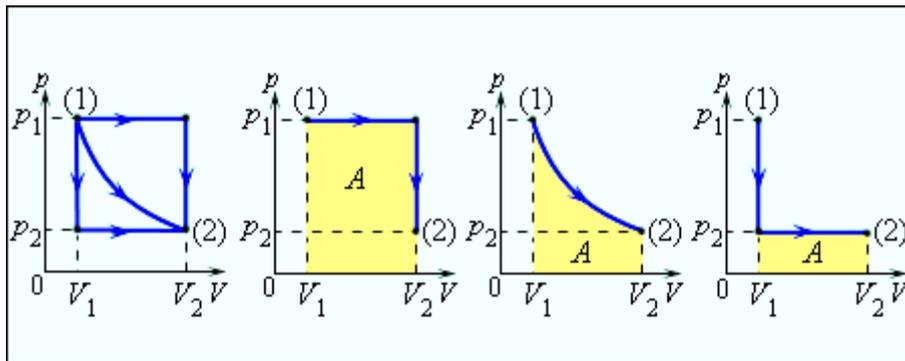


Рис. 127. Три различных пути перехода из состояния (1) в состояние (2)

Таким образом, работа, затрачиваемая или получаемая системой при переходе системы из одного состояния в другое, зависит от пути перехода и, следовательно, не является функцией состояния.

Поскольку работа не является функцией состояния, не имеет смысла говорить о количестве работы в какой-либо системе, то есть представление о количестве работы не имеет физического смысла.

Аналогично не имеет физического смысла и понятие количества теплоты. Для доказательства этого рассмотрим один моль газа, занимающий при температуре  $T_1$  и давлении  $p_1$  объем  $V_1$ . На диаграмме  $pV$  это состояние изображается точкой 1 (рис.128).

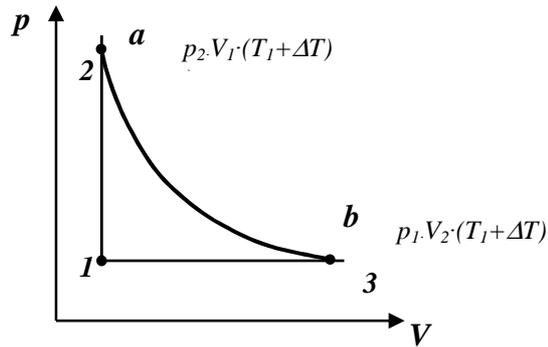


Рис.128. Диаграмма  $pV$

Сообщим системе некоторое количество теплоты  $\Delta Q$ , необходимое для того, чтобы температура повысилась на  $\Delta T$ . В зависимости от давления газа один моль газа может занимать различные объемы при температуре  $T_1 + \Delta T$ , на диаграмме  $pV$  эти состояния образуют изотерму  $ab$ .

Вертикальная прямая соответствует нагреванию при постоянном объеме, для которого требуется количество теплоты

$$\Delta Q_{1.2} = C_V \Delta T,$$

где  $C_V$  – молярная теплоемкость при постоянном объеме.

Горизонтальная прямая 1–3 соответствует нагреванию при  $p = \text{const}$ , которому требуется количество теплоты

$$\Delta Q_{1.3} = C_p \cdot \Delta T,$$

где  $C_p$  – молярная теплоемкость при  $p = \text{const}$ . Так как  $C_p > C_V$ , то

$$\Delta Q_{1.3} > \Delta Q_{1.2}.$$

Таким образом, количество теплоты, необходимое для нагревания вещества в первом и втором случаях будет различным. То есть при переходе вещества из одного состояния в другое количество теплоты, в зависимости от пути перехода, имеет различное значение. Поэтому, как и в случае работы, не имеет смысла говорить о количестве теплоты, которой обладает система. Итак, параметры состояния могут однозначно определять только внутреннюю энергию системы.

Внутренняя энергия – однозначная функция термодинамического состояния системы, то есть в каждом состоянии система обладает вполне определённой внутренней энергией (она не зависит от того, как система пришла в данное состояние). Это означает, что при переходе системы из одного состояния в другое изменение внутренней энергии определяется только разностью значений внутренних энергий этих состояний и не зависит от пути перехода.

Внутреннюю энергию можно изменить, совершив работу, или с помощью теплопередачи (передав количество теплоты).

Внутренняя энергия тела может изменяться, если действующие на него внешние силы совершают работу (положительную или отрицательную). Например, если газ подвергается сжатию в цилиндре под поршнем, то внешние силы совершают над газом некоторую положительную работу  $A'$ . В то же время силы давления, действующие со стороны газа на поршень, совершают работу  $A = -A'$ .

При тепловом контакте тел внутренняя энергия одного из них может увеличиваться, а другого – уменьшаться. В этом случае говорят о тепловом потоке от одного тела к другому. Количество теплоты  $Q$ , полученным телом, называют изменение внутренней энергии тела в результате теплообмена.

Передача энергии от одного тела другому в форме тепла может происходить только при наличии разности температур между ними. Тепловой поток всегда направлен от горячего тела к холодному.

Количество теплоты  $Q$  является энергетической величиной. В СИ

$$[Q] 1 \text{ Дж}; [A] 1 \text{ Дж}; [U] 1 \text{ Дж}.$$

Процессы, связанные с поглощением теплоты, – нагревание, плавление, парообразование. С выделением – охлаждение, кристаллизация, конденсация, сгорание топлива.

При нагревании (охлаждении)

$$Q = c \cdot m \cdot \Delta t = c \cdot m \cdot \Delta T, \quad (306)$$

плавлении (кристаллизации)

$$Q = \lambda \cdot m, \quad (307)$$

парообразовании (конденсации)

$$Q = r \cdot m, \quad (308)$$

сжигании топлива

$$Q = g \cdot m. \quad (309)$$

В формулах (306 – 309), известных из школьного курса физики,  $c$ ,  $\lambda$ ,  $r$ ,  $g$  – соответственно удельная теплоёмкость, удельная теплота плавления, удельная теплота парообразования, удельная теплота сгорания топлива (табличные величины).

Для замкнутой системы ( $\Delta U_i = Q_i$ ) суммарная внутренняя энергия не меняется

$$\begin{aligned} \Delta U_1 + \Delta U_2 + \Delta U_3 + \dots &= 0 \Rightarrow \\ Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots &= 0. \end{aligned} \quad (310)$$

(310) – уравнение теплового баланса.

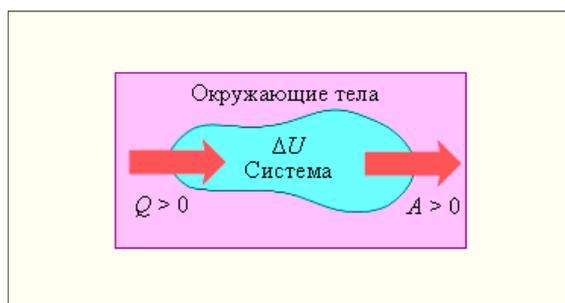
## Первое начало термодинамики

Итак, если к системе подводить или отводить некоторое количество теплоты, то внутренняя энергия его будет изменяться, то есть подвод к системе или отвод от неё теплоты является одним из способов изменения внутренней энергии системы.

Вторым способом изменения внутренней энергии системы является совершение системой некоторой работы или совершение работы над системой. Действительно, если совершать работу, быстро сжать газ, он нагреется и его внутренняя энергия возрастает. Наоборот, если предоставить газу расширяться, не подводя к нему теплоты, газ будет охлаждаться, то есть его внутренняя энергия будет убывать.

Передача теплоты и совершение работы – это формы движения материи, в результате которых и только благодаря которым изменяется внутренняя энергия системы.

На рис. 129 условно изображены энергетические потоки между выделенной термодинамической системой и окружающими телами. Величина  $Q > 0$ , если тепловой поток направлен в сторону термодинамической системы. Величина  $A > 0$ , если система совершает положительную работу над окружающими телами.



*Рис. 129. Обмен энергией между термодинамической системой и окружающими телами в результате теплообмена и совершаемой работы*

Если система обменивается теплом с окружающими телами и совершает работу (положительную или отрицательную), то изменяется состояние системы, то есть изменяются её макроскопические параметры (температура, давление, объем). Так как внутренняя энергия  $U$  однозначно определяется макроскопическими параметрами, характеризующими состояние системы, то отсюда следует, что процессы теплообмена и совершения работы сопровождаются изменением  $\Delta U$  системы.

Таким образом, для изменения внутренней энергии можно записать, что

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A, \quad (311)$$

где  $\Delta Q$  – сообщаемое системе количество тепла;  $\Delta A$  – работа, совершенная системой.

Уравнение (311) можно переписать в виде

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta A, \quad (312)$$

или

$$dQ = dU + dA. \quad (313)$$

Следует отметить, что (313) более корректно нужно записать так:

$$\partial Q = dU + \delta A. \quad (313^*)$$

Здесь  $dU$  – бесконечно малое изменение внутренней энергии системы;  $\delta A$  – элементарная работа;  $\partial Q$  – бесконечно малое количество теплоты. В этом выражении  $dU$  является полным дифференциалом, а  $\delta A$  и  $\partial Q$  таковыми не являются.

Это и есть обычная математическая формулировка первого начала термодинамики, которая гласит: **количество теплоты, сообщенное телу, идет на увеличение его внутренней энергии и на совершение телом работы.**

Первое начало термодинамики – это закон сохранения и превращения энергии: при разнообразных процессах, протекающих в природе, энергия не возникает из ничего и не исчезает, но превращается лишь из одних видов в другие.

Этот закон обобщает многовековой опыт человека. Он может быть сформулирован несколько иначе исходя из следующих соображений. Долгое время человечество пыталось построить **машину, которая бы производила работу, не потребляя эквивалентного количества энергии. Такая машина называется вечным двигателем первого рода.** Поэтому первое начало термодинамики записывают в виде утверждения: **невозможно построить вечный двигатель первого рода.**

#### **Степени свободы молекул. Закон Больцмана о равномерном распределении энергии по степеням свободы**

**Число степеней свободы молекул – число независимых переменных, полностью определяющих положение системы в пространстве.**

Средняя кинетическая энергия поступательного движения любой молекулы определяется выражением

$$\langle \varepsilon_0 \rangle = \frac{3}{2} \cdot k \cdot T. \quad (314)$$

Энергия, приходящаяся на поступательную степень свободы

$$\langle \varepsilon_i \rangle = \frac{\langle \varepsilon_0 \rangle}{3} = \frac{k \cdot T}{2}. \quad (315)$$

Независимо от общего числа степеней свободы молекул три степени свободы всегда поступательные. Ни одна из поступательных степеней свободы не имеет преимуществ перед другими, поэтому на каждую из них приходится в среднем одинаковая энергия, равная  $\frac{1}{3}$  значения  $\langle \varepsilon_0 \rangle$ .

Ниже (таблица 9) приведены данные по числу степеней свободы для различных моделей молекул.

В классической кинетической теории молекулы, состоящие из одного атома, принимались за идеально гладкие твердые шарики, у которых отсутствовало вращательное движение. На этом основании считают, что одноатомные молекулы обладают только тремя степенями свободы поступательного движения. У двухатомной молекулы к трем степеням свободы поступательного движения следовало бы добавить три степени свободы вращательного движения. Эти три степени свободы соответствуют трем взаимно перпендикулярным осям вращения. Однако одну из осей вращения можно совместить с осью молекулы (рис. 130).

Таким образом, всем двухатомным молекулам следует приписать две степени свободы вращательного движения. Общее число степеней свободы двухатомной молекулы равно пяти. Это число совпадает с числом независимых координат, необходимых для определения положения двухатомной молекулы в пространстве.

Для многоатомной молекулы с нелинейным расположением атомов сохраняется три степени свободы вращательного движения и поэтому общее число степеней свободы, обусловленное поступательным и вращательным движением молекулы, равно шести.

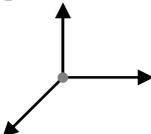
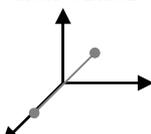
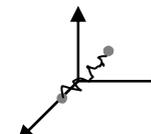
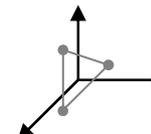
В приведенном подсчете числа степеней свободы принималось, что атомы в молекулах закреплены неподвижно и не могут колебаться друг относительно друга. Опыт показывает, что при комнатной температуре для двухатомных газов это предположение оправдывается.

Для статистической системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, на каждую поступательную и вращательную степени свободы приходится в среднем кинетическая энергия, равная  $\frac{k \cdot T}{2}$ , а на каждую колебательную степень свободы – в среднем энергия, равная  $k \cdot T$ . Колебательная степень «обладает» вдвое большей энергией

потому, что на неё приходится не только кинетическая энергия (как в случае поступательного и вращательного движений), но и потенциальная, причём среднее значение кинетической и потенциальной энергии одинаково.

Таблица 9

Число степеней свободы для различных моделей молекул

Газ	Модель газа	Число степеней свободы			
		$i_{\text{пост}}$	$i_{\text{вращ}}$	$i_{\text{колеб}}$	всего
Одноатомный	материальная точка 	3	-	-	3
Двухатомный	Две материальные точки, жёсткая связь 	3	2	-	5
Двухатомный	Две материальные точки, нежёсткая связь 	3	2	2	7
Трёхатомный, многоатомный	Три (много) атома, жёсткая связь 	3	3	-	6

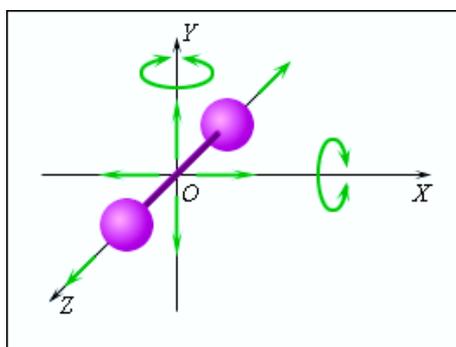


Рис. 130. Модель двухатомной молекулы

Таким образом, средняя кинетическая энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} \cdot k \cdot T, \quad (316)$$

где  $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вращ}} + 2 \cdot i_{\text{колеб}}$  ( $i$  – сумма числа поступательных, числа вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы молекулы).

В школьном курсе физики рассматривался идеальный одноатомный газ, поэтому для нахождения внутренней энергии газа использовалась формула

$$U = \frac{3}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T. \quad (317)$$

В общем случае **внутренняя энергия произвольной массы газа**

$$U = \frac{i}{2} \cdot \frac{m}{M} \cdot R \cdot T = \frac{i}{2} \cdot \nu \cdot R \cdot T. \quad (318)$$

### **Теплоёмкости. Уравнение Майера**

**Теплоемкостью** какого-либо тела называется величина, равная количеству тепла, которое нужно сообщить телу, чтобы повысить его температуру на один градус. Если сообщено телу количества тепла  $dQ$  повышает его температуру на  $dT$ , то теплоемкость по определению равна

$$C_{\text{тела}} = \frac{dQ}{dT}. \quad (319)$$

[C] 1 Дж/К.

**Теплоемкость моля** вещества называется молярной теплоемкостью

$$C_m = \frac{\partial Q}{\nu dT}. \quad (320)$$

[C<sub>m</sub>] 1 Дж/моль·К.

**Удельная теплоёмкость**  $c$  – величина, определяемая количеством теплоты, необходимым для нагревания 1 кг вещества на 1 К

$$c = \frac{\partial Q}{m dT}, \quad (321)$$

[c] 1 Дж/(кг·К).

Между молярной и удельной теплоемкостями имеется соотношение

$$C_m = c \cdot M. \quad (322)$$

Величина теплоемкости зависит от условий, при которых происходит нагревание тела. Наибольший интерес представляет теплоемкость для случаев, когда нагревание происходит при постоянном объеме или при постоянном давлении. Если нагревание происходит при постоянном объеме, тело не совершает работы над внешними телами и, следовательно, согласно первому началу термодинамики

$$dQ = dA + dU,$$

все тепло идет на приращение внутренней энергии

$$dA = 0, \quad dQ = dU.$$

Отсюда вытекает, что теплоемкость любого тела при постоянном объеме равна

$$C_v = \frac{dU}{dT}. \quad (323)$$

Следовательно, чтобы получить молярную теплоемкость идеального газа при постоянном объеме, нужно продифференцировать по температуре выражение для внутренней энергии. Для одного моля газа

$$U = \frac{i}{2} R \cdot T.$$

Молярная теплоемкость при постоянном объеме  $C_v = \frac{dU}{dT} \Rightarrow$

$$C_v = \frac{i}{2} \cdot R. \quad (324)$$

Из этого выражения следует, что теплоемкость идеального газа при постоянном объеме оказывается постоянной величиной, не зависящей от параметров состояния газа, в частности, от температуры. Введя понятие молярной теплоемкости при  $V = \text{const}$ , можно записать следующее выражение для внутренней энергии идеального газа:

$$U = C_v \cdot T. \quad (325)$$

Если нагревание газа происходит при постоянном давлении, то газ будет расширяться, совершая над внешними телами положительную работу. Следовательно, для повышения температуры газа на один градус понадобится больше тепла, чем при нагревании при постоянном объеме – часть тепла будет затрачиваться на совершение газом работы.

Напишем уравнение первого начала термодинамики для моля газа

$$dQ = dU + dA, \text{ учтем, что } dA = pdV; \quad dQ = dU + pdV.$$

Разделив на  $dT$ , получим выражение для молярной теплоемкости при постоянном давлении  $\frac{dQ}{dT} = C_p$ ,

$$C_p = \frac{dU}{dT} + p \cdot \frac{dV}{dT}. \quad (326)$$

Слагаемое  $\frac{dU}{dT} = C_v$  – молярная теплоемкость при постоянном объеме, поэтому

$$C_p = C_v + p \cdot \frac{dV}{dT}. \quad (327)$$

Из уравнения Менделеева–Клапейрона для одного моля газа следует, что  $p \cdot V = R \cdot T$ . Дифференцируя это выражение по  $T$ , находим, что

$$p \cdot \frac{dV}{dT} + V \cdot \frac{dp}{dT} = R. \quad (328)$$

Учитывая, что  $\frac{dp}{dT} = 0$ , получим

$$p \cdot \frac{dV}{dT} = R, \quad (329)$$

тогда

$$C_p = C_v + R. \quad (330)$$

Для идеального газа молярная теплоемкость при постоянном давлении превышает молярную теплоемкость при постоянном объеме на величину  $R$  – универсальную газовую постоянную. Из выражения (330) следует, что **работа, которую совершает моль идеального газа при повышении его температуры на один градус при постоянном давлении, оказывается равной универсальной газовой постоянной**. В этом и заключается ее физический смысл. Так как

$$C_v = \frac{i}{2} R, \quad (331)$$

то

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = \frac{i+2}{2} R. \quad (332)$$

Величина отношения  $\frac{C_p}{C_v}$ , обозначаемая  $\gamma$ , называется коэффициентом Пуассона

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}, \quad (333)$$

то есть **величина  $\gamma$  определяется числом степеней свободы молекул**.

Рассмотренная теория теплоемкости является классической. Ее результаты приблизительно верны для отдельных температурных интер-

валов, причем каждому интервалу соответствует свое число степеней свободы молекулы.

### Качественная экспериментальная зависимость $C_V$ от температуры

Рассмотрим кривую зависимости молярной теплоемкости  $C_V$  от температуры, полученную опытным путем для водорода (рис. 131).

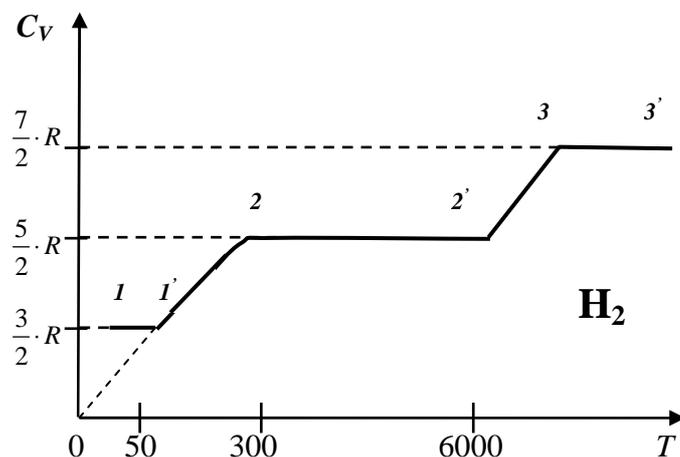


Рис. 131. Зависимость  $C_V(T)$  для водорода

Согласно теории, теплоёмкость не должна зависеть от температуры. Как видно из рисунка, это оказывается справедливым только в пределах отдельных температурных интервалов, причем в различных интервалах теплоемкость имеет значения, соответствующие различному числу степеней свободы молекулы.

Так, на участке 1–1'  $C_V = \frac{3}{2} \cdot R$ . Это означает, что молекула ведет себя как система, обладающая только поступательными степенями свободы.

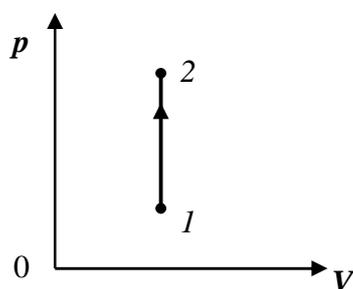
На участке 2–2'  $C_V = \frac{5}{2} \cdot R$ , следовательно, при температурах, соответствующих этому участку, у молекулы, в дополнение к проявляющимся при более низких температурах трём поступательным степеням свободы, добавляются еще две – вращательные. Наконец, при достаточно больших температурах  $C_V = \frac{7}{2} \cdot R$ , что свидетельствует о наличии при этих температурах колебаний молекулы.

В промежутках между указанными интервалами теплоемкость монотонно растет с ростом температуры, то есть соответствует как бы переменному числу степеней свободы. Объяснение такого поведения да-

ется квантовой механикой. Как устанавливает квантовая теория, энергия вращательного и колебательного движения молекул оказывается квантованной. Это означает, что энергия вращения и энергия колебания молекулы могут иметь не любые значения, а только дискретные (то есть отдельные, отличающиеся друг от друга на конечную величину) значения. Следовательно, энергия, связанная с этими видами движения, может меняться только скачками. Что и наблюдается на опыте.

**Применение первого начала термодинамики к изопроцессам**  
**Изохорный процесс**

Процесс, протекающий при  $V = \text{const}$ , называется **изохорным** (рис. 132).



*Рис. 132. К изохорному процессу*

Поскольку при изохорном процессе  $V = \text{const}$ , а  $dV = 0$ , то  $dA = pdV = 0$ , то есть при изохорном процессе газ работу не совершает. Первое начало термодинамики ( $\partial Q = dU + \partial A$ ) запишется в этом случае в виде соотношения

$$\partial Q = dU . \tag{334}$$

Количество теплоты, которое необходимо сообщить системе для того, чтобы при постоянном объеме повысить его температуру на величину  $dT$ , можно выразить, если известна теплоемкость вещества при постоянном объеме  $\partial Q = C_v dT$  и, следовательно (для 1 моля),

$$dU = C_v dT . \tag{335}$$

Для  $\frac{m}{M}$  молей

$$\partial Q = dU = \frac{m}{M} \cdot C_v dT . \tag{336}$$

Принимая, что  $C_V$  – теплоемкость идеального газа не зависит от температуры, для внутренней энергии моля идеального одноатомного газа получим выражение

$$U = \int_{T_1}^{T_2} C_V dT. \quad (337)$$

Для  $\frac{m}{M}$  молей

$$U = Q = \frac{m}{M} \cdot C_V \cdot (T_2 - T_1). \quad (338)$$

Таким образом, при **изохорном изменении состояния газа вся подведенная к системе теплота идет на увеличение внутренней энергии системы.**

При изохорном нагревании тепло поглощается газом ( $Q > 0$ ), и его внутренняя энергия увеличивается. При охлаждении тепло отдается внешним телам ( $Q < 0$ ).

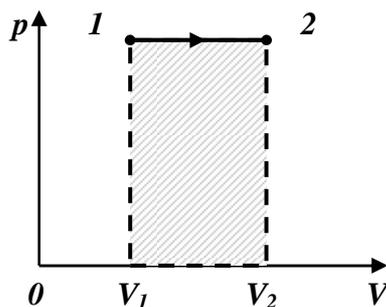
### **Изобарный процесс**

**Изобарный процесс – процесс, происходящий при постоянном давлении  $p = \text{const}$  (рис. 133).**

Работа в этом случае равна

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV = p \int_{V_1}^{V_2} dV = p \cdot (V_2 - V_1). \quad (339)$$

Работа изображается на диаграмме (рис. 133) площадью прямоугольника  $V_1 1 2 V_2$ .



*Рис. 133. К изобарному процессу*

Применим первое начало термодинамики к изобарному процессу

$$\partial Q = dU + \partial A.$$

Из определения молярной теплоемкости следует, что

$$\partial Q = C_p dT.$$

Интегрируя выражение, получим количество теплоты, необходимое для нагревания газа от температуры  $T_1$  до  $T_2$  для одного моля газа

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} C_p dT = C_p \cdot (T_2 - T_1), \quad (340)$$

для  $\frac{m}{M}$  молей газа

$$Q = \frac{m}{M} \cdot C_p \cdot (T_2 - T_1). \quad (341)$$

Таким образом, **при изобарном процессе подводимое к газу тепло частично тратится на увеличение его внутренней энергии и частично на совершение работы.**

При изобарном расширении  $Q > 0$  тепло поглощается газом, и газ совершает положительную работу. При изобарном сжатии  $Q < 0$  тепло отдается внешним телам. В этом случае  $A < 0$ . Температура газа при изобарном сжатии уменьшается,  $T_2 < T_1$ ; внутренняя энергия убывает,  $\Delta U < 0$ .

### **Изотермический процесс**

Процесс, происходящий при постоянной температуре, называется изотермическим процессом (рис. 134).

При  $T = \text{const}$ ,  $U = \text{const}$  (внутренняя энергия не изменяется)

$$dU = 0.$$

Уравнение первого начала термодинамики ( $\partial Q = dU + \partial A$ ) при изотермическом состоянии газа запишется в следующей форме:

$$\partial Q = \partial A. \quad (342)$$

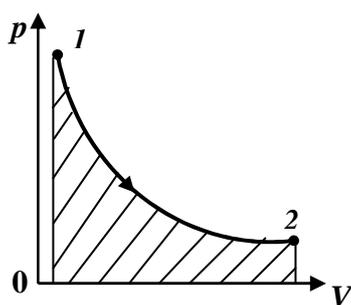


Рис. 134. К изотермическому процессу

Из этого выражения следует, что **при изотермическом процессе все подводимое к системе количество теплоты превращается в работу.** Для подсчета работы, совершенной газом при изотермическом

расширении от объема  $V_1$  до  $V_2$ , необходимо проинтегрировать выражение для элементарной работы

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} p dV .$$

Выразив давление из уравнения Менделеева-Клапейрона для одного моля газа  $p = R \cdot T / V$  и подставив в уравнение для определения работы, получим

$$A_{1-2} = \int_{V_1}^{V_2} R \cdot T \cdot \frac{dV}{V} = R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (343)$$

Работа, совершаемая при расширении  $\frac{m}{M}$  – молей газа, будет в  $\frac{m}{M}$  раз больше, то есть

$$A_{1-2} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} . \quad (344)$$

Графически вычисленная работа (рис. 134) выражается на диаграмме с координатами  $pV$  площадью заштрихованной на графике. Вместо отношения  $\frac{V_2}{V_1}$  можно воспользоваться равным ему обратным отношением давлений исходя из закона Бойля-Мариотта, тогда

$$A_{1-2} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} . \quad (345)$$

Согласно (342) при  $T = \text{const}$   $Q = A$ , следовательно,

$$Q = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2} . \quad (346)$$

Количество теплоты  $Q$ , полученной газом в процессе изотермического расширения, превращается в работу над внешними телами. При изотермическом сжатии работа внешних сил, произведенная над газом, превращается в тепло, которое передается окружающим телам.

### **Адиабатический (адиабатный) процесс**

**Процесс, происходящий без теплообмена с окружающей средой, называется адиабатическим**, то есть в этом случае  $\partial Q = 0$ . Условие  $\partial Q = 0$  (полная теплоизоляция) на практике неосуществимо. Это условие выполняется приближённо для быстро протекающих процессов. Например, сжатие и расширение воздуха в звуковой волне, расширение

ние и сжатие горючей смеси в цилиндрах двигателей внутреннего сгорания.

Уравнение первого начала термодинамики ( $\partial Q = dU + \partial A$ ) при учете, что  $\partial Q = 0$  принимает вид

$$dU + \partial A = 0,$$

или

$$\partial A = -dU. \quad (347)$$

То есть при адиабатическом процессе работа совершается только за счёт внутренней энергии газа.

При адиабатическом расширении газ совершает работу, а его внутренняя энергия и, следовательно, температура падают. При адиабатическом сжатии работа газа отрицательна (внешняя среда производит работу над газом), внутренняя энергия и температура газа возрастают.

Теплоемкость при адиабатическом процессе

$$C = \frac{\partial Q}{dT} = 0.$$

Выведем уравнение кривой, изображающей адиабатический процесс на  $pV$ -диаграмме. При бесконечно малом изменении состояния газа совершается работа

$$dA = pdV$$

и изменение внутренней энергии

$$dU = C_V dT.$$

Подставив эти значения в уравнение первого начала термодинамики, получим:

$$C_V dT + pdV = 0. \quad (348)$$

Это и есть уравнение адиабаты в дифференциальной форме. Уравнение содержит все три параметра:  $p, V, T$ . Для упрощения его воспользуемся уравнением состояния для одного моля газа

$$p \cdot V = R \cdot T.$$

Дифференцируя его, получим:

$$pdV + Vdp = RdT. \quad (349)$$

Составим систему двух уравнений

$$\begin{cases} C_V dT + pdV = 0 \\ pdV + Vdp = RdT \end{cases} \quad (350)$$

Умножим первое на  $R$ , второе на  $C_V$  и сложим их, получим

$$R \cdot C_V dT + p \cdot RdV + p \cdot C_V dV + V \cdot C_V dR = C_V RdT.$$

Преобразуя выражение, получим:

$$(C_V + R) \cdot pdV + C_V Vdp = 0.$$

Разделим уравнение на  $C_V \cdot p \cdot V$

$$\frac{(C_V + R) \cdot p dV}{C_V \cdot p \cdot V} + \frac{C_V \cdot V dp}{C_V \cdot p \cdot V} = 0,$$

учтём, что  $C_V + R = C_p$ , то есть молярной теплоёмкости при постоянном давлении

$$\frac{C_p}{C_V} \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (351)$$

Запишем вместо  $\frac{C_p}{C_V}$  коэффициент Пуассона  $\gamma$

$$\gamma \cdot \frac{dV}{V} + \frac{dp}{p} = 0. \quad (352)$$

Левая часть соотношения есть производная от  $(\gamma \ln V + \ln p)$ , поэтому

$$d[\gamma \ln V + \ln p] = 0. \quad (353)$$

Отсюда следует, что величина, стоящая в скобках, должна быть постоянной

$$\gamma \ln V + \ln p = \ln const.$$

Учитывая, что  $\gamma \cdot \ln V = \ln V^\gamma$  и потенцируя выражение  $(\ln V^\gamma + \ln p = \ln const)$ , получим:

$$p \cdot V^\gamma = const. \quad (354)$$

Это выражение называется уравнением Пуассона или уравнением адиабаты. Его можно записать в ином виде, учитывая, что  $p \cdot V = R \cdot T$ ,

$p = \frac{R \cdot T}{V}$ , то есть

$$\frac{R \cdot T}{V} \cdot V^\gamma = const,$$

или

$$T \cdot V^{\gamma-1} = const \quad (355)$$

Работа газа в адиабатном процессе

$$A = \frac{m}{M} \cdot C_V \cdot (T_1 - T_2). \quad (356)$$

Если газ адиабатно расширяется от объёма  $V_1$  до  $V_2$ , то его температура уменьшается от  $T_1$  до  $T_2$ .

$$A = \frac{p_1 \cdot V_1}{\gamma - 1} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right] = \frac{R \cdot T_1}{\gamma - 1} \cdot \frac{m}{M} \cdot \left[ 1 - \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (357)$$

Для перехода к переменным  $p, V$  в формуле (356) следует применить уравнение Клапейрона-Менделеева  $p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$ , исключить

температуру  $p_1 \cdot V_1 = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1$ .

Работа, совершаемая газом при адиабатном расширении, меньше чем при изотермическом расширении. При адиабатном расширении происходит охлаждение газа, тогда как при изотермическом расширении температура поддерживается постоянной за счёт притока извне эквивалентного количества теплоты.

Работа, совершённая газом при адиабатном расширении, определяется заштрихованной площадью на рис. 135.

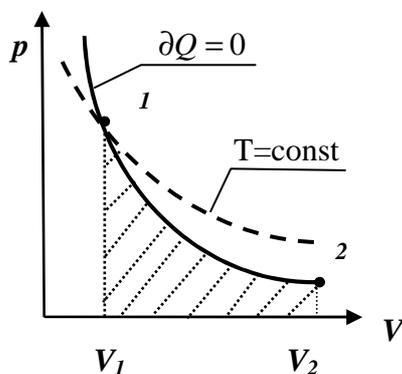


Рис.135. К определению работы при адиабатном процессе

### Политропный процесс

**Политропный процесс** – процесс, в котором теплоёмкость остаётся постоянной

$$C = const. \quad (358)$$

Уравнение политропного процесса

$$p \cdot V^n = const, \quad (359)$$

где  $n$  – показатель политропы;  $1 < n < \gamma$ .

Политропа – график зависимости между параметрами состояния при  $C = const$  (рис. 136).

В координатах  $p, V$  – гипербола (определяется уравнением  $p \cdot V^n = const$ ); занимает промежуточное положение между изотермой и адиабатой.

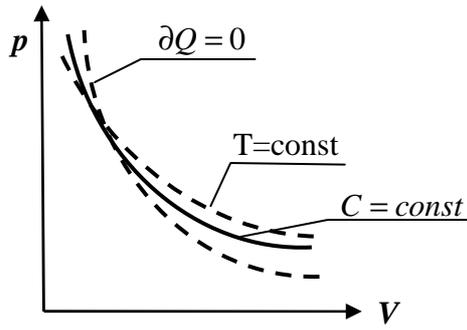


Рис.136. Политропа

Работа для политропного процесса

$$A = \frac{m}{M} \cdot \frac{R}{n-1} \cdot (T_1 - T_2). \quad (360)$$

Ниже (таблица 10) приведены частные случаи политропного процесса.

Таблица 10

Частные случаи политропного процесса

$C = 0$	$n = \gamma$	$p \cdot V^\gamma = const$	Уравнение адиабаты
$C = \infty$	$n = 1$	$p \cdot V = const$	Уравнение изотермы
$C = C_p$	$n = 0$	$p = const$	Уравнение изобары
$C = C_v$	$n = \pm\infty$	$V = const$	Уравнение изохоры

Обобщим сказанное выше в таблицах (таблицы 11–12).

Таблица 11

Сравнение различных газовых процессов

Название процесса	Изотермический	Изохорный	Изобарный	Адиабатный	Политропный
Условие процесса	$T = const$	$V = const$	$p = const$	$\delta Q = 0$	$C = const$
$p, V$ -диаграмма					

Сравнение различных газовых процессов

Название процесса	Закон	Первое начало термодинамики применительно к процессу	Изменение внутренней энергии	Работа А
Изотермический	$p \cdot V = const$	$\partial Q = \partial A$	0	$\frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$
Изохорный	$\frac{p}{T} = const$	$\partial Q = dU$	$\frac{m}{M} \cdot C_v dT$	0
Изобарный	$\frac{V}{T} = const$	$\partial Q = dU + \partial A$	$\frac{m}{M} \cdot C_v dT$	$p \cdot (V_2 - V_1) =$ $= \frac{m}{M} \cdot R \cdot (T_2 - T_1)$
Адиабатный	$p \cdot V^\gamma = const$ $T \cdot V^{\gamma-1} = const$ $T^\gamma \cdot p^{1-\gamma} = const$	$\partial Q = -dU$	$\frac{m}{M} \cdot C_v dT$	$\frac{m}{M} \cdot C_v \cdot (T_1 - T_2)$
Политропный	$p \cdot V^n = const$ $T \cdot V^{n-1} = const$ $T^n \cdot p^{1-n} = const$	$\partial Q = dU + \partial A$	$\frac{m}{M} \cdot C_v dT$	$\frac{m}{M} \cdot \frac{R}{n-1} \cdot (T_1 - T_2)$

**Круговой процесс и его термический КПД.  
Обратимые и необратимые процессы**

В термодинамических рассуждениях большое значение имеет рассмотрение различных круговых процессов. **Круговым процессом и циклом** называется такая последовательность превращений, в результате которой система, выйдя из какого-либо исходного состояния, вновь в него возвращается. На диаграмме состояния круговой процесс изображается замкнутой кривой (рис. 137).

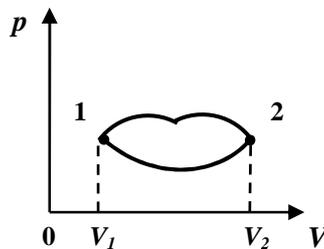


Рис. 137. Круговой процесс

Цикл (рис. 138), за который совершается положительная работа  $A = \oint pdV > 0$  (цикл протекает по часовой стрелке). Работа расширения (процесс  $1a2$ ), определяемая площадью фигуры  $1a2V_2V_11$ , положительна ( $dV > 0$ ).

Работа сжатия (процесс  $2b1$ ), определяемая площадью фигуры  $2b1V_1V_22$ , отрицательна ( $dV < 0$ ).

Работа совершаемая за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

**Прямой цикл** используется в тепловых двигателях – периодически действующих двигателях, совершающих работу за счёт полученной извне теплоты.

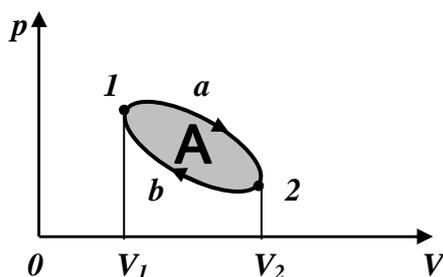


Рис. 138. Прямой цикл

Обратный цикл – цикл, за который совершается отрицательная работа  $A = \oint pdV < 0$  (цикл протекает против часовой стрелки). Работа расширения (процесс  $1a2$ ), определяемая площадью фигуры  $1a2V_2V_11$ , положительна ( $dV > 0$ ). Работа сжатия (процесс  $2b1$ ) определяется площадью фигуры  $2b1V_1V_22$  отрицательна ( $dV < 0$ ). Работа (рис. 139) совершаемая за цикл, определяется площадью, охватываемой замкнутой кривой.

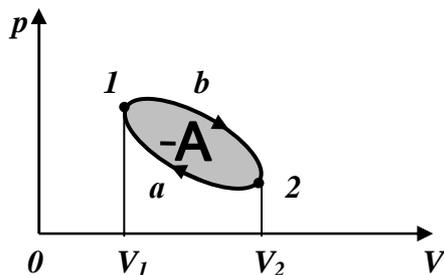


Рис. 139. Обратный цикл

**Обратный цикл** используется в холодильных машинах – периодически действующих установках, в которых за счёт работы внешних сил теплота переносится к телам с более высокой температурой.

В результате кругового процесса система возвращается в исходное состояние, то есть изменение внутренней энергии газа равно нулю. Согласно первому началу термодинамики  $Q = \Delta U + A = A$ , то есть работа, совершаемая за цикл, равна количеству полученной извне теплоты  $Q = Q_1 - Q_2$ . Коэффициент полезного действия (КПД) для кругового процесса

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (361)$$

Различают **обратимые и необратимые круговые процессы**. **Процесс называется обратимым, если система возвращается в исходное состояние, не вызывая изменения в окружающих телах.** Чисто механические процессы всегда обратимы. Например, шар, поднятый над землей на высоту  $h$ , обладает запасом потенциальной энергии  $m \cdot g \cdot h$ . Свободно падая, шар в конце движения приобретает скорость  $v$ , которая может быть найдена из закона сохранения энергии  $m \cdot g \cdot h = \frac{m \cdot v^2}{2}$ .

Ударившись о преграду (удар абсолютно упругий), шар изменит свою скорость на обратную и начнет подниматься. При возвращении шара в исходное положение его потенциальная энергия примет первоначальное значение  $m \cdot g \cdot h$  и, следовательно, во всей системе не произойдет никаких изменений, кроме изменений знака скорости. Процесс обратимый.

При наличии теплового движения наблюдаются, как правило, процессы **необратимые (процессы, не удовлетворяющие условию обратимости процесса)**. Пуля в результате трения о воздух теряет свою скорость. Происходит превращение механической энергии в тепловую (пуля и воздух нагреваются). Известно, что повернуть этот процесс так, чтобы рассеянное тепло превратилось опять в энергию механического движения невозможно, то есть процесс необратим.

Обратимые процессы – это идеализация реальных процессов. Их рассмотрение существенно по двум причинам:

- 1) многие процессы в природе и технике практически обратимы;
- 2) обратимые процессы являются наиболее экономичными; имеют максимальный термический коэффициент полезного действия, что позволяет указать пути повышения КПД реальных тепловых двигателей.

### **Тепловые двигатели и холодильные машины**

Как следует из первого закона термодинамики, полученное газом количество теплоты  $Q$  полностью превращается в работу  $A$  при изотер-

мическом процессе, при котором внутренняя энергия остается неизменной ( $\Delta U = 0$ ):  $A = Q$ .

Но такой однократный акт преобразования теплоты в работу не представляет интереса для техники. Реально существующие тепловые двигатели (паровые машины, двигатели внутреннего сгорания и т. д.) работают циклически. Процесс теплопередачи и преобразования полученного количества теплоты в работу периодически повторяется. Для этого рабочее тело должно совершать круговой процесс или термодинамический цикл, при котором периодически восстанавливается исходное состояние.

Общее свойство всех круговых процессов состоит в том, что их невозможно провести, приводя рабочее тело в тепловой контакт только с одним тепловым резервуаром. Их нужно, по крайней мере, два (нагреватель и холодильник).

**Тепловой двигатель** – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счёт полученной извне теплоты. От термостата (системы, которая может обмениваться теплотой с телами без изменения температуры) с более высокой температурой  $T_1$ , называемого нагревателем, за цикл отнимается количество теплоты  $Q_1$ , а термостату с более низкой температурой  $T_2$ , называемому холодильником, за цикл передаётся количество теплоты  $Q_2$ , при этом совершается работа  $A = Q_1 - Q_2$  (рис. 140).

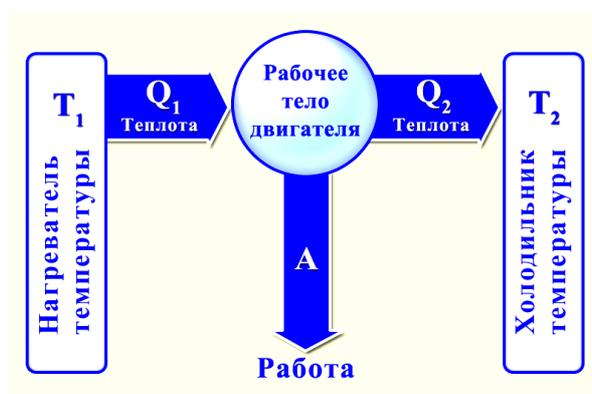


Рис. 140. Принцип работы теплового двигателя

КПД теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}. \quad (362)$$

Чтобы  $\eta = 1$ , необходимо  $Q_2 = 0$  (тепловой двигатель должен иметь один источник теплоты). Сади Карно показал, что для работы теплового

двигателя необходимо не менее двух источников теплоты с различными температурами.

**Теорема Карно:** из всех периодически действующих тепловых машин, имеющих одинаковые температуры нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), наибольшим КПД обладают обратимые машины. При этом КПД обратимых машин, работающих при одинаковых температурах нагревателей ( $T_1$ ) и холодильников ( $T_2$ ), равны друг другу и не зависят от природы рабочего тела, а определяются только температурами нагревателя и холодильника.

**Холодильная машина** – периодически действующая установка, в которой за счёт работы внешних сил теплота переносится к телу с более высокой температурой.

Системой за цикл от термостата с более низкой температурой  $T_2$  отнимается количество теплоты  $Q_2$  и отдаётся термостату с более высокой температурой  $T_1$  количество теплоты  $Q_1$ .

Для кругового процесса  $Q = A$ , но по условию  $Q = Q_2 - Q_1 < 0$ , поэтому  $A < 0$  и  $Q_2 - Q_1 = -A$  или  $Q_1 = Q_2 + A$ , то есть количество теплоты  $Q_1$ , отданное системой источнику теплоты при более высокой температуре  $T_1$ , больше количества теплоты  $Q_2$ , полученного от источника теплоты при более низкой температуре  $T_2$  на величину работы, совершённой над системой.

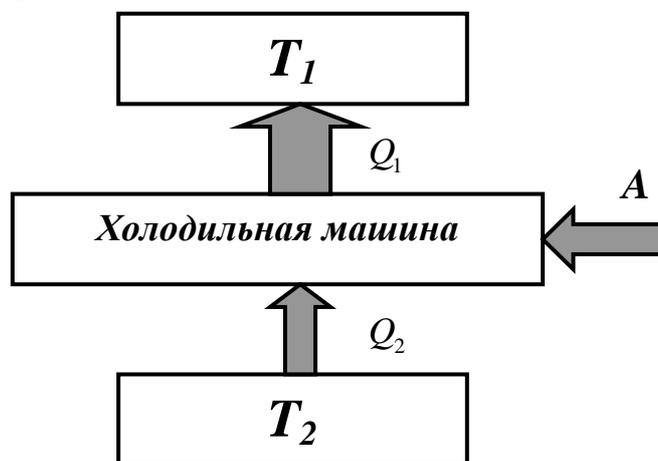


Рис. 141. Принцип работы холодильной машины

Без совершения работы нельзя отбирать теплоту от менее нагретого тела и отдавать её более нагретому телу (утверждение второго начала термодинамики).

Холодильный коэффициент

$$\eta' = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2}. \quad (363)$$

Холодильный коэффициент характеризует эффективность холодильной машины и определяется как отношение отнятой от термостата с более низкой температурой количества теплоты  $Q_2$  к работе, которая затрачивается на приведение холодильной машины в действие.

### Цикл Карно

С практической точки зрения интересны циклические процессы, сопровождающиеся превращением теплоты в работу. В двигателях, применяемых в технике, используются различные круговые процессы. На рис. 142 изображены циклы, используемые в бензиновом карбюраторном и в дизельном двигателе. В обоих случаях рабочим телом является смесь паров бензина или дизельного топлива с воздухом. Цикл карбюраторного двигателя внутреннего сгорания состоит из двух изохор (1–2, 3–4) и двух адиабат (2–3, 4–1). Дизельный двигатель внутреннего сгорания работает по циклу, состоящему из двух адиабат (1–2, 3–4), одной изобары (2–3) и одной изохоры (4–1). Реальный коэффициент полезного действия у карбюраторного двигателя порядка 30 %, у дизельного двигателя – порядка 40 %.

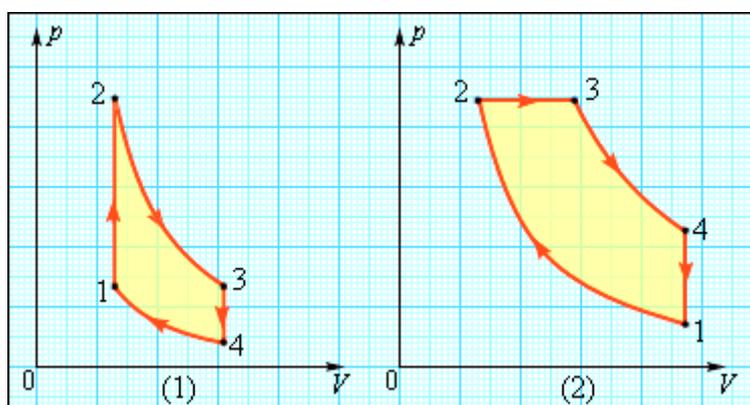


Рис. 142. Циклы карбюраторного двигателя внутреннего сгорания (1) и дизельного двигателя (2)

Наиболее совершенным в отношении коэффициента полезного действия является циклический процесс, рассмотренный впервые французским инженером Сади Карно (1824 г.) и носящий его имя.

Цикл Карно совершает газ, находящийся в цилиндре под поршнем. Цикл Карно состоит из двух изотерм (1–2) и (3–4) и двух адиабат (2–3) и (4–1) (рис. 143).

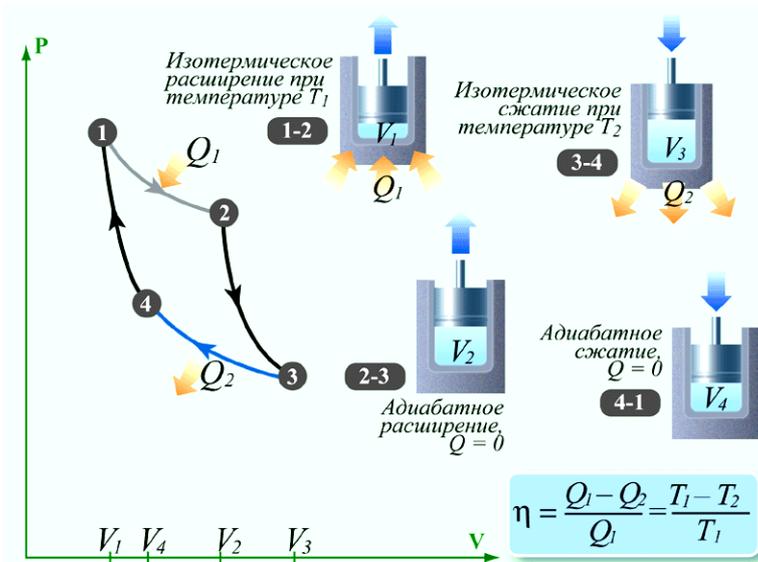


Рис. 143. Цикл Карно

Работа при изотермическом расширении 1–2 ( $T = \text{const}$ ;  $V_2 > V_1$ )

$$A_{12} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = Q_1. \quad (364)$$

Работа при адиабатном расширении 2-3 ( $\partial Q = 0$ ;  $T_2 < T_1$ )

$$A_{23} = -\frac{m}{M} \cdot C_V (T_2 - T_1). \quad (365)$$

Работа при изотермическом сжатии 3-4 ( $T = \text{const}$ ;  $V_4 < V_3$ )

$$A_{34} = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_4}{V_3} = -Q_2. \quad (366)$$

Работа при адиабатном сжатии 4-1 ( $\partial Q = 0$ ;  $T_1 > T_2$ )

$$A_{41} = -\frac{m}{M} \cdot C_V (T_2 - T_1) = -A_{23}. \quad (367)$$

Работа за цикл определяется площадью, ограниченной изотермами и адиабатами цикла Карно. Работа за цикл

$$A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41} = Q_1 + A_{23} - Q_2 - A_{23} = Q_1 - Q_2. \quad (368)$$

Цикл Карно замечателен тем, что на всех его участках отсутствует соприкосновение тел с различными температурами. Любое состояние рабочего тела (газа) на цикле является квазиравновесным, т. е. бесконечно близким к состоянию теплового равновесия с окружающими телами (тепловыми резервуарами или термостатами). Цикл Карно исключает теплообмен при конечной разности температур рабочего тела и окружающей среды (термостатов), когда тепло может передаваться без совершения работы. Поэтому цикл Карно – наиболее эффективный

круговой процесс из всех возможных при заданных температурах нагревателя и холодильника

$$\eta_{\text{Карно}} = \eta_{\text{max}} \quad (369)$$

Любой участок цикла Карно и весь цикл в целом может быть пройден в обоих направлениях. Обход цикла по часовой стрелке соответствует тепловому двигателю, когда полученное рабочим телом тепло частично превращается в полезную работу. Обход против часовой стрелки соответствует холодильной машине, когда некоторое количество теплоты отбирается от холодного резервуара и передается горячему резервуару за счет совершения внешней работы. Поэтому идеальное устройство, работающее по циклу Карно, называют обратимой тепловой машиной.

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}, \quad (370)$$

то есть определяется только температурами нагревателя ( $T_1$ ) и холодильника ( $T_2$ ).

Действительно запишем уравнение адиабатного процесса в виде  $T \cdot V^{\gamma-1} = \text{const}$  и используем рис. 143. Тогда можно записать

$$T_1 \cdot V_2^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_3^{\gamma-1}; \quad T_1 \cdot V_1^{\gamma-1} = T_2 \cdot V_4^{\gamma-1} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}.$$

Подставив эти выражения в формулу для термического КПД кругового процесса, получим:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} - \frac{m}{M} \cdot R \cdot T_2 \cdot \ln \frac{V_3}{V_4}}{\frac{m}{M} \cdot R \cdot T_1 \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Из выражения для  $\eta$  получаем  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$ , то есть для сравнения температур  $T_1$  и  $T_2$  двух тел необходимо осуществить обратимый цикл Карно, в котором одно тело используется в качестве нагревателя, другое – холодильника. Из равенства  $\frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$  видно, что отношение температур тел равно отношению отданного в этом цикле количества теплоты к полученному. Согласно теореме Карно, химический состав рабочего тела не влияет на результаты сравнения температур, поэтому такая тер-

модинамическая шкала не связана со свойствами какого-то определённого термодинамического тела.

### **Второе начало термодинамики**

Второе начало термодинамики, как и первое, может быть сформулировано несколькими способами. Во-первых, второе начало термодинамики гласит, что **невозможен самопроизвольный переход тепла от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому**. Более строго можно сформулировать: **невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых был бы переход тепла от тела, менее нагретого, к телу, более нагретому** (формулировка по Клаузиусу).

Второе начало термодинамики не запрещает вообще переход тепла от тела менее нагретого, к телу, более нагретому. Мы рассмотрели такой переход, рассматривая принцип работы холодильной машины. Однако этот переход не был бы единственным результатом процесса. Переход сопровождался изменениями в окружающих телах, связанными с совершением над системой работы.

Второе начало термодинамики может быть также сформулировано следующим образом: **невозможны такие процессы, единственным конечным результатом которых явилось бы отнятие от некоторого тела определенного количества теплоты и превращение этого тепла полностью в работу** (формулировка по Кельвину).

В тепловой машине превращение тепла в работу обязательно сопровождается дополнительным процессом – передачей некоторого количества тепла  $Q_2$  более холодному телу, вследствие чего полученное от более нагретого тела количество тепла  $Q_1$  не может быть полностью превращено в работу, то есть, невозможен тепловой двигатель, который обладал бы коэффициентом полезного действия равным единице.

Двигатель такого рода получил название вечного двигателя второго рода. Вечный двигатель второго рода – периодически действующий двигатель, совершающий работу за счёт одного источника теплоты. Таким образом, *второе начало термодинамики может быть сформулировано также в виде принципа невозможности построения вечного двигателя второго рода.*

### **Приведенное количество теплоты. Неравенство Клаузиуса**

Коэффициент полезного действия для любой тепловой машины

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

где  $Q_1$  – количество теплоты, отданное нагревателем;  $Q_2$  – отданное холодильнику.

Коэффициент полезного действия обратимой тепловой машины (цикл Карно)

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где  $T_1$  – температура нагревателя;  $T_2$  – температура холодильника.

В случае обратимого процесса между этими величинами должен стоять знак равенства

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (371)$$

В случае необратимого процесса

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (372)$$

Соотношения (371) и (372) можно объединить и записать в виде

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

или

$$\frac{Q_2}{Q_1} \geq \frac{T_2}{T_1}.$$

Умножив полученное выражение на положительную величину  $\frac{Q_1}{T_2}$ ,

получим:

$$\frac{Q_2}{T_2} \geq \frac{Q_1}{T_1}.$$

Вычитая из левой и правой части  $\frac{Q_2}{T_2}$ , имеем:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (373)$$

В соотношение (373) входит как тепло, полученное системой  $Q_1$ , так и тепло, отдаваемое ею  $Q_2$ . Вместо отдаваемого телу тепла  $Q_2$  введем полученное от этого тела тепло, равное  $Q_2$ . Тогда выражение (373) запишется в виде

$$\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (374)$$

Это соотношение носит название неравенства Клаузиуса.

**Отношение количества тепла, полученного системой от какого-либо тела, к температуре этого тела называется приведенным количеством тепла.** Используя эту терминологию Клаузиуса, выражение (374) может быть сформулировано следующим образом: **при обратимом цикле Карно сумма приведенных количеств тепла равно нулю, при необратимом цикле – меньше нуля.**

Неравенство Клаузиуса может быть обобщено на любой круговой процесс. Любой круговой процесс может быть разбит на весьма большое число элементарных циклов Карно. Каждый из этих элементарных циклов Карно протекает между нагревателем соответствующей температуры  $T_i$ , от которого он получает количество тепла  $\Delta Q_i$ , и холодильником соответствующей температуры  $T_k$ , которому он отдает количество тепла  $\Delta Q_k$ . Для этого элементарного цикла напомним неравенство Клаузиуса

$$\frac{Q_i}{T_i} + \frac{Q_k}{T_k} \leq 0. \quad (375)$$

Суммируя выражение (375), написанное для каждого из элементарных циклов, получим для всего цикла

$$\sum \frac{\Delta Q}{T} \leq 0. \quad (376)$$

То есть для **всякого кругового процесса сумма приведенных количеств тепла не может быть больше нуля.** В случае обратимого протекания процесса можно показать, что сумма (376) преобразуется в контурный интеграл

$$\oint \frac{dQ}{T} = 0, \quad (377)$$

где интеграл берется по всему циклу.

### **Энтропия. Свойства энтропии. Закон возрастания энтропии в замкнутых системах**

Возьмем какой-либо обратимый цикл (рис.144) и выделим в нем два произвольных состояния (1) и (2). Эти состояния делят цикл на две ветви, которые обозначены на рис.144 I и II. Сумма приведенных количеств тепла, взятая по всему циклу, равна нулю

$$\sum \frac{\Delta Q}{T} = 0.$$

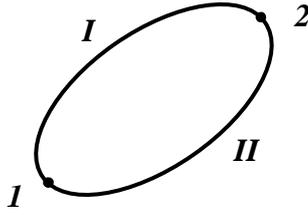


Рис.144. Обратимый цикл

Для рассматриваемого цикла

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta Q}{T} = 0. \quad (378)$$

(I)                      (II)

Если изменить направление перехода, то в силу обратимости процесса, каждое слагаемое суммы должно изменить знак. Так, если при направлении процесса от состояния (1) к состоянию (2) система получает от какого-то тела с температурой  $T$  количество тепла  $\Delta Q$ , то при направлении процесса (2–1) на том же участке система должна отдавать этому же телу с температурой  $T$  такое же количество  $\Delta Q$ , то есть получить  $\Delta Q$ .

Таким образом,

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} = - \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta Q}{T}. \quad (379)$$

(обр)                      (обр)

Исходя из неравенств (378) и (379), можно получить следующее соотношение:

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} - \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} = 0. \quad (380)$$

(I)                      (II)

Отсюда следует, что

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T}, \quad (381)$$

(I)                      (II)

**то есть сумма приведенных количеств тепла, полученных системой при обратимом переходе от одного состояния (начальное) в другое (конечное), не зависит от пути, по которому совершается переход и, следовательно, зависит только от начального и конечного состояний. Величины, изменения которых при переходе из одного состояния в другие не зависят от пути перехода, называются функциями со-**

**стояния.** Независимость суммы  $\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T}$  от пути, по которому совершается обратимый переход из состояния (1) в состояние (2) дает основание утверждать, что при обратимом процессе  $\frac{\Delta Q}{T}$  представляет собой **приращение некоторой функции состояния.** Эта функция была названа **энтропией** и обозначается буквой  $S$ .

Таким образом,

$$\left( \frac{\Delta Q}{T} \right)_{обр} = \Delta S. \quad (382)$$

Согласно этому равенству, приращение энтропии равно элементарному количеству тепла, получаемому обратимо системой извне, отнесенному к температуре, при которой это тепло получается. Поскольку энтропия – функция состояния, **сумма приращений энтропии должна быть равна разности значений энтропии в конечном и начальном состояниях**

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} = \sum_{1 \rightarrow 2} \Delta S = S_2 - S_1. \quad (383)$$

(обр)

Более того, суммы должны быть заменены интегралом

$$\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 dS = S_2 - S_1. \quad (384)$$

**Итак, при обратимом процессе сумма приведенных количеств тепла равна приращению энтропии.**

Выясним, в каком соотношении находятся сумма приведенных количеств тепла и приращение энтропии при необратимом процессе.

Для этого рассмотрим цикл, состоящий из обратимой и необратимой ветвей (рис.146).

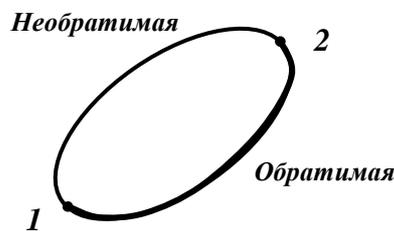


Рис.145. Круговой цикл

Поскольку в целом цикл необратим, сумма приведенных количеств тепла, взятая по всему циклу, должна быть меньше нуля

$$\sum_o \frac{\Delta Q}{T} < 0. \quad (385)$$

Разобьем эту сумму на две части, отнесенные к разным ветвям

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} + \sum_{2 \rightarrow 1} \frac{\Delta Q}{T} < 0. \quad (386)$$

(необ)                      (обр)

Вторая из этих сумм равна разности энтропий в состояниях 1 и 2 (383). Поэтому соотношение (386) можно записать в виде

$$\sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T} + (S_1 - S_2) < 0, \quad (387)$$

(необ)

или

$$(S_2 - S_1) > \sum_{1 \rightarrow 2} \frac{\Delta Q}{T}. \quad (388)$$

(необ)

Объединяя вместе (383) и (388), получим:

$$(S_2 - S_1) \geq \sum \frac{\Delta Q}{T}, \quad (389)$$

то есть приращение энтропии больше или равно сумме приведенных количеств тепла.

Знак равенства соответствует любому обратимому переходу 1→2. Знак неравенства – любому необратимому переходу из состояния (1) в состояние (2). Температура  $T$  означает температуру того тела, от которого система получает тепло  $\Delta Q$ .

При обратимом процессе эта температура совпадает с температурой системы. Если система изолирована, то есть не обменивается теплом, то все  $\Delta Q$  будут равны нулю, вследствие чего

$$S_2 - S_1 \geq 0 \quad (390)$$

или, соответственно,

$$\Delta S \geq 0. \quad (391)$$

Таким образом, энтропия изолированной системы может только возрасть (если в системе протекает необратимый процесс), либо оставаться постоянной (если в системе протекает обратимый процесс). Убывать энтропия изолированной системы не может.

Если система обменивается теплом с внешней средой, ее энтропия может вести себя любым образом. В частности, если система отдает тепло внешним телам, энтропия системы уменьшается. Если неизолиро-

ванная система совершает цикл, то её энтропия, возрастая на одних участках цикла и убывая на других, в конце цикла принимает первоначальное значение.

Энтропия – аддитивная величина. Это означает, что энтропия системы равна сумме энтропий отдельных ее частей.

### **Изменение энтропии**

Изменение энтропии системы при её равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\partial Q}{T} = \int_1^2 \frac{\partial U + \partial A}{T}. \quad (392)$$

Физический смысл имеет не сама энтропия, а разность энтропий (важны только изменения состояний).

$$dU = \frac{m}{M} \cdot C_v dT, \quad \partial A = p dV = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \cdot \frac{dV}{V}.$$

$$\Delta S_{1 \rightarrow 2} = S_2 - S_1 = \frac{m}{M} \cdot C_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} \cdot R \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} \cdot \left( C_v \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right). \quad (393)$$

Изменение энтропии  $\Delta S_{1 \rightarrow 2}$  идеального газа при переходе его из состояния 1 в состояние 2 не зависит от вида процесса перехода  $1 \rightarrow 2$ .

**Изоэнтропийный процесс ( $S = const$ )** – это адиабатный обратимый процесс, для которого  $\partial Q = 0$ , поэтому  $\Delta S = 0$  и, следовательно,  $S = const$ , то есть адиабатный обратимый процесс протекает при постоянной энтропии.

**Изменение энтропии в изотермическом процессе ( $T_1 = T_2$ )**

$$\Delta S = \frac{m}{M} \cdot R \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (394)$$

**в изохорном процессе ( $V_1 = V_2$ )**

$$\Delta S = \frac{m}{M} \cdot R \ln \frac{T_2}{T_1}. \quad (395)$$

**Энтропия системы равна сумме энтропий тел, входящих в систему.** Свойством аддитивности обладают также внутренняя энергия, масса, объём (температура и давление таким свойством не обладают).

### **Статистический смысл второго начала термодинамики. Связь энтропии с термодинамической вероятностью**

Термодинамической вероятностью  $W$  какого-либо состояния называют число микросостояний, с помощью которых может быть

**осуществлено данное макросостояние.** Термодинамическая вероятность макросостояния, при котором в 1-ой ячейке оказывается  $N_1$ -частиц, во 2-ой –  $N_2$ -частиц, равна

$$W = \frac{N_1!}{N_1!N_2!\dots N_n!}. \quad (396)$$

Пусть в некотором сосуде имеется шесть молекул. Разделим мысленно сосуд на две равные половины и рассмотрим три состояния газа (рис. 146).

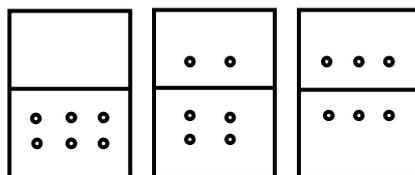


Рис. 146. Три состояния газа

Первое состояние соответствует случаю, когда все шесть молекул находятся в одной половине, а вторая свободна от молекул.

Второе состояние – когда в одной половине четыре молекулы, во второй половине – две.

Третье состояние, при котором в каждой половине сосуда присутствуют по три молекулы.

Первое состояние можно осуществить единственным способом. Термодинамическая вероятность первого состояния равна

$$W = \frac{6!}{6!0!} = 1.$$

Второе состояние можно осуществить уже несколькими способами. Термодинамическая вероятность равна ( $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 6 = 4! \cdot 5 \cdot 6$ )

$$W = \frac{6!}{4!2!} = \frac{4! \cdot 5 \cdot 6}{4! \cdot 1 \cdot 2} = 15.$$

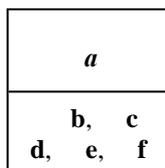
Третье состояние имеет термодинамическую вероятность

$$W = \frac{6!}{3!3!} = 20.$$

Каждое термодинамическое состояние можно рассматривать как с макроскопической, так и с микроскопической точек зрения. С макроскопической точки зрения не имеет значения, какие именно молекулы находятся в одной половине сосуда и какие в другой, важно только их количество. С микроскопической точки зрения замена в одной из половин сосуда на молекулу из другой половины сосуда приводит уже к новому состоянию.

Таким образом, данное макроскопическое состояние системы может осуществляться различным количеством микроскопических состояний. Рассмотрим состояние, когда одна молекула находится в одной половине сосуда, а пять молекул – в другой.

Такое состояние можно осуществить уже несколькими способами. Действительно, предположим, что для того, чтобы осуществить это состояние, в одну из половин сосуда была помещена молекула *a*, а остальные пять – в другую половину (рис. 147).

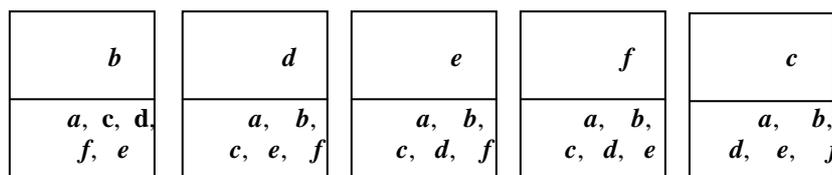


*Рис. 147. Молекулы газа*

С макроскопической точки зрения это состояние будет неразличимо от тех состояний, при которых вместо молекулы *a* в одной половине сосуда находятся молекулы *b, c, d, e* или *f* (рис. 148).

С микроскопической точки зрения все эти состояния различны. Таким образом, в этом случае одно и то же макроскопическое состояние может быть осуществлено с помощью шести различных с микроскопической точки зрения состояний, то есть одному макросостоянию соответствует шесть микросостояний. Это число микросостояний можно определить, если подсчитать число сочетаний из 6 по 1, которое, как нам известно из математики, определяется так:

$$W = \frac{6!}{5!1!} = 6.$$



*Рис. 148. Возможные микросостояния*

Из рассмотренных нами состояний наиболее вероятным является состояние, при котором в каждой половине сосуда находятся по три молекулы, то есть для газа, на который не действуют внешние силы, наиболее вероятным является равномерное распределение молекул по всему объему.

Представление о термодинамической вероятности состояний позволяет понять особенности второго начала термодинамики. Как показал Больцман, термодинамическая вероятность определяет физическую величину, называемую энтропией.

Энтропия связана с термодинамической вероятностью соотношением

$$S = k \cdot \ln W, \quad (397)$$

где  $k$  – постоянная Больцмана.

Таким образом, можно дать следующее определение. **Энтропия – скалярная физическая величина, характеризующая макросостояние термодинамической системы и численно равная постоянной Больцмана, умноженной на  $\ln$  термодинамической вероятности этого состояния.** Согласно уравнению  $S = k \cdot \ln W$ , возрастание энтропии означает возрастание вероятности данного состояния системы

$$\Delta S \geq 0, \quad k \cdot \ln W \geq 0, \quad (398)$$

то есть возрастание энтропии в данном случае означает, что **самопроизвольно изолированная система может переходить только от состояний, менее вероятных, к состояниям, более вероятным.**

Очевидно, что **изолированная термодинамическая система, энтропия которой достигла максимально возможной величины при данных значениях параметров состояния будет находиться в состоянии устойчивого равновесия.** Утверждение, что **самопроизвольно изолированная система может переходить только от состояний, менее вероятных, к состояниям, более вероятным, есть иная формулировка второго начала термодинамики, раскрывающая его статистический смысл.** В общем виде неравенство  $\Delta S \geq 0$  было доказано Больцманом. Вывод Больцмана основан на применении методов статистической физики и теории вероятностей, поэтому и окончательный результат носит вероятностный характер. **Неравенство  $\Delta S \geq 0$  строго следует формулировать: наиболее вероятным изменением энтропии системы является ее возрастание.**

Однако увеличение энтропии – это наиболее вероятный, но не обязательный путь развития системы. Или можно сказать так, что самопроизвольное уменьшение энтропии макроскопической системы не невозможно, но весьма маловероятно. В случае системы, состоящей из небольшого числа частиц или малых частей большой системы, могут наблюдаться процессы, связанные с убыванием энтропии. То есть при малой совокупности частиц могут наблюдаться отклонения от статистических закономерностей и, в частности, от второго начала термодинамики.

Так, например, в результате броуновского движения, пылинка может подняться на значительную высоту. Работа, необходимая для её подъема, черпается из запаса кинетической энергии хаотического движения молекулы, газ остывает, его энтропия уменьшается. Чем большую совокупность частиц содержит данная система, тем менее вероятны отклонения от статистических закономерностей и, в частности, от второго начала термодинамики.

**Агрегатные состояния вещества и фазовый переход.  
Критерии различных агрегатных состояний вещества**

Критерием различных агрегатных состояний вещества является соотношение между величинами  $E_{p\min}$  и  $k \cdot T$ ;  $E_{p\min}$  – наименьшая потенциальная энергия взаимодействия молекул – определяет работу, которую нужно совершить против сил притяжения для того, чтобы разъединить молекулы, находящиеся в равновесии ( $r = r_0$ );  $k \cdot T$  определяет удвоенную среднюю энергию, приходящуюся на одну степень свободы хаотического (теплого) движения молекул.

Газообразное состояние вещества

$$E_{p\min} \ll k \cdot T. \quad (399)$$

Вещество находится в газообразном состоянии, так как интенсивное тепловое движение молекул препятствует соединению молекул, сблизившихся до расстояния  $r_0$  (на расстоянии  $r = r_0$  силы притяжения и отталкивания уравниваются друг друга), то есть вероятность образования агрегатов из молекул достаточно мала.

Твёрдое состояние вещества

$$E_{p\min} \gg k \cdot T. \quad (400)$$

Вещество находится в твёрдом состоянии, так как молекулы, притягиваясь друг другу, не могут удалиться на значительные расстояния и колеблются около положений равновесия, определяемых расстоянием  $r_0$ .

Жидкое состояние вещества

$$E_{p\min} \approx k \cdot T. \quad (401)$$

Вещество находится в жидком состоянии, так как в результате теплового движения молекулы перемещаются в пространстве, обмениваясь местами, но не расходясь на расстояние, превышающее  $r_0$ .

Таким образом, любое вещество, в зависимости от температуры, может находиться в газообразном, жидком или твёрдом агрегатном состоянии, причём температура перехода из одного агрегатного состояния

в другое зависит от значения  $E_{p\min}$  для данного вещества. Например, у инертных газов  $E_{p\min}$  мало, а у металлов велико, поэтому при обычных (комнатных) температурах они находятся соответственно в газообразном и твёрдом состоянии.

### 2.3. Реальные газы

#### Уравнение Ван-дер-Ваальса

Поведение реальных газов довольно хорошо описывается уравнением Менделеева–Клапейрона, то есть уравнением состояния идеального газа  $\left( p \cdot V = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T \right)$  только при не слишком высоких давлениях и достаточно высоких температурах.

Однако с уменьшением температуры и повышением давления поведение реальных газов отклоняется от поведения газов идеальных. Например, рассмотрим произведение  $p \cdot V$  для массы азота, занимающей при нормальных условиях объем, равный одному литру. В соответствии с уравнением Менделеева–Клапейрона  $p \cdot V$  при неизменной температуре должно оставаться постоянным. В действительности, как видно из таблицы 13, при повышении давления наблюдаются заметные отклонения от постоянства  $p \cdot V$ , которые достигают 100 % при  $p = 1000$  атм.

Графическая зависимость произведения давления на объем реального газа (кислорода) при увеличении давления представлена на рис.149. Для идеального газа подобная зависимость выражается прямой линией, параллельной оси абсцисс (оси  $x$ ).

Таблица 13

Значения  $p$  и  $p \cdot V$  для азота

$p$ , атм	$p \cdot V$ , атм·V
1	1,000
500	1,390
1000	2,069

Рассматривая график, мы видим, что реальный газ при увеличении давления первоначально сжимается больше, чем это следует из уравнения идеальных газов, так что произведение  $p \cdot V$  уменьшается с возрастанием давления. При дальнейшем увеличении давления начинают сказываться

ваться какие-то иные свойства молекул реальных газов, в силу которых произведение  $p \cdot V$  возрастает.

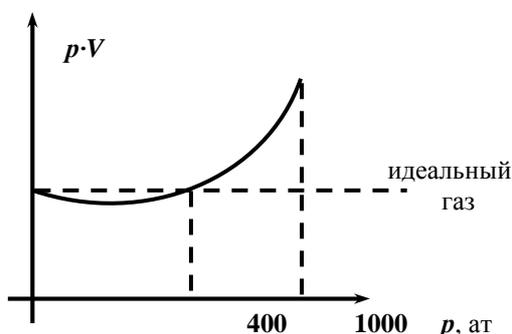


Рис. 149. Зависимость  $p \cdot V(p)$  для кислорода

Причины подобных отклонений заключаются в следующем:

1) большую сжимаемость реального газа по сравнению с идеальным газом обуславливают силы межмолекулярного взаимодействия; молекулярное сцепление приводит к возникновению как бы добавочного давления, возрастающего при увеличении плотности газа;

2) наблюдаемое при высоких давлениях уменьшение сжимаемости и соответствующее возрастание произведения  $p \cdot V$  объясняется тем, что реальные молекулы не являются материальными точками, а обладают некоторым конечным объемом.

По мере увеличения давления возрастает плотность газа, а вместе с ней возрастает влияние собственного объема молекул – газ оказывает большее сопротивление сжатию, чем это следует из уравнения Клапейрона-Менделеева.

Уравнение состояния реального газа было предложено впервые голландским физиком Ван-дер-Ваальсом (1837–1929) и носит его имя. Уравнение Ван-дер-Ваальса отличается от уравнения Клапейрона наличием двух поправочных членов, один из которых учитывает влияние собственного объема молекул, а другой – влияние сил молекулярного притяжения.

Рассмотрим подробнее каждый из этих поправочных членов. Рассчитаем поправку на недоступный объем. Молекула идеального газа, заключенная в некотором сосуде, может находиться в любой его точке, и для неё доступен весь объем сосуда  $V$ .

Молекула реального газа не может находиться в тех местах сосуда, где расположены остальные  $(N-1)$ -молекул и ей доступна лишь часть всего объема, равная  $(V-b)$ , где  $b$  – объём, недоступный для молекул.

Для подсчета этого недоступного объема будем считать, что в газе происходят только двойные соударения молекул. Для каждой пары взаимодействующих молекул недоступной является та часть объема, в которой расстояние между их центрами равно  $d$ , где  $d$  – диаметр молекулы, то есть сфера с объемом  $(4/3) \cdot \pi d^3$ . Из  $N$ -молекул может быть образовано  $\frac{N(N-1)}{2}$  пар. Следовательно, полный недоступный объем для всех молекул равен

$$\frac{N \cdot (N-1)}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot d^3 \approx N^2 \cdot \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot d^3.$$

На каждую из  $N$ -молекул приходится

$$\frac{N^2 \cdot \frac{4}{6} \cdot \pi \cdot d^3}{N} = 4 \cdot N \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3,$$

то есть

$$b = 4 \cdot N \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot d^3. \quad (402)$$

С учетом введенной поправки уравнение состояния реального газа примет вид

$$p \cdot (V - b) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T$$

при  $T = \text{const}$ ,  $p \cdot (V - b) = \text{const}$ .

График этой зависимости изображен на рис.150.

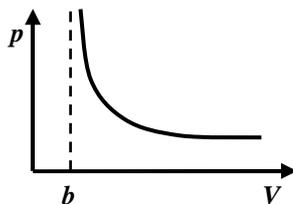


Рис. 150. Зависимость  $p(V)$

Изотермы  $p(V - b) = \text{const}$  имеют вид гипербол, у которых давление безгранично возрастает при  $V \rightarrow b$ .

Рассчитаем поправку на «внутреннее давление» (точнее на влияние сил межмолекулярного притяжения). Сила давления газа на стенку сосуда есть результат многочисленных столкновений молекул с твердой поверхностью. Поэтому давление идеального газа прямо пропорционально концентрации молекул  $n$  в слое, прилежащем непосредственно к стенке

$$n = N/V.$$

Так как между молекулами газа действуют силы притяжения, то давление уменьшается на величину  $p'$ . Поскольку силы взаимодействия очень быстро убывают с расстоянием, то практически следует учитывать притяжение первого слоя лишь одним соседним слоем II (рис. 151).

Сила этого притяжения, рассчитанная на единицу площади, пропорциональна концентрации молекул в обоих слоях

$$p' \approx \frac{N}{V} \cdot \frac{N}{V}.$$

Обозначим коэффициент пропорциональности  $\alpha$ , тогда

$$p' = \alpha \cdot \frac{N^2}{V^2}. \quad (403)$$

Обозначим  $\alpha N^2 = a$ , тогда  $p' = a/V^2$ . Вид коэффициента  $a$  зависит от конкретного строения взаимодействующих молекул, т.е. от природы газа. Объединяя вторую поправку с первой, мы можем записать

$$(p + p') \cdot (V - b) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T, \quad (404)$$

или

$$\left( p + \frac{a}{V^2} \right) \cdot (V - b) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T. \quad (405)$$

(405) – уравнение Ван-дер-Ваальса.

В этом уравнении  $V$  – объём, занимаемый  $m$  – граммами газа. Поскольку при выводе уравнения был сделан целый ряд упрощений, на него следует смотреть как на приближенное уравнение состояния реального газа.

Вычисленные с помощью уравнения Ван-дер-Ваальса значения давления газа достаточно точно совпадают с опытом лишь при относительно высоких температурах и только в некотором интервале давлений.

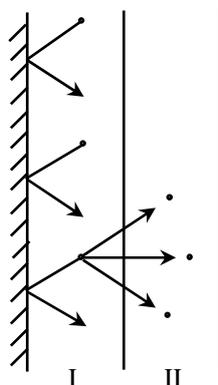


Рис. 151. К выводу уравнения Ван-дер-Ваальса

### Экспериментальные изотермы. Критические состояния

Уравнение Ван-дер-Ваальса – алгебраическое уравнение третьей степени относительно объема. Для одного моля газа

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \cdot (V - b) = \frac{m}{M} \cdot R \cdot T.$$

Раскрыв скобки и расположив члены уравнения по убывающим степеням объема, можно записать последнее в следующем виде:

$$V^3 - \left(b + \frac{R \cdot T}{p}\right) \cdot V^2 + \frac{a}{p} \cdot V - \frac{a \cdot b}{p} = 0. \quad (406)$$

Это уравнение третьей степени относительно объема и, следовательно, при данных  $p$  и  $T$  оно может иметь или три вещественных корня, или один вещественный и два комплексно-сопряженных корня, не имеющих физического смысла. Это зависит от соотношения между коэффициентами. При низких температурах уравнение имеет три вещественных корня и график  $p = f(V)$  имеет вид, изображенный на рис. 152.

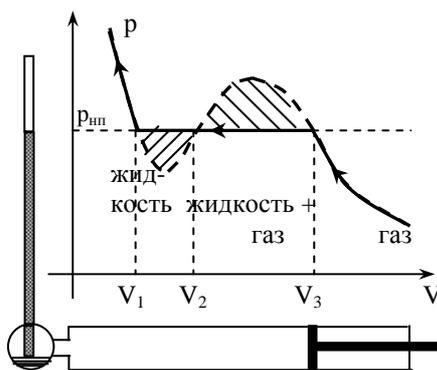


Рис. 152. График  $p=f(V)$

Для того чтобы получить изотерму опытным путем, нужно взять вещество в газообразном состоянии, поместить его в сосуд с перемещающимся поршнем и начать медленно сжимать, делая одновременно отсчеты давления и объема, а также, следя за тем, чтобы температура вещества оставалась постоянной. Результат подобного опыта дан на рис. 152 (жирная линия).

Вначале с уменьшением объема давление газа растёт, причем ход изотермы хорошо описывается уравнением Ван-дер-Ваальса (406).

Однако, начиная с некоторого объема  $V_3$ , экспериментальная изотерма перестает следовать уравнению (406). Начиная с этого значения объема, давление в сосуде перестаёт изменяться, само вещество перестаёт быть однородным, часть газа конденсируется в жидкость. Происходит расслоение вещества на две фазы: жидкую и газообразную.

По мере дальнейшего уменьшения объёма всё большая часть вещества переходит в жидкую фазу, причем переход осуществляется при постоянном давлении, обозначенном  $p_{\text{нп}}$  (рис. 152). После того, как процесс конденсации вещества в жидкость заканчивается при  $V=V_l$ , дальнейшее уменьшение объёма сопровождается быстрым ростом давления. При этом ход изотермы снова примерно следует уравнению (406). Вещество в состояниях, соответствующих этому участку изотермы, снова будет однородным, но представляет собой не газ, а жидкость.

Таким образом, уравнение Ван-дер-Ваальса описывает не только газообразное состояние вещества, но охватывает также процесс перехода в жидкое состояние и процесс сжатия жидкости.

Сопоставление экспериментальной изотермы с изотермой Ван-дер-Ваальса даёт, что эти изотермы довольно хорошо совпадают на участках, отвечающих однофазным состояниям вещества, но ведут себя совершенно различным образом в области расслоения на две фазы. Вместо S-образного завитка на изотерме Ван-дер-Ваальса экспериментальная изотерма имеет в этой области прямолинейный горизонтальный участок.

В состояниях, соответствующих горизонтальному участку изотермы, наблюдается равновесие между жидкой и газообразной фазами вещества. **Газ, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называется насыщенным паром.** Давление  $p_{\text{нп}}$ , при котором может существовать равновесие при данной температуре, называется давлением насыщенного пара.

Опыт показывает, что с повышением температуры ( $T' < T'' < T''' < T_{\text{к}}$ ) горизонтальный участок изотермы сокращается и при некоторой температуре он стягивается в точку. Называется эта температура критической (рис.153). При этом уменьшается различие в удельных объёмах, а следовательно, и в плотностях жидкости и насыщенного пара.

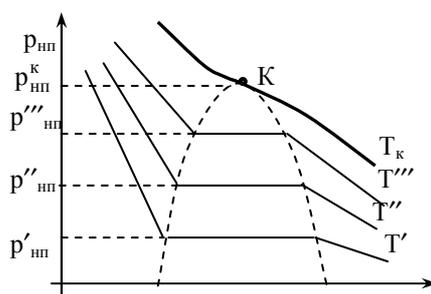


Рис.153. Изотермы Ван-дер-Ваальса

При критической температуре это различие исчезает. Одновременно исчезает всякое различие между жидкостью и паром. Если провести линию через крайние точки горизонтальных участков изотерм, получится колокообразная кривая, ограничивающая область двухфазных состояний вещества. Колокообразная кривая и участок критической изотермы, лежащий слева от точки  $K$  делит диаграммы ( $p \cdot V$ ) на три области (рис.154).

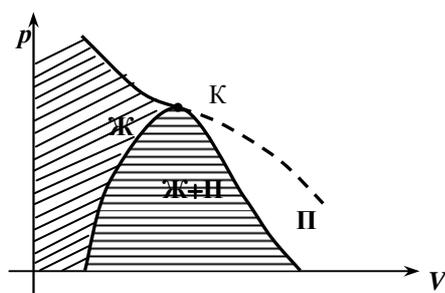


Рис. 154. Три области под колокообразной кривой

Наклонной штриховкой помечена область однородных жидких состояний. Под колокообразной кривой располагается область двухфазных состояний и область, лежащая справа от колокообразной кривой и верхней ветви критической изотермы, представляет собой область однородных газообразных состояний вещества. Следует отметить область, лежащую под правой ветвью критической изотермы, – область пара.

Состояние вещества в этой области отличается от остальных газообразных состояний в том отношении, что при изотермическом сжатии вещество, находящееся в этом состоянии, претерпевает процесс сжижения. Вещество, находящееся в газообразном состоянии при температуре выше критической, не может быть сжато никаким сжатием.

Рассмотрим изотермы Ван-дер-Ваальса для нескольких значений температуры (рис. 155).

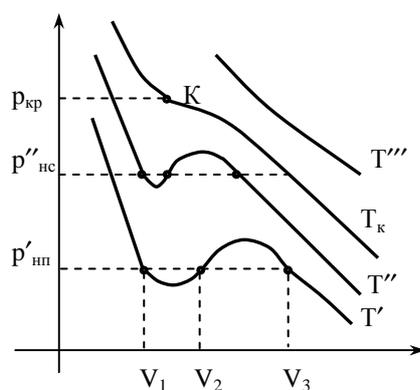


Рис. 155. Изотермы Ван-дер-Ваальса

Расчеты показывают, что при температуре  $T$  коэффициенты в уравнении (406) таковы, что все три решения уравнения оказываются вещественными. С повышением температуры различие между тремя вещественными решениями уравнения (406) уменьшаются. Начиная с определённой, своей для каждого вещества, температуры  $T_{кр}$ , при любом давлении вещественным остается только одно решение, соответствующее точке  $K$ . Температура называется критической температурой. Точка  $K$  называется критической точкой. Для соответствующей изотермы точка  $K$  служит точкой перегиба. Ей соответствуют три совпадающих вещественных решения уравнения (406). Касательная к критической изотерме в точке  $K$  является пределом, к которому стремятся секущие  $p'$  и  $p''$  при приближении температуры к критической. Следовательно, эта касательная, как и все секущие, параллельна оси  $V$  так, что производная  $\frac{dp}{dV}$  в точке  $K$  равна нулю.

Кроме того, в точке перегиба должна быть равна нулю и вторая производная  $\frac{d^2p}{dV^2}$ . Разрешим уравнение (406) относительно

$$p = \frac{R \cdot T}{V - b} - \frac{a}{V^2} \quad (407)$$

Дифференцирование этого выражения по  $V$  дает

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dV} &= -\frac{R \cdot T}{(V - b)^2} + \frac{2 \cdot a}{V^3}; \\ \frac{d^2p}{dV^2} &= \frac{2 \cdot R \cdot T}{(V - b)^3} - \frac{6 \cdot a}{V^4}. \end{aligned} \quad (408)$$

В критической точке при  $T = T_{кр}$  и  $V = V_{кр}$  эти выражения обращаются в ноль следующим образом:

$$-\frac{R \cdot T_{кр}}{(V_{кр} - b)^2} + \frac{2 \cdot a}{V_{кр}^3} = 0, \quad (409)$$

$$\frac{2 \cdot R \cdot T}{(V_{кр} - b)^3} - \frac{6 \cdot a}{V_{кр}^4} = 0. \quad (410)$$

Соответствующие значения  $V_{кр}$  и  $p_{кр}$  носят название критического объема и критического давления для данного вещества. Из уравнения (407) находим

$$p_{кр} = \frac{R \cdot T_{кр}}{V_{кр} - b} + \frac{a}{V_{кр}^2}. \quad (411)$$

Решая систему трех уравнений с тремя неизвестными  $V_{кр}$ ,  $p_{кр}$  и  $T_{кр}$ , получим:

$$V_{кр} = 3 \cdot b; \quad (412)$$

$$p_{кр} = \frac{a}{27 \cdot b^2}; \quad (413)$$

$$T_{кр} = \frac{8 \cdot a}{27 \cdot b \cdot R}. \quad (414)$$

Таким образом, зная константы Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$ , можно найти соответствующие критической точке  $V_{кр}$ ,  $p_{кр}$  и  $T_{кр}$ , которые называют критическими величинами. И, наоборот, по известным критическим величинам могут быть найдены значения констант Ван-дер-Ваальса.

### ***Внутренняя энергия реального газа. Эффект Джоуля-Томсона***

Внутренняя энергия идеального газа представляет собой кинетическую энергию движения молекул, поскольку в нем отсутствует молекулярное взаимодействие. В реальных газах нельзя пренебречь взаимодействием молекул, поэтому внутренняя энергия реального газа находится суммированием кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия.

Потенциальная энергия молекулярного взаимодействия зависит от взаимного расположения молекул, и поэтому она должна изменяться при изменении объема газа. Если исключить обмен энергией между газом и внешней средой, то сумма кинетической и потенциальной энергии должна оставаться постоянной. Изменение одного из видов энергии должно компенсироваться противоположным изменением второго вида энергии.

Исходя из этого, при расширении реального газа происходит уменьшение кинетической энергии за счет увеличения потенциальной энергии притяжения молекул. Поскольку мерой средней кинетической энергии молекул газа служит его абсолютная температура, то при расширении газа, молекулы которого притягиваются друг к другу, температура его должна понижаться. Впервые подобный опыт удалось осуществить Джоулю и Томсону.

В данном опыте были взяты два сосуда  $A$  и  $B$ , соединенные пористой перегородкой (рис. 156). Специальные насосы поддерживают в этих сосудах постоянное давление: в сосуде  $A$  –  $p_1$ , а в сосуде  $B$  – меньше  $p_2$ . По обе стороны от пористой перегородки находятся термометры. Газ заставляют расширяться через пористую перегородку. При этом большинство газов, расширяясь при комнатной температуре и не очень

больших давлениях, охлаждается. Исключение составляет водород, который при этих условиях нагревается.

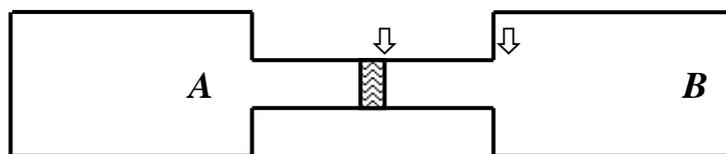


Рис. 156. К опыту Джоуля и Томсона

**Изменение температуры, сопровождающее расширение реального газа, получило название эффекта Джоуля-Томсона. Охлаждение газа при расширении называют положительным эффектом Джоуля-Томсона, нагревание – отрицательным.**

Для того чтобы понять существование двух знаков эффекта Джоуля-Томсона, рассмотрим график (рис.157), поясняющий отклонение поведения реального газа от идеального. Сплошными линиями изображены изменения отклонения произведения  $(p \cdot V/T)$  при изменении давления для трех различных температур  $T_1 < T_2 < T_3$ .

В случае идеального газа (пунктирная прямая) отношение  $(p \cdot V/T)$  остается постоянным. Из графика видно, что в зависимости от температуры отклонения в поведении реального газа от идеального различны. При более низкой температуре отклонение  $(p \cdot V/T)$  меньше, чем для идеального газа и, следовательно, преобладает влияние сил притяжения.

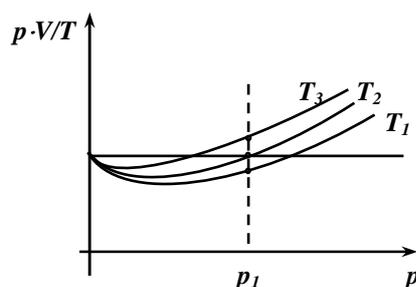


Рис.157. Зависимость  $\frac{p \cdot V}{T}(p)$

При расширении газа в этом случае молекулы будут совершать работу против сил притяжения за счет кинетической энергии. В результате при расширении газ будет охлаждаться, то есть будет наблюдаться положительный эффект Джоуля–Томсона. При более высокой темпера-

туре  $T_3$ , как видно из рис. 157, преобладающее значение имеют силы отталкивания, учитываемые в уравнении Ван-дер-Ваальса поправочным членом  $b$ . Эти силы будут совершать работу при расширении реальных газов и тем увеличивать кинетическую энергию молекул. В таком случае при расширении реального газа будет наблюдаться нагревание, то есть отрицательный эффект Джоуля–Томсона.

Очевидно, найдется какая-то промежуточная температура, при которой влияние притяжения в точности компенсируется влиянием сил отталкивания, и реальный газ ведет себя как идеальный газ, то есть расширение не сопровождается изменением температуры.

Таким образом, при плавном изменении температуры от значения  $T_1$  до  $T_2$  знак эффекта Джоуля–Томсона изменяется с положительного на отрицательный (рис. 158). Это происходит при температуре, называемой температурой инверсии  $T_u$ .

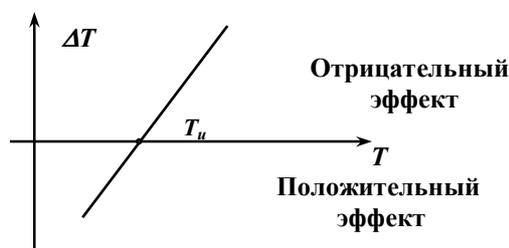


Рис. 158. К эффекту Джоуля – Томсона

Для кислорода температура инверсии  $+790^{\circ}\text{C}$ , для водорода  $-73^{\circ}\text{C}$ . Эффект Джоуля–Томсона применяется в технике сжижения газов.

### 3. Электричество и магнетизм

#### 3.1. Электростатика

**Электростатика** – раздел электродинамики, посвящённый изучению покоящихся электрических зарядов.

Самое простое явление, в котором обнаруживается факт существования и взаимодействия электрических зарядов, – это электризация тел при соприкосновении. Возьмем две полоски бумаги и проведем по ним несколько раз пластмассовой ручкой. Если взять ручку и полоску бумаги и начать их сближать, то бумажная полоска начнет изгибаться в сторону ручки, т. е. между ними возникают силы притяжения. Если взять две полоски и начать их сближать, то полоски начнут изгибаться в разные стороны, т. е. между ними возникают силы отталкивания.

Если потереть друг о друга пластмассовую палочку и шерстяную ткань или стеклянную палочку и шёлковую ткань, то они начинают притягивать к себе мелкие кусочки бумаги или другие легкие предметы.



*Рис. 159. Притяжение к наэлектризованным палочкам мелких кусочков бумаги*

Наэлектризованное тело способно притягивать к себе даже тонкие струйки жидкости (рис. 160).



*Рис. 160. Наэлектризованное тело притягивает к себе тонкую струйку жидкости*

#### **Электрический заряд и его свойства**

Электрический заряд – физическая величина, характеризующая способность тел или частиц к электромагнитным взаимодействиям.

1 Кл = 1 А·с. 1 кулон – электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника при силе тока 1 А за время 1 с.

В природе существуют частицы с электрическими зарядами противоположных знаков. Элементарный электрический заряд (впервые измерен в 1909 г. Милликенем):  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл. Носителями элементарного электрического заряда являются электрон (носитель элементарного отрицательного заряда ( $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг)) и протон (носитель элементарного положительного заряда  $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг).

Можно выделить следующие **фундаментальные свойства электрических зарядов**.

1. Существуют в двух видах: положительный и отрицательный. Одноимённые заряды отталкиваются, разноимённые – притягиваются.
2. Электрический заряд **инвариантен** (его величина не зависит от системы отсчёта, т.е. не зависит от того, движется он или покоится).
3. Электрический заряд **дискретен**, т.е. заряд любого тела составляет целое кратное элементарного электрического заряда  $e$ :  $q = N \cdot e$ .
4. Электрический заряд **аддитивен** (заряд любой системы тел (частиц) равен сумме зарядов тел (частиц), входящих в систему).
5. Электрический заряд подчиняется **закону сохранения заряда**.

Заряд не является самостоятельной сущностью, не зависимой от материи, он – одно из свойств материи.

#### **Закон сохранения электрического заряда (1843 г., М. Фарадей)**

**В изолированной (замкнутой) системе алгебраическая сумма зарядов всех частиц остаётся постоянной:  $q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots + q_n = const$ .**

**Замкнутая (изолированная) система – система, не обменивающаяся зарядами с внешними телами.**

Электрические частицы могут рождаться и исчезать, давая жизнь новым частицам. Однако во всех случаях заряженные частицы рождаются только парами с одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами. Исчезают заряженные частицы, превращаясь в нейтральные, тоже только парами. Во всех случаях сумма зарядов изолированной системы остаётся одной и той же.

#### **Закон Кулона**

Основной закон электростатики – закон взаимодействия двух неподвижных точечных зарядов, экспериментально установленный французским физиком Ш. Кулоном в 1785 г.

Точечный заряд (*физическая абстракция так же, как и материальная точка*) – заряд, сосредоточенный на теле, линейные размеры которого пренебрежимо малы по сравнению с расстоянием до других заряженных тел, с которыми он взаимодействует.

Для определения силы взаимодействия двух зарядов Кулон использовал крутильные весы – установку, состоящую из стеклянной палочки, подвешенной на тонкой упругой проволоке и помещённой в стеклянный цилиндрический сосуд (рис. 161).

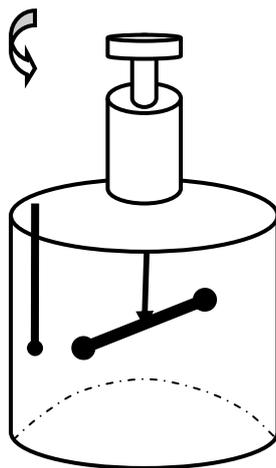


Рис. 161. Устройство крутильных весов

На одном конце палочки находится маленький металлический шарик, а на другом – противовес. Верхний конец нити прикреплен к шкале с делениями. С помощью этой шкалы определяют угол закручивания нити. Через отверстие в крышке сосуда вводят другой такой же шарик. Если шарикам сообщен заряд, то они взаимодействуют между собой. О силе взаимодействия судят по углу закручивания нити.

Опытным путём Кулоном было установлено, что если заряд вносимого шарика увеличивать в  $n$  раз, оставляя заряд шарика, закреплённого на стеклянной палочке, постоянным, то сила их взаимодействия увеличивается в  $n$  раз. Если расстояние между шариками увеличивать в  $n$  раз, то сила их взаимодействия уменьшится в  $n^2$  раз. Таким образом, **сила взаимодействия между двумя неподвижными точечными зарядами пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними.**

$$F = k \cdot \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{\varepsilon \cdot r^2} = \frac{|Q_1| \cdot |Q_2|}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot r^2}. \quad (415)$$

Здесь  $k = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2}$ ,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{Ф/м}$  – электрическая

постоянная;  $\epsilon$  – диэлектрическая проницаемость среды (табличная величина);

$\epsilon = \frac{F_0}{F}$  – физическая величина, характеризующая электрические

свойства вещества и показывающая, во сколько раз сила взаимодействия зарядов в данной среде меньше силы их взаимодействия в вакууме.

В векторном виде

$$\vec{F}_{1,2} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{1,2}}{r}; \quad \vec{F}_{2,1} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}_{2,1}}{r}. \quad (416)$$

$\vec{F}_{1,2}$  – сила, действующая на заряд  $Q_1$  со стороны заряда  $Q_2$ ;  $\vec{r}_{1,2}$  – радиус-вектор, соединяющий заряд  $Q_2$  с зарядом  $Q_1$ ;  $r = |\vec{r}_{1,2}|$ ;  $\vec{F}_{2,1}$  – сила, действующая на заряд  $Q_2$  со стороны заряда  $Q_1$ ;  $\vec{r}_{2,1}$  – радиус-вектор, соединяющий заряд  $Q_1$  с зарядом  $Q_2$   $\vec{r}_{2,1} = -\vec{r}_{1,2}$ .

Кулоновские силы действуют вдоль прямой, соединяющей эти тела (подобные силы называют центральными) в соответствии с третьим законом Ньютона:  $\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}$ . В случае одноимённых зарядов ( $F > 0$ ) – отталкивание; в случае разноимённых зарядов ( $F < 0$ ) – притяжение.

Если заряд равномерно распределён на нити, поверхности тела или объёме тела, то удобно ввести характеристику, которая называется плотностью заряда.

**Линейная плотность** заряда ( $\tau$ ) – физическая величина, численно равная заряду, находящемуся на единице длины нити:

$$\tau = \frac{q}{l}. \quad (417)$$

**Поверхностная плотность** заряда ( $\sigma$ ) – физическая величина, численно равная заряду, распределённому на единице площади поверхности

$$\sigma = \frac{q}{S}. \quad (418)$$

**Объёмная плотность** заряда ( $\rho$ ) – физическая величина, численно равная заряду, заключённому в единице объёма тела

$$\rho = \frac{q}{V}. \quad (419)$$

$[\tau]$  Кл / м;  $[\sigma]$  Кл / м<sup>2</sup>;  $[\rho]$  Кл / м<sup>3</sup>.

Если известна плотность заряда, то можно найти величину заряда, находящегося на нити, поверхности тела или в его объёме.

### Электрическое поле и его напряжённость

Силовое поле, посредством которого взаимодействуют электрические заряды, называется **электрическим полем**.

Неподвижный электрический заряд создаёт в окружающем пространстве электростатическое поле, которое описывается двумя основными характеристиками – напряжённостью и потенциалом поля.

**Напряжённость электростатического поля** – физическая величина, численно равная силе, действующей на единичный, положительный, пробный заряд, помещённый в данную точку поля.

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}. \quad (420)$$

$$[E] \text{ н / Кл} = 1 \text{ В / м}.$$

Напряжённость – это силовая, векторная характеристика поля. Направление  $\vec{E}$  (как следует из (420)) совпадает с направлением силы, действующей на положительный заряд, помещённый в ту же точку поля, направление вектора  $\vec{E}$  в которой нужно определить (рис. 162).

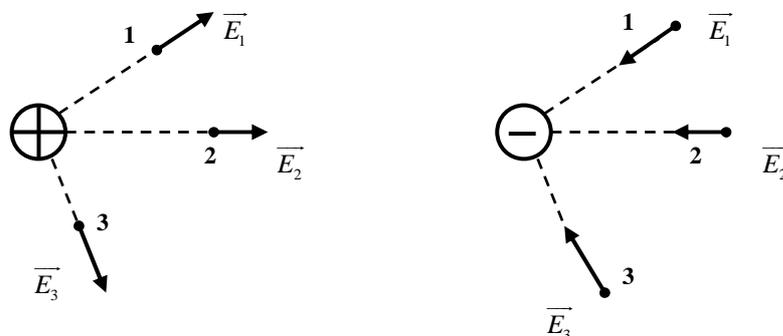


Рис. 162. Напряжённость в точках (1,2,3), созданная полем положительного (слева) и отрицательного (справа) заряда

Величину напряжённости поля точечного заряда можно получить, используя закон Кулона:

$$E = \frac{F}{q_0} = \frac{k \cdot q \cdot q_0}{r^2 \cdot q_0} = k \cdot \frac{q}{r^2}, \quad (421)$$

где  $q_0$  – величина пробного электрического заряда. Из (421)  $\Rightarrow$ , что напряжённость поля, создаваемого точечным электрическим зарядом в вакууме, не зависит от величины пробного заряда.

При расчете электрического поля, создаваемого протяженным заряженным телом, необходимо записать формулу (421) в дифференциальной форме

$$d\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \vec{e}_r, \quad (422)$$

где заряд  $dQ$  можно выразить через объемную  $\rho$ , поверхностную  $\sigma$  или линейную  $\tau$  плотности зарядов:  $dQ = \rho \cdot dV$ ,  $dQ = \sigma \cdot dS$ ,  $dQ = \tau \cdot dl$ . Тогда определение результирующего поля сводится к интегрированию:

- по объему  $V$  для объемно заряженных тел

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho}{r^2} \vec{e}_r \cdot dV; \quad (423)$$

- по поверхности  $S$  для поверхностно заряженных тел

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma}{r^2} \vec{e}_r \cdot dS; \quad (424)$$

- по линии  $L$  для линейно заряженных тел

$$\vec{E} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \int_L \frac{\tau}{r^2} \vec{e}_r \cdot dl. \quad (425)$$

Электрические поля графически изображаются с помощью силовых линий и эквипотенциальных поверхностей.

Силовая линия – это линия, касательная к которой в каждой точке поля совпадает с вектором напряженности поля в этой точке. Примеры показаны на рис. 163 и 164.

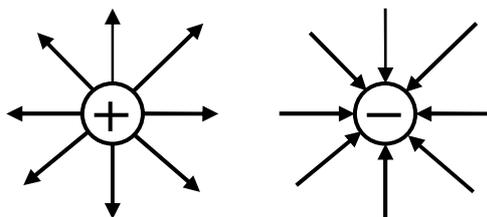


Рис. 163. Силовые линии поля положительного (слева) и отрицательного (справа).

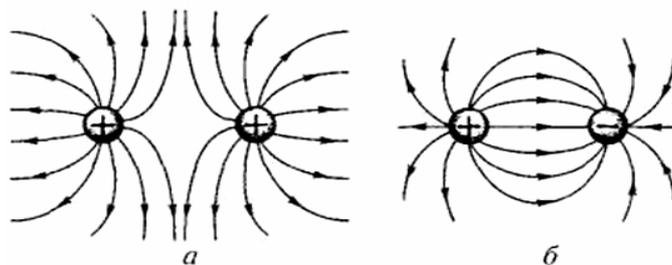


Рис. 164. Картины линий напряженности от систем из двух зарядов

Свойства силовых линий:

1. Силовые линии начинаются на положительных зарядах и заканчиваются на отрицательных или в бесконечности.
2. Силовые линии не пересекаются.
3. Густота силовых линий связана с величиной напряжённости поля, а именно: чем больше модуль  $|\vec{E}|$ , тем гуще силовые линии.

Однородное электрическое поле – это поле, напряжённость которого во всех точках одинакова (рис. 165). Поле, которое не удовлетворяет этому условию, является неоднородным. В частности на рис. 166 показано поле, убывающее в плоскости «снизу-вверх».

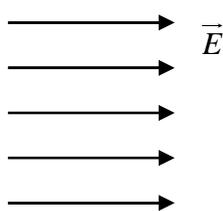


Рис. 165. Условное изображение  
однородного поля

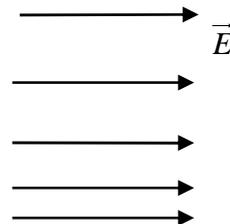


Рис. 166. Изображение поля, убывающего  
в плоскости «снизу-вверх»

### Принцип суперпозиции электростатических полей

Для кулоновской силы справедлив **принцип суперпозиции**, согласно которому результирующая сила, действующая на точечный заряд, равна векторной сумме сил, действующих на этот заряд со стороны других зарядов:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (426)$$

Соответственно **принцип суперпозиции** для напряженности в некоторой точке можно сформулировать так: **если электростатическое поле создано несколькими (N) точечными зарядами, то его напряжённость в любой точке поля равна геометрической сумме напряжённостей полей, созданных каждым из зарядов в отдельности.**

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \dots + \vec{E}_N = \sum_{i=1}^N \vec{E}_i, \quad (427)$$

где  $\vec{E}_i$  – напряженность поля, создаваемая зарядом с номером  $i$ .

Из принципа суперпозиции полей вытекает, что электростатические поля не взаимодействуют друг с другом. Есть взаимодействие: ПОЛЕ – ЗАРЯД, но нет взаимодействия ПОЛЕ – ПОЛЕ.

Пример (рис. 167).

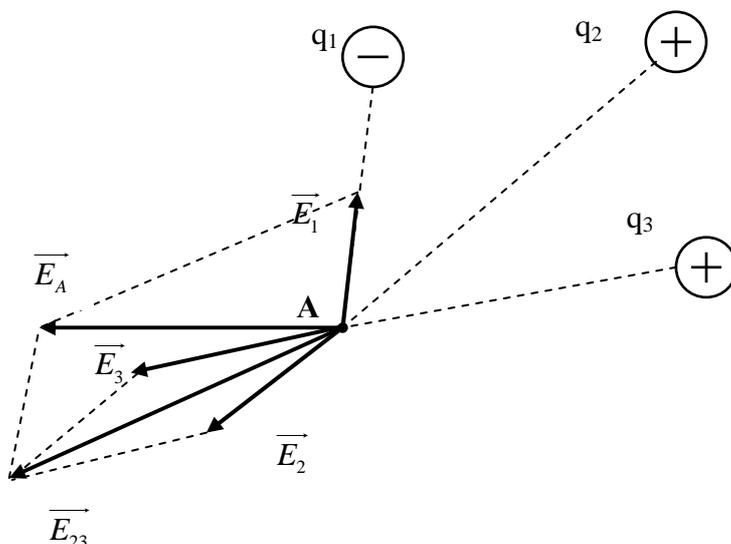


Рис. 167. К принципу суперпозиции полей

Возможные варианты применения принципа – расчёт электрического поля любой системы неподвижных зарядов.

### Электрический диполь

Электрический диполь – это система двух равных по модулю разноименных точечных зарядов ( $+Q$ ,  $-Q$ ), расстояние  $l$  между которыми значительно меньше расстояния до рассматриваемых точек поля. **Плечо диполя** – вектор  $\vec{l}$ , направленный по оси диполя (прямой, проходящей через оба заряда) от отрицательного заряда к положительному и равный по модулю расстоянию между ними.

Электрический момент диполя – вектор  $\vec{p}$ , совпадающий по направлению с плечом диполя и равный произведению модуля заряда на плечо (рис. 168).

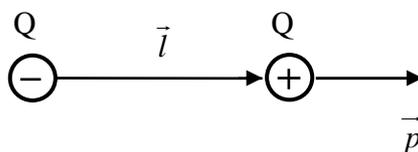


Рис. 168. Электрический диполь

$$\vec{p} = |Q| \cdot \vec{l}. \quad (428)$$

Расчёт поля диполя в произвольной точке производится согласно принципу суперпозиции  $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ , где  $\vec{E}_+$  и  $\vec{E}_-$  – напряжённости полей, создаваемых, соответственно, положительным и отрицательным зарядами.

### Напряжённость поля на продолжении оси диполя в точке А.

Напряжённость поля диполя в точке А направлена вдоль оси диполя и, согласно принципу суперпозиции, по модулю равна  $E = E_+ - E_-$

(рис. 169); 
$$E_A = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \left[ \frac{Q}{(r-l/2)^2} + \frac{Q}{(r+l/2)^2} \right] = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{(r+l/2)^2 + (r-l/2)^2}{(r-l/2)^2 \cdot (r+l/2)^2}.$$

Согласно определению диполя  $l/2 \ll r$  (на рисунке 169 для наглядности масштаб не выдержан), поэтому

$$E_A = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot Q \cdot l}{r^3} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2 \cdot p}{r^3}.$$

**Напряжённость поля на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины** (рис.170):

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2 + l^2 / 4} \approx \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2},$$

$$\frac{E_B}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + (l/2)^2}} \approx \frac{l}{r}, \quad E_B = \frac{E_+}{r},$$

$$E_B = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q \cdot l}{r^3} = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{p}{r^3}.$$

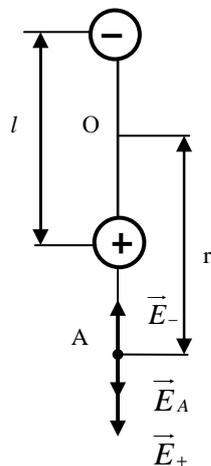


Рис. 169. К определению напряжённости на оси диполя в точке А

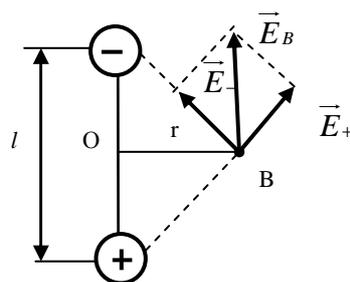


Рис. 170. К определению напряжённости поля на перпендикуляре, восстановленном к оси диполя из его середины

**Поток вектора напряженности электрического поля.  
Теорема Гаусса**

Потоком вектора напряженности электрического поля через элементарную площадку  $dS$  называется произведение модуля вектора напряженности  $\vec{E}$  на площадь элементарной поверхности и на косинус угла между нормалью к поверхности  $\vec{n}$  и направлением вектора  $\vec{E}$  (рис. 171)

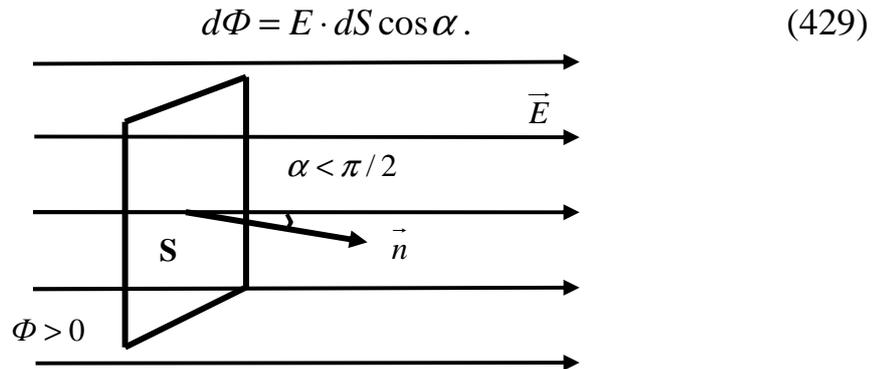


Рис. 171. Линии напряженности нормали к площадке  $dS$  и угол  $\alpha$

Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $\vec{E}$  через эту поверхность равен

$$\Phi = \oint_S E_n dS , \quad (430)$$

где интеграл берется по замкнутой поверхности  $S$ ;  $E_n$  – проекция вектора  $\vec{E}$  на нормаль к площадке  $dS$ ;  $E_n = E \cdot \cos \alpha$ .

Для замкнутых поверхностей за положительное направление нормали принимается внешняя нормаль, т.е. нормаль, направленная наружу области, охватываемой поверхностью. Поток вектора  $\vec{E}$  – величина скалярная. Единица потока вектора напряженности  $1\text{В}\cdot\text{м}$ .

1 вольт-метр равен потоку напряженности сквозь поверхность площадью  $1\text{м}^2$ , перпендикулярно линиям напряженности электростатического поля напряженностью  $1\text{В}/\text{м}$ .

**Теорема Гаусса** формулируется следующим образом.

**Поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность в вакууме равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри поверхности, деленной на электрическую постоянную:**

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0} . \quad (431)$$

Для доказательства рассмотрим замкнутую поверхность в виде сферы радиуса  $r$ , в центр которой помещен точечный заряд  $q$  (рис. 172).

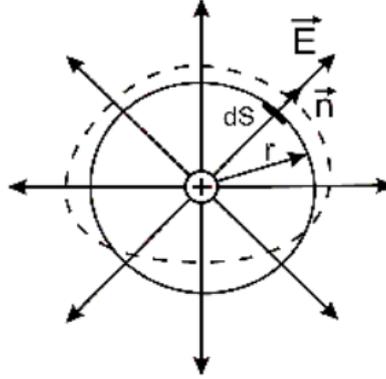


Рис. 172. Замкнутая поверхность, в центр которой помещён точечный заряд

Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом в вакууме, вычисляется по формуле при  $\epsilon = 1$

$$E = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} .$$

Для сферы  $r = const$ , следовательно,  $E = const$ , а также  $E_n = E$ , так как  $\alpha = 0$ . Поток вектора  $\vec{E}$  в этом случае равен

$$\Phi = \oint_S E_n dS = \oint_S \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot dS = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot \oint_S dS .$$

Интеграл  $\oint_S dS$  равен площади сферы  $\oint_S dS = S = 4 \cdot \pi \cdot r^2$ .

Тогда поток вектора  $\vec{E}$  равен  $\Phi = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} \cdot 4 \cdot \pi \cdot r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$ .

Таким образом, теорема доказана.

Напомним, что поток пропорционален числу силовых линий, пронизывающих замкнутую поверхность. Если замкнутая поверхность отличается от сферы (рис. 172, пунктирная линия), то поток вектора  $\vec{E}$  не изменится, так как не изменяется число силовых линий, пронизывающих эту поверхность.

Если внутри замкнутой поверхности находится не один заряд, а несколько, то результирующая напряженность электрического поля нахо-

дится по принципу суперпозиции. Тогда потоки и заряды складываются алгебраически, т. е. с учетом знаков, и теорема Гаусса и формула (431) оказываются справедливыми.

В случае непрерывного распределения зарядов теорему Гаусса можно записать так:

$$\oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS = \frac{\sum_{i=1}^n Q_i}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \int_V \rho dV, \quad (432)$$

где  $\rho$  – объёмная плотность заряда.

Основные затруднения при использовании теоремы Гаусса связаны с выбором замкнутой поверхности  $S$ . Чтобы их избежать, необходимо придерживаться следующих рекомендаций:

1. Из соображений симметрии определяется направление вектора  $\vec{E}$  в пространстве, окружающем заряженное тело.
2. Точка, в которой определяется вектор напряженности, должна принадлежать замкнутой поверхности интегрирования  $S$ .
3. Поверхность  $S$  выбирают симметричной расположению зарядов, а ее составные части ( $S_i$ ) должны быть либо перпендикулярные, либо касательные к вектору напряженности ( $S_j$ ).

В этом случае поток вектора напряженности через замкнутую поверхность можно представить как сумму поверхностных интегралов

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \sum_i \int_{S_i} E_i \cdot dS \cdot \cos \alpha_i + \sum_j \int_{S_j} E_j \cdot dS \cdot \cos \alpha_j,$$

здесь вторая сумма равна нулю ( $\alpha_j = \pi/2$ ,  $\cos \alpha_j = 0$ ), а первая – преобразуется к виду

$$\sum_i E_i \cdot S_i \cos \alpha_i,$$

где  $\alpha_i = 0$  или  $\pi$ .

### **Применение теоремы Гаусса к расчёту полей в вакууме**

#### *1. Поле равномерно заряженной бесконечной плоскости*

Бесконечная плоскость заряжена с постоянной поверхностной плотностью  $\sigma$ . Линии напряжённости перпендикулярны рассматриваемой плоскости и направлены от неё в обе стороны. В качестве замкнутой поверхности мысленно построим цилиндр, основания которого параллельны заряженной плоскости, а ось перпендикулярна ей (рис. 173).

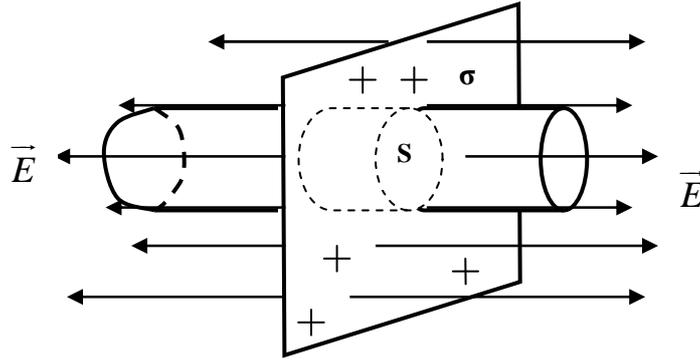


Рис. 173. Плоскость с поверхностной плотностью заряда  $\sigma$

Полный поток сквозь цилиндр равен сумме потоков сквозь его основания (площади оснований равны, и для основания  $E_n = E$ ), т. е. равен  $2 \cdot E \cdot S$ . Согласно теореме Гаусса

$$2 \cdot E \cdot S = \frac{\sigma \cdot S}{\epsilon_0},$$

откуда 
$$E = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0}. \quad (433)$$

2. Поле двух бесконечных параллельных, разноимённо заряженных плоскостей.

Плоскости заряжены с поверхностной плотностью  $+\sigma$  и  $-\sigma$ . Поле этих плоскостей находится как суперпозиция полей, создаваемых каждой плоскостью  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ . На рис. 174 верхние стрелки соответствуют полю положительно заряженной плоскости, нижние – отрицательно заряженной. Слева и справа от плоскости  $E = 0$  (поля вычитаются, линии вектора  $\vec{E}$  направлены навстречу друг другу). В области между плоскостями  $E = E_+ + E_-$ , т. е.

$$E = \sigma / \epsilon_0. \quad (434)$$

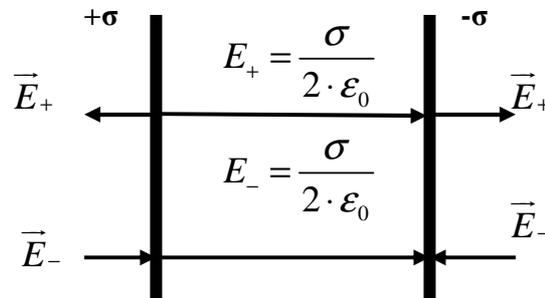


Рис. 174. Две разноимённо заряженные плоскости

### 3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности

Сферическая поверхность радиусом  $R$  с общим зарядом  $Q$  заряжена равномерно с поверхностной плотностью  $\sigma$ .

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R),$$
$$E = 0 \quad (r < R). \quad (435)$$

Благодаря равномерному распределению заряда по поверхности поле, создаваемое им, обладает сферической симметрией. Поэтому линии напряжённости направлены радиально (рис. 175, а).

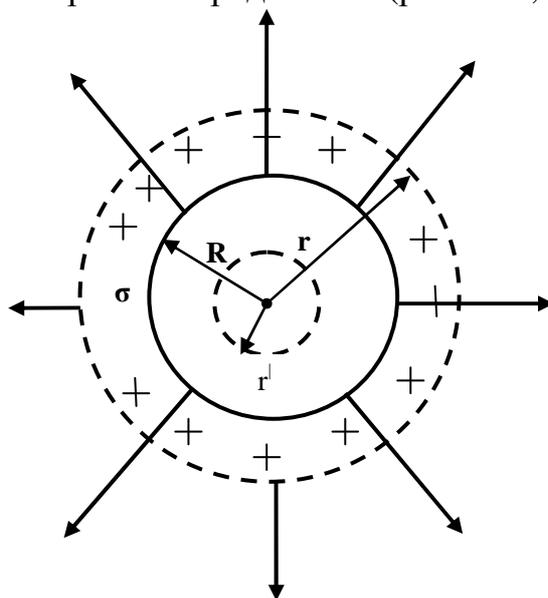


Рис. 175, а. Линии напряжённости сферической поверхности

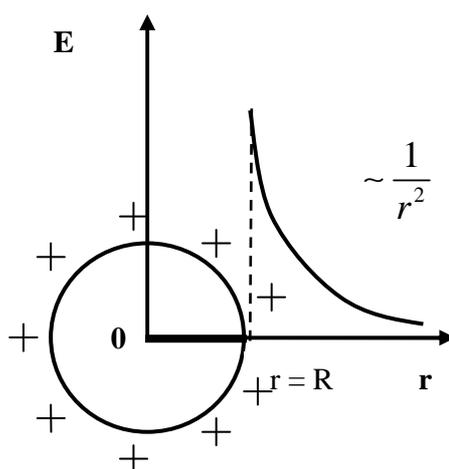


Рис. 175, б. График зависимости  $E(r)$  для сферической заряженной поверхности

Построим мысленно сферу радиусом, имеющую общий центр с заряженной сферой. Если  $r > R$ , то внутрь поверхности попадает весь заряд  $Q$ , создающий рассматриваемое поле, и по теореме Гаусса

$$4 \cdot \pi \cdot r^2 \cdot E = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

откуда 
$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R).$$

При  $r > R$  поле убывает с расстоянием  $r$  по такому же закону, как и у точечного заряда. График зависимости  $E$  от  $r$  приведён на рис. 175, б.

Если  $r' < R$ , то замкнутая поверхность не содержит внутри равномерно заряженной сферической поверхности  $E = 0$ .

#### 4. Поле объёмно заряженного шара.

Шар радиусом  $R$  с общим зарядом  $Q$  (рис. 176, а) заряжен равномерно с объёмной плотностью  $\rho$ .

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R), \tag{436}$$

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot r' \quad (r' \leq R).$$

Из соображений симметрии следует, что для напряжённости поля вне шара получится тот же результат, что и в случае сферической поверхности

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R).$$

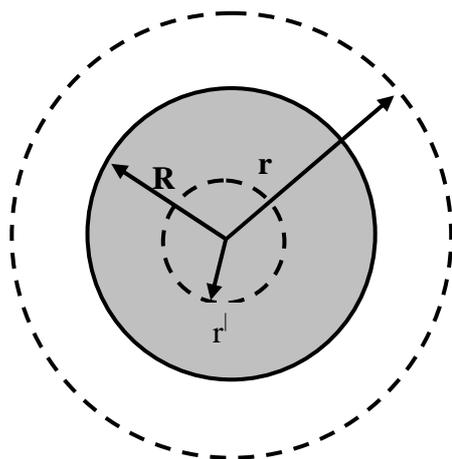


Рис. 176, а. Шар радиусом  $R$  с общим зарядом  $Q$ , заряженный равномерно с объёмной плотностью  $\rho$

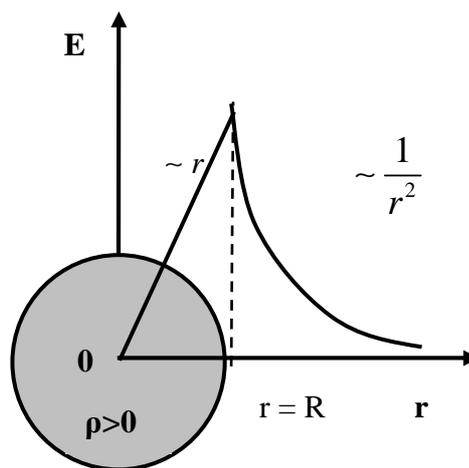


Рис. 176, б. График зависимости  $E(r)$

Внутри шара напряжённость другая. Сфера радиусом  $r' < R$  охватывает заряд  $Q' = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r'^3 \cdot \rho$ . Поэтому, согласно теореме Гаусса,

$$4 \cdot \pi \cdot r'^2 \cdot E = \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r'^3 \cdot \frac{\rho}{\epsilon_0}. \text{ Учитывая, что } \rho = \frac{Q}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot R^3}, \text{ получаем}$$

$$E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Q}{R^2} \cdot r' \quad (r' \leq R).$$

График зависимости  $E(r)$  приведён на рисунке 176, б.

### 5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра.

Бесконечный цилиндр радиусом  $R$  заряжен равномерно с линейной плотностью  $\tau$ . Из соображений симметрии следует, что линии напряжённости будут направлены по радиусам круговых сечений цилиндра с одинаковой густотой во все стороны относительно цилиндра (рис. 177).

В качестве замкнутой поверхности мысленно построим коаксиальный заряженный цилиндр радиусом  $r$  и высотой  $l$ . Поток вектора  $\vec{E}$  сквозь торцы цилиндра равен нулю (торцы параллельны линиям напряжённости), а сквозь боковую поверхность —  $2 \cdot \pi \cdot l \cdot E$ . По теореме Гаусса при  $r > R$  имеем  $2 \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot E = \frac{\tau \cdot l}{\epsilon_0}$ , откуда

$$E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r}. \quad (437)$$

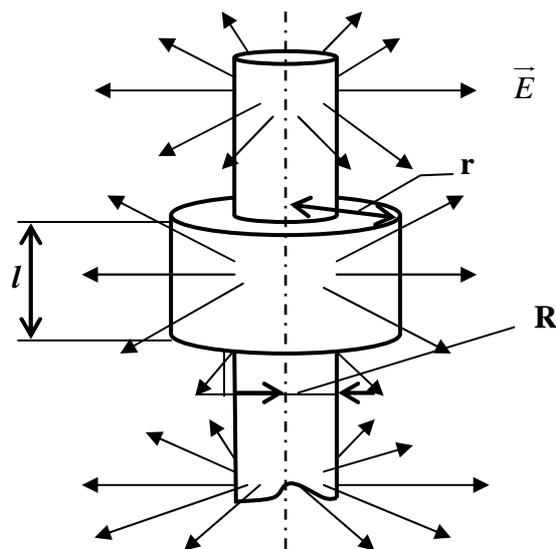


Рис. 177. Бесконечный цилиндр радиусом  $R$ , заряженный равномерно с линейной плотностью  $\tau$

Если  $r < R$ , то замкнутая поверхность зарядов внутри не содержит, поэтому в этой области  $E = 0$ .

### **Работа по перемещению заряда в электрическом поле**

Покажем, что электростатическое поле является потенциальным, а кулоновские силы – консервативными.

Для этого рассчитаем работу, совершаемую электростатическим полем положительного точечного заряда  $q$ , по перемещению другого положительного точечного заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 (рис. 178). В процессе перемещения заряда  $q_0$  сила взаимодействия между зарядами будет изменяться, так как она зависит от расстояния между зарядами, и примет вид  $F = \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}$ .

$$F = \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r^2}.$$

Элементарную работу найдем по формуле:  $dA = F \cdot dl \cdot \cos \alpha$ . Учтем, что  $dl \cdot \cos \alpha = dr$  (рис. 178).

Найдём работу переменной силы

$$A_{1 \rightarrow 2} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r^2} dr = \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r_1} - \frac{q \cdot q_0}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot r_2}. \quad (438)$$

В этой формуле приняли, что при  $r \rightarrow \infty$  потенциальная энергия  $U = 0$ . Из формулы (438) видно, что работа не зависит от формы траектории и определяется только начальным и конечным положением пробного заряда. Следовательно, электростатическое поле является потенциальное поле, и в нем действуют консервативные силы, работа которых равна убыли потенциальной энергии.

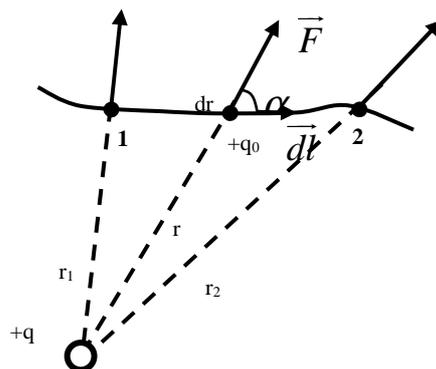


Рис. 178. К расчёту работы перемещения заряда в электрическом поле

Тогда

$$A_{1 \rightarrow 2} = W_{p_1} - W_{p_2}. \quad (439)$$

Элементарная работа сил поля по перенесению единичного заряда на пути  $d\vec{l}$ :  $\vec{E}d\vec{l} = E_l dl$ .

$$\text{Циркуляция вектора } \vec{E}: \oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl.$$

Интегрирование производится по любому замкнутому пути  $L$ .

### **Теорема о циркуляции вектора $\vec{E}$**

$$\oint_L \vec{E}d\vec{l} = \oint_L E_l dl = 0. \quad (440)$$

Равенство нулю означает, что электрическое поле потенциально. Формула (440) справедлива только для электростатического поля.

Потенциальная энергия заряда  $q_0$  в поле заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него

$$U = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_0 \cdot q}{r}. \quad (441)$$

Потенциальная энергия заряда  $q_0$  в поле, создаваемом системой  $n$  точечных зарядов, равна сумме потенциальных энергий, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = q_0 \cdot \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r_i}. \quad (442)$$

### **Потенциал электростатического поля**

Потенциал электростатического поля – это энергетическая, скалярная характеристика поля.

Потенциалом называется физическая величина, равная отношению потенциальной энергии, которой обладает единичный, положительный пробный заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда

$$\varphi = \frac{U}{q_0}. \quad (443)$$

Единица потенциала  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}$ . 1 вольт – потенциал такой точки поля, в которой заряд в 1 Кл обладает потенциальной энергией 1 Дж. Потенциал поля точечного заряда  $q$  выражается формулой

$$\varphi = k \cdot \frac{q}{r} = \frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0 \cdot r}, \text{ при } \epsilon = 1. \quad (444)$$

Здесь  $r$  – расстояние от данной точки до заряда  $q$ , создающего поля;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$  – электрическая постоянная.

Из (2)  $\Rightarrow \varphi \sim \frac{1}{r}$ ;  $r \rightarrow \infty \quad \varphi = 0$ .

Если поле создано несколькими зарядами, то потенциал поля системы зарядов равен алгебраической сумме потенциалов полей всех этих зарядов

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots + \varphi_N = \sum_{i=1}^N \varphi_i = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i}. \quad (445)$$

Принцип суперпозиции для электрического поля позволяет суммировать потенциалы  $\varphi_i$ , создаваемые  $i$ -ми зарядами или интегрировать потенциалы элементарных зарядов  $dQ$  от элементов объема  $dV$ , площади  $dS$  или длины  $dl$ :

– для тела, заряженного по объему  $V$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho}{r} \cdot dV; \quad (446)$$

– для тела, заряженного по поверхности  $S$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_S \frac{\sigma}{r} \cdot dS; \quad (447)$$

– для тела заряженного по линии  $L$

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_L \frac{\tau}{r} \cdot dl. \quad (448)$$

**Работа сил электростатического поля при перемещении заряда**  $q_0$  из точки 1 в точку 2 равна произведению перемещаемого заряда на разность потенциалов в начальной и конечной точках

$$A_{12} = U_{n1} - U_{n2} = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2) = q_0 \cdot (-\Delta\varphi). \quad (449)$$

Если  $\varphi_1 > \varphi_2$  и перемещаемый заряд положителен, то работа совершается силами поля. Перемещение заряда в обратном направлении возможно только под действием сил неэлектрического происхождения. Если заряд в электростатическом поле перемещается по замкнутому контуру, то работа, совершаемая полем по перемещению заряда, равна нулю. Такое поле называют потенциальным, а силы, в нём действующие, консервативными силами.

Разность потенциалов  $(\varphi_1 - \varphi_2)$  равна напряжению  $U$

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = -\Delta\varphi.$$

Тогда работа по перемещению заряда в электрическом поле равна

$$A = q \cdot U. \quad (450)$$

Разность потенциалов определяется работой, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из точки 1 в точку 2:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E_l dl.$$

Работа сил поля при перемещении заряда  $q_0$  из точки 1 в точку 2 может быть записана в виде  $A_{12} = \int_1^2 q_0 \cdot \vec{E} d\vec{l}$ , где интегрирование можно проводить вдоль любой линии, соединяющей точки 1 и 2, так как работа сил электростатического поля не зависит от траектории перемещения (электростатическое поле потенциально).

Можно дать ещё одну формулировку потенциала электростатического поля.

Потенциал электростатического поля – физическая величина, определяемая работой сил поля по перемещению единичного, положительного заряда при удалении его из данной точки в бесконечность:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q_0}. \quad (451)$$

Существует связь между двумя характеристиками электрического поля: потенциалом и напряженностью. Для того чтобы эту связь установить, надо вычислить работу по перемещению заряда  $q$  на расстояние  $d$ . Получим ее для однородного электрического поля, т. е. при  $E = const$ . Учитывая, что

$F = q \cdot E$ :  $A = F \cdot d \cdot \cos 0^\circ = q \cdot E \cdot d$  (\*) и  $A = q \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$  (2\*), приравняв (\*) и (2\*), получим

$$E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d} = \frac{U}{d}. \quad (452)$$

Здесь  $d$  – расстояние вдоль линии напряженности между двумя точками с потенциалами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ .

Согласно формуле (452), напряженность электрического поля выражается в вольтах на метр, причем  $1 \frac{В}{м} = 1 \frac{Н}{Кл}$ .

В общем случае

$$\vec{E} = -grad\varphi. \quad (453)$$

Знак «минус» показывает, что вектор  $\vec{E}$  направлен в сторону убывания потенциала.

Работа по перемещению единичного положительного заряда из одной точки в другую вдоль оси  $x$  при условии, что точки расположены бесконечно близко друг к другу и  $x_2 - x_1 = dx$ , равна  $E_x dx$ . Та же работа

равна  $\varphi_1 - \varphi_2 = -d\varphi$ . Приравняв оба выражения, получим  $E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ , где символ частной производной подчёркивает, что дифференцирование производится только по  $x$ . Повторив аналогичные рассуждения для осей  $y$  и  $z$ , имеем:

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \cdot \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \cdot \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \cdot \vec{k}\right) \text{ или } \vec{E} = -grad\varphi,$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы координатных осей  $x, y, z$ .

**Эквипотенциальные поверхности** – это поверхности, во всех точках которых потенциал  $\varphi$  электростатического поля имеет одно и то же значение.

Первой эквипотенциальной поверхностью любого тела является его поверхность. Внутри заряженного проводника электростатическое поле отсутствует. Отсюда ясно, что форма эквипотенциальных поверхностей зависит от формы заряженного тела (рис. 179).

На рис. 179 линии напряжённости (слева) – штриховые линии; сечения эквипотенциальных поверхностей – сплошные линии. Линии напряжённости всегда перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Эквипотенциальных поверхностей вокруг каждого заряда и каждой системы зарядов можно провести бесчисленное множество. Однако их обычно проводят так, чтобы разности потенциалов между любыми двумя соседними эквипотенциальными поверхностями были одинаковы. Тогда густота эквипотенциальных поверхностей наглядно характеризует напряжённость поля в разных точках. Там, где эти поверхности расположены гуще, напряжённость поля больше.

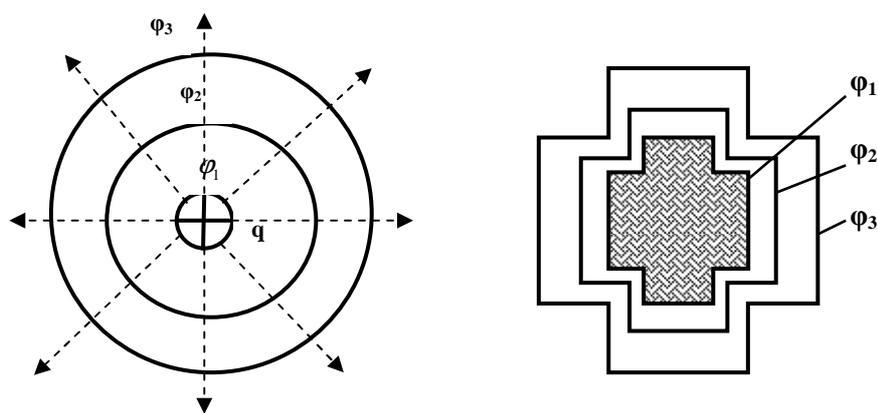


Рис. 179. Эквипотенциальные поверхности

Можно сопоставить характеристики гравитационного и электрического полей (табл. 14).

*Сопоставление характеристик гравитационного  
и электростатических полей*

Сравниваемые характеристики	Вид поля	
	гравитационное	электростатическое
Сила	$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$	$F = k \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}$
Напряжённость	$\vec{g} = \vec{F} / m$	$\vec{E} = \vec{F} / q_0$
Работа по перемещению тела или заряда	$A_{12} = m \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$	$A_{12} = q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)$
Работа по замкнутому контуру	$\oint_L dA = 0$	$\oint_L dA = 0$
Потенциал	$\varphi = \Pi / m$	$\varphi = U_n / q_0$
Связь между напряжённостью и потенциалом	$\vec{g} = -grad\varphi$	$\vec{E} = -grad\varphi$

**Вычисление разности потенциалов по напряжённости поля**

1. Поле бесконечно заряженной плоскости:

$$d\varphi = -Edx, \quad E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} Edx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot (x_2 - x_1).$$

Таким образом, разность потенциалов между точками на расстоянии  $x_1$  и  $x_2$  от плоскости

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0} \cdot (x_2 - x_1). \quad (454)$$

2. Поле двух бесконечных параллельных разноимённо заряженных плоскостей:

$$d\varphi = -Edx, \quad E = \frac{\sigma}{2 \cdot \varepsilon_0},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d Edx = \int_0^d \frac{\sigma}{\varepsilon_0} dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d.$$

Таким образом, разность потенциалов между плоскостями с расстоянием  $d$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d. \quad (455)$$

3. Поле равномерно заряженной сферической поверхности с зарядом  $q$ :

$$d\varphi = -E dr, \quad E = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq R); \quad E = 0 \quad (r < R);$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right).$$

Таким образом,

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (r_1 > R, \quad r_2 > R \quad r_2 > r_1). \quad (456)$$

Потенциал поля вне сферической поверхности

$$\varphi = \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}. \quad (457)$$

Здесь в формуле (456) приняли  $r_1 = r$  и  $r_2 = \infty$ . Внутри сферической поверхности потенциал всюду одинаков и равен потенциалу поверхности (рис. 180)

$$\varphi = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot R}. \quad (458)$$

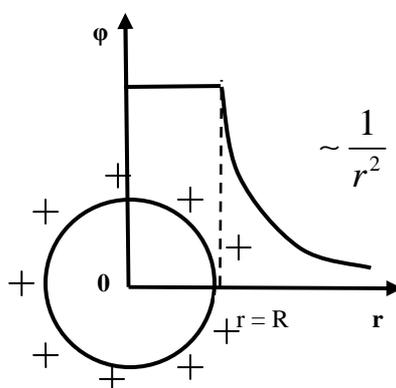


Рис. 180. Зависимость  $\varphi(r)$  для сферической поверхности с зарядом  $q$

4. Поле объёмно заряженного шара радиусом  $R$  и зарядом  $Q$ .

Разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра шара:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (r_1 > R, \quad r_2 > R \quad r_2 > r_1). \quad (459)$$

Разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от центра шара:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{Q}{8 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 R^3} \cdot (r_2^2 - r_1^2) \quad (r_1 < R, r_2 < R, r_2 > r_1). \quad (460)$$

5. Поле равномерно заряженного бесконечного цилиндра радиусом  $R$ :

$$d\varphi = -E dr, \quad E = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \cdot \frac{\tau}{r} \quad (r \geq R);$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Таким образом, разность потенциалов между точками, лежащими на расстояниях  $r_1$  и  $r_2$  от оси заряженного цилиндра:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (r_1 > R, r_2 > R, r_2 > r_1), \quad (461)$$

где  $\tau$  – линейная плотность заряда.

### **Типы диэлектриков. Поляризация диэлектриков**

Диэлектрики – вещества, не проводящие электрического тока.

Диэлектрик, как и всякое другое вещество, состоит из атомов и молекул, каждая из которых в целом электрически нейтральна. Если заменить положительные заряды ядер молекул суммарным зарядом  $+q$ , находящихся в, так сказать, «центре тяжести» положительных зарядов, а заряд всех электронов – суммарным отрицательным зарядом  $-q$ , находящимся в «центре тяжести» отрицательных зарядов, то молекулы можно рассматривать как электрические диполи с электрическим моментом.

Различают три типа диэлектриков:

1. Диэлектрики с неполярными молекулами, симметричные молекулы которых в отсутствие внешнего поля имеют нулевой дипольный момент (например  $N_2$ ,  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $CO_2$ ).

2. Диэлектрики с полярными молекулами, молекулы которых вследствие асимметрии имеют ненулевой дипольный момент (например  $H_2O$ ,  $SO_2$ ,  $CO$ ).

3. Ионные диэлектрики (например  $NaCl$ ,  $KCl$ ). Ионные кристаллы представляют собой пространственные решётки с правильным чередованием ионов разных знаков.

Внесение диэлектриков во внешнее электрическое поле приводит к возникновению отличного от нуля результирующего электрического момента диэлектрика.

**Поляризация** – процесс ориентации диполей или появления под воздействием внешнего электрического поля ориентированных по полю диполей.

Существует три типа поляризации:

1. Электронная (деформированная).

Поляризация диэлектрика с неполярными молекулами, заключающаяся в возникновении у атомов индуцированного дипольного момента за счёт деформации электронных орбит (рис. 181).

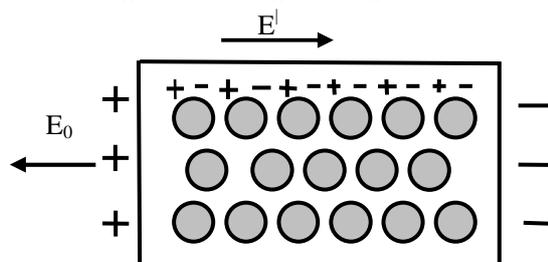


Рис. 181. Поляризация диэлектрика с неполярными молекулами

2. Ориентационная (дипольная).

Поляризация диэлектрика с полярными молекулами, заключающаяся в ориентации имеющихся дипольных моментов молекул по полю. Тепловое движение препятствует полной ориентации молекул, но в результате совместного действия обоих факторов (электрическое поле и тепловое движение) возникает преимущественная ориентация дипольных моментов молекул по полю. Эта ориентация тем сильнее, чем больше напряжённость электрического поля и ниже температура (рис. 182).

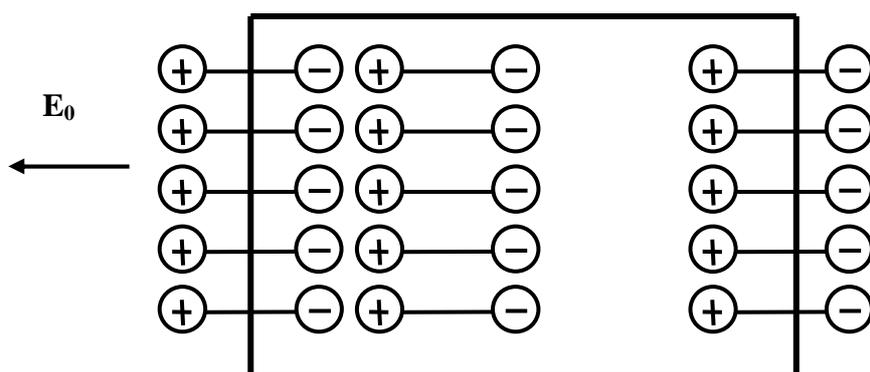


Рис. 182. Поляризация диэлектрика с полярными молекулами

3. Ионная.

Поляризация диэлектриков с ионными кристаллическими решётками, заключающаяся в смещении подрешётки положительных ионов

вдоль поля, а отрицательных – против поля, приводящая к возникновению дипольных моментов.

### **Поляризованность. Диэлектрическая проницаемость среды**

Поместим пластинку из однородного диэлектрика во внешнее электрическое поле, созданное двумя бесконечными параллельными, разноимённо заряженными плоскостями.

Во внешнем электрическом поле диэлектрик объёмом  $V$  поляризуется, т.е. приобретает дипольный момент  $\vec{p}_V = \sum_i \vec{p}_i$ , где  $\vec{p}_i$  – дипольный момент одной молекулы.

Для количественного описания поляризации диэлектрика используется векторная величина – поляризованность, которая определяется как дипольный момент одной молекулы

$$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \frac{\sum_i \vec{p}_i}{V}, \quad (462)$$

где  $V$  – объём диэлектрика;  $\vec{p}_i$  – дипольный момент молекулы.

В случае изотропного диэлектрика, при не слишком больших  $\vec{E}$  (за исключением сегнетоэлектриков) поляризованность линейно зависит от напряжённости внешнего поля

$$\vec{P} = \chi \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}, \quad (463)$$

где  $\chi$  – диэлектрическая восприимчивость вещества, характеризующая свойства диэлектрика (безразмерная величина, как правило, составляет несколько единиц).

Вследствие поляризации на поверхности диэлектрика появляются нескомпенсированные заряды, которые называются связанными (в отличие от свободных зарядов, которые создают внешнее поле). Поле  $\vec{E}'$  внутри диэлектрика, создаваемое связанными зарядами, направлено против внешнего поля  $\vec{E}_0$ , создаваемого свободными зарядами (рис. 183). Результирующее поле внутри диэлектрика  $E = E_0 - E'$ . В нашем примере поле, создаваемое двумя бесконечно заряженными плоскостями с поверхностной плотностью  $\sigma'$ :  $E' = \frac{\sigma'}{\epsilon_0}$ .

Поэтому  $E = E_0 - \sigma'/\epsilon_0$ . Полный дипольный момент диэлектрической пластинки с толщиной  $d$  и площадью грани  $S$  будет

$p_V = P \cdot V = P \cdot S \cdot d$ , с другой стороны –  $p_V = q \cdot d = \sigma' \cdot S \cdot d$ . Отсюда  $\sigma' = P$ .  $E = E_0 - \frac{\sigma'}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0} = E_0 - \frac{\chi \cdot \epsilon_0 \cdot E}{\epsilon_0}$ ;  $E = E_0 - \chi \cdot E$ .

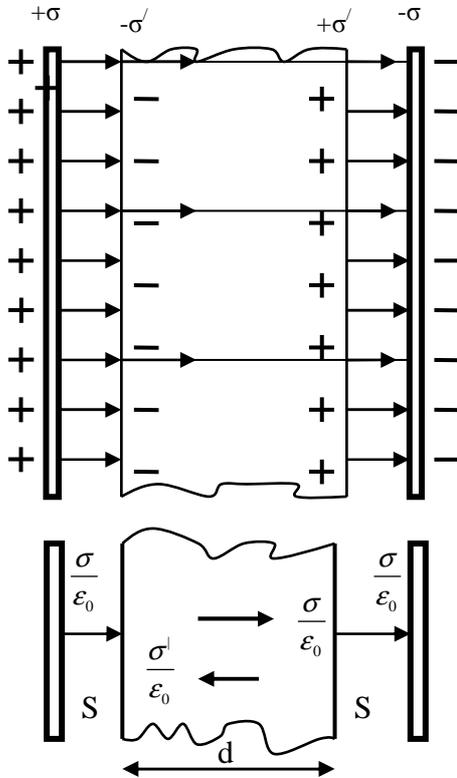


Рис. 183. Поляризация диэлектрика

Откуда напряжённость результирующего поля внутри диэлектрика равна

$$E = \frac{E_0}{1 + \chi} = \frac{E_0}{\epsilon} \quad (464)$$

Безразмерная величина

$$\epsilon = 1 + \chi = \frac{E_0}{E} \quad (465)$$

называется диэлектрической проницаемостью среды.

Она характеризует способность диэлектриков поляризовываться в электрическом поле и показывает, во сколько раз поле ослабляется диэлектриком.

### Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике

Напряжённость электростатического поля зависит от свойств среды (от  $\epsilon$ ). Кроме того, вектор напряжённости  $\vec{E}$ , переходя через границу диэлектриков, претерпевает скачкообразное изменение, поэтому для описания (непрерывного) электрического поля системы зарядов с учётом поляризационных свойств диэлектриков вводится **вектор электрического смещения (электрической индукции)**, который для изотропной среды записывается как

$$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \epsilon \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot (1 + \chi) \cdot \vec{E} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}. \quad (466)$$

Единица электрического смещения – Кл/м<sup>2</sup>.

Вектор  $\vec{D}$  описывает электростатическое поле, создаваемое свободными зарядами (т.е. в вакууме), но при таком их распределении в пространстве, какое имеется при наличии диэлектрика.

Аналогично линиям напряжённости можно ввести линии электрического смещения. Через область поля, где находятся связанные заряды, линии вектора  $\vec{D}$  проходят не прерываясь.

Для произвольной замкнутой поверхности  $S$  поток вектора  $\vec{D}$  сквозь эту поверхность  $\Phi_D = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS$ , (467)

где  $D_n$  – проекция вектора  $\vec{D}$  на нормаль  $\vec{n}$  к площадке  $dS$ .

**Теорема Гаусса для электростатического поля в диэлектрике:**

**поток вектора смещения электростатического поля в диэлектрике сквозь произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме заключённых внутри этой поверхности свободных электрических зарядов.**

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \oint_S D_n dS = \sum_{i=1}^n q_i. \quad (468)$$

Для непрерывного распределения заряда в пространстве с объёмной плотностью  $\rho = dq / dV$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_V \rho \cdot dV, \quad (469)$$

или

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

### **Условия на границе раздела двух диэлектрических сред**

При отсутствии на границе двух диэлектриков свободных зарядов, циркуляция вектора  $\vec{E}$  по контуру

$$\oint_{ABCD} \vec{E} d\vec{l} = 0, \Rightarrow E_{\tau 1} - E_{\tau 2} = 0; E_{\tau 1} = E_{\tau 2} \text{ (рис. 184).}$$

Учитывая, что  $D = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E$ ,  $\frac{D_{\tau 1}}{D_{\tau 2}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ . (470)

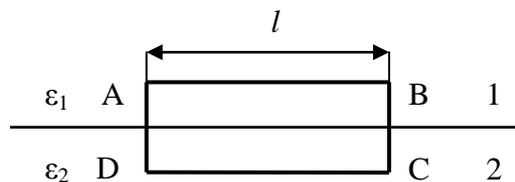


Рис. 184. Контур на границе раздела двух диэлектриков

Рассмотрим границу раздела двух однородных изотропных диэлектриков при отсутствии на ней свободных зарядов (рис. 185).

По теореме Гаусса поток вектора  $\vec{D}$  через цилиндр ничтожно малой высоты равен нулю (нет свободных зарядов).

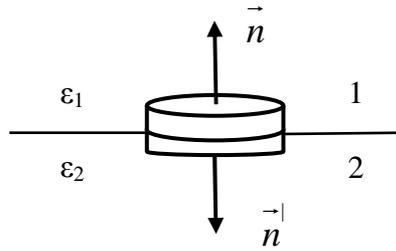


Рис. 185. Граница раздела диэлектриков

$$D_{n1} \cdot \Delta S - D_{n2} \cdot \Delta S = 0 \Rightarrow D_{n1} = D_{n2}.$$

$$\frac{E_{n1}}{E_{n2}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \quad (471)$$

Учли, что  $D_{n1} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_1 \cdot E_{n1}$ ;  $D_{n2} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_2 \cdot E_{n2}$ .

### Сегнетоэлектрики

**Сегнетоэлектрики** – диэлектрики, обладающие в определённом интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризованностью, т.е. поляризованностью в отсутствие внешнего электрического поля. Примеры: сегнетова соль  $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ ; титан бария  $BaTiO_3$ .

В отсутствие внешнего электрического поля сегнетоэлектрик (как бы мозаика из доменов) областей с различными направлениями поляризованности  $\vec{P}$  (направление  $\vec{P}$  на примере титана бария показано на рисунке 186 стрелами и знаками  $\odot$ ,  $\otimes$ ).

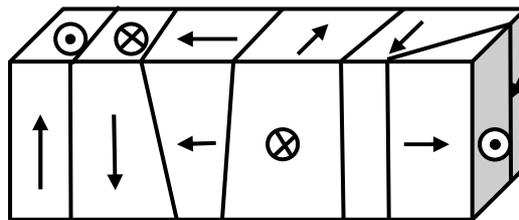


Рис. 186. Направления  $\vec{P}$  в диэлектрике

В смежных доменах эти направления различные, и дипольный момент диэлектрика равен нулю. Во внешнем поле происходит переориентация дипольных моментов сегнетоэлектрика по полю, а возникшее при этом суммарное поле доменов будет поддерживать их некоторую ориентацию и после прекращения действия внешнего поля. Поэтому сегнетоэлектрики имеют аномально большие значения диэлектрической проницаемости (для сегнетовой соли, например  $\varepsilon_{max} \approx 10^4$ ).

**Точка Кюри** – определённая температура для каждого сегнетоэлектрика, выше которой он становится обычным диэлектриком.

Сегнетоэлектрики имеют одну точку Кюри (исключение – сегнетова соль ( $-18$  и  $+24$  °C)). Вблизи точки Кюри наблюдается резкий рост теплоёмкости вещества. Превращение сегнетоэлектрика в обычный диэлектрик сопровождается фазовым переходом II рода.

Для сегнетоэлектриков связь между поляризованностью  $P$  и напряжённостью  $E$  нелинейная и зависит от значений  $E$  в предыдущие моменты времени. С увеличением  $E$  внешнего поля  $P$  растёт, достигая насыщения (кривая 1, рис. 187). Уменьшение  $P$  с уменьшением  $E$  происходит по кривой 2, и при  $E = 0$  сегнетоэлектрик сохраняет остаточную поляризованность  $P_{oc}$ .

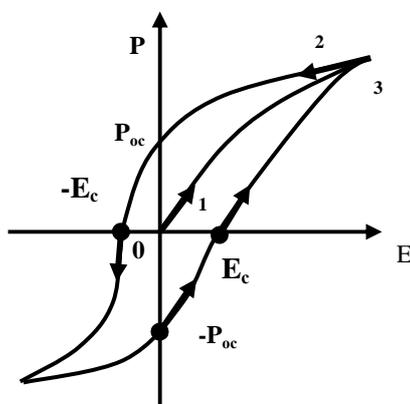


Рис. 187. Зависимость  $P(E)$  для сегнетоэлектриков

Чтобы её уничтожить, надо приложить электрическое поле обратного направления ( $-E_c$ ).  $E_c$  – коэрцитивная сила. Если  $E$  изменять далее, то  $P$  изменяется по кривой 3 петли гистерезиса.

### Проводники в электростатическом поле

Если поместить проводник во внешнее электрическое поле и его зарядить, то на заряды проводника будет действовать электростатическое поле, в результате чего они начнут перемещаться до тех пор, пока не установится равновесное распределение зарядов, при котором электростатическое поле внутри проводника обращается в ноль  $\vec{E} = 0$ .

Иначе, если бы поле не было равно нулю, то в проводнике возникло бы упорядоченное движение зарядов без затраты энергии от внешнего источника, что противоречит закону сохранения энергии.

Следствия этого ( $\vec{E} = -grad\varphi = 0 \Rightarrow \varphi = const$ ):

- потенциал во всех точках проводника одинаков;
- поверхность проводника является эквипотенциальной;

- вектор  $\vec{E}$  направлен по нормали к каждой точке поверхности;
- при помещении нейтрального проводника во внешнее поле свободные заряды (электроны и ионы) начнут перемещаться: положительные по полю, а отрицательные против поля (рис. 188). На одном конце проводника будет избыток положительных зарядов, на другом – отрицательных.

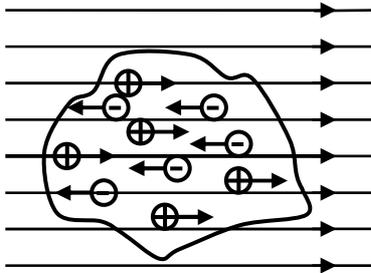


Рис. 188. Проводник во внешнем поле

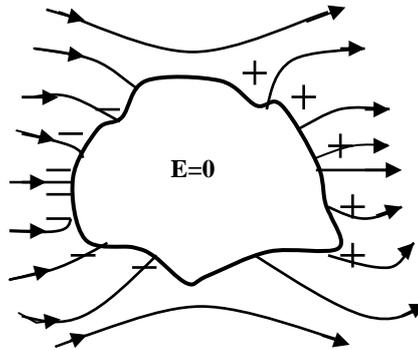


Рис. 189. Проводник во внешнем поле

Процесс будет продолжаться до тех пор, пока напряжённость поля внутри проводника не станет равна нулю, а линии напряжённости вне проводника – перпендикулярными его поверхности (рис. 189).

Если проводнику сообщить некоторый заряд  $q$ , то нескомпенсированные заряды располагаются только на поверхности проводника, причём  $D = \sigma$  и  $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \cdot \epsilon}$ , где  $\sigma$  – поверхностная плотность зарядов и  $\epsilon$  –

диэлектрическая проницаемость среды, окружающей проводник.

Нейтральный проводник, внесённый в электростатическое поле, разрывает часть линий напряжённости; они заканчиваются на отрицательных зарядах и вновь начинаются на положительных.

Индукцированные заряды располагаются на внешней поверхности проводника. Явление перераспределения поверхностных зарядов на проводнике во внешнем электростатическом поле называется электростатической индукцией.

### Ёмкость. Конденсаторы

Рассмотрим уединённый проводник – проводник, удалённый от других тел и зарядов. Из опыта следует, что разные проводники, будучи одинаково заряженными, имеют разные потенциалы.

Физическая величина  $C$ , равная отношению заряда проводника  $q$  к его потенциалу  $\phi$ , называется электрической ёмкостью проводника

$$C = \frac{q}{\varphi}. \quad (472)$$

Ёмкость уединённого проводника численно равна заряду, который нужно сообщить этому проводнику для того, чтобы изменить его потенциал на единицу. Она зависит от формы и размеров проводника и диэлектрических свойств окружающей среды. Ёмкости геометрически подобных проводников пропорциональны их линейным размерам.

Если проводник имеет форму шара

$$C = \frac{q}{\varphi} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot R, \quad (473)$$

где  $R$  – радиус шара.

Единица ёмкости – фарад (Ф): 1Ф – ёмкость такого уединённого проводника, потенциал которого изменяется на 1В при сообщении ему заряда 1 Кл. Ёмкостью 1 Ф обладает шар с радиусом  $R = 9 \cdot 10^6$  км. Ёмкость Земли 0,7 мФ.

Если к проводнику с зарядом  $q$  приблизить другие тела, то на их поверхности возникнут индуцированные (на проводнике) или связанные (на диэлектрике) заряды. Эти заряды ослабляют поле, созданное зарядом  $q$ , тем самым понижая потенциал проводника и повышая его ёмкость.

Конденсатор – это система из двух проводников (обкладок) с одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами, форма и расположение которых таковы, что поле сосредоточено в узком зазоре между обкладками. Условное обозначение показано на рисунке (рис. 190).



Конденсатор постоянной ёмкости



Конденсатор переменной ёмкости

*Рис. 190. Условные обозначения конденсаторов*

Ёмкость конденсатора – физическая величина, равная отношению заряда  $q$ , накопленного в конденсаторе, к разности потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$

между его обкладками:  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ .

1. Ёмкость плоского конденсатора (две параллельные металлические пластины площадью  $S$  каждая, расположенные на расстоянии  $d$  друг от друга

$$(\sigma = \frac{q}{S}); \quad C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q}{\frac{\sigma \cdot d}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon}} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot S}{d}. \quad (474)$$

Электрическое поле в таком конденсаторе является однородным. В таком поле напряжённость и разность потенциалов на обкладках конденсатора связаны следующим соотношением:  $E = \frac{U}{d}$  или  $E = \frac{\Delta\varphi}{d}$ , где  $\Delta\varphi$  или  $U$  – разность потенциалов между обкладками конденсатора;  $d$  – расстояние между ними.

2. Ёмкость цилиндрического конденсатора (два коаксиальных цилиндра длиной  $l$  с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ )

$$C = \frac{q}{\frac{q}{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot l} \cdot \ln \frac{r_2}{r_1}} = \frac{2 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot l}{\ln \frac{r_2}{r_1}}. \quad (475)$$

3. Ёмкость сферического конденсатора (две концентрических сферы с радиусами  $r_1$  и  $r_2$ )

$$C = \frac{q}{\frac{q}{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon} \cdot (\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2})} = 4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \frac{r_1 \cdot r_2}{r_2 - r_1}. \quad (476)$$

### Соединение конденсаторов

1. Параллельное соединение (рис. 191).

При параллельном соединении конденсаторов разность потенциалов одинакова для обоих конденсаторов:  $\Delta\varphi = const$ , а заряд батареи конденсаторов равен  $q = q_1 + q_2$ . Электроёмкость двух параллельно соединённых конденсаторов равна

$$C = \frac{q}{\Delta\varphi} = \frac{q_1 + q_2}{\Delta\varphi}.$$

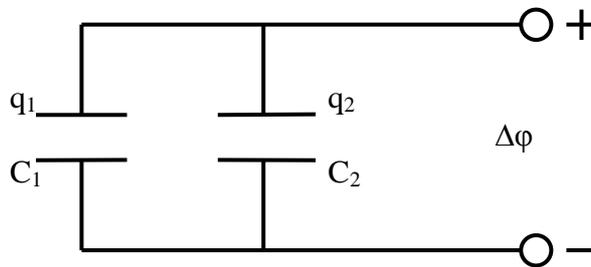


Рис. 191. Два параллельно соединённых конденсатора

Учитывая, что  $q_1 = C_1 \cdot \Delta\varphi$ ;  $q_2 = C_2 \cdot \Delta\varphi$ , получаем

$$C = C_1 + C_2.$$

Для  $n$  конденсаторов

$$q = \sum_{i=1}^n q_i; U = const; C = \sum_{i=1}^n C_i. \quad (477)$$

1. Последовательное соединение (рис. 172).

При последовательном соединении конденсаторов их заряды одинаковы, т.к. на соединённых пластинах суммарный заряд равен нулю. Разность потенциалов на батарее конденсаторов равна сумме разностей потенциалов на каждом конденсаторе:  $\Delta\varphi = \Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2$ , но

$$\Delta\varphi = \frac{q}{C}; \Delta\varphi_1 = \frac{q}{C_1}; \Delta\varphi_2 = \frac{q}{C_2}.$$

Поэтому получим  $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$ .

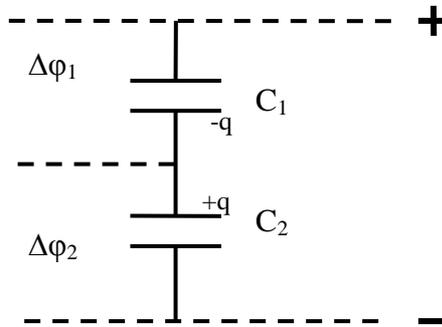


Рис. 192. Два последовательно соединённых конденсатора

Для  $n$  конденсаторов

$$q = const; U = \sum_{i=1}^n U_i; \frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}. \quad (478)$$

### Энергия системы неподвижных точечных зарядов

Для системы двух зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, каждый из них в поле другого обладает потенциальной энергией

$$W_1 = q_1 \cdot \varphi_{12} = q_1 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_2}{r} = q_2 \cdot \frac{1}{4 \cdot \pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{r} = q_2 \cdot \varphi_{21} = W_2.$$

Поэтому  $W = q_1 \cdot \varphi_{12} = q_2 \cdot \varphi_{21} = \frac{1}{2} \cdot (q_1 \cdot \varphi_{12} + q_2 \cdot \varphi_{21})$ . Добавляя последовательно по одному заряду, получим, что энергия взаимодействия системы  $n$  неподвижных точечных зарядов равна

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^n q_i \cdot \varphi_i, \quad (479)$$

где  $\varphi_i$  – потенциал, создаваемый в той точке, где находится заряд  $q_i$ , всеми зарядами, кроме  $i$ -ого.

### **Энергия заряженного уединённого проводника**

Рассмотрим уединённый проводник, заряд, ёмкость и потенциал которого равны  $q$ ,  $C$ ,  $\varphi$ . Элементарная работа  $dA$ , совершаемая внешними силами по преодолению кулоновских сил отталкивания при перенесении заряда  $dq$  из бесконечности на проводник, равна  $dA = \varphi \cdot dq = C \cdot \varphi d\varphi$ . Чтобы зарядить проводник от нулевого потенциала до  $\varphi$ , необходимо совершить работу  $A = \int_0^{\varphi} C \cdot \varphi d\varphi = \frac{C \cdot \varphi^2}{2}$ .

до  $\varphi$ , необходимо совершить работу  $A = \int_0^{\varphi} C \cdot \varphi d\varphi = \frac{C \cdot \varphi^2}{2}$ .

Энергия заряженного, уединённого проводника (используя  $C = \frac{q}{\varphi}$ ):

$$W = \frac{C \cdot \varphi^2}{2} = \frac{q^2}{2 \cdot C} = \frac{q \cdot \varphi}{2}, \quad (480)$$

или

$$W = \frac{C \cdot U^2}{2}.$$

### **3.1.23. Энергия заряженного конденсатора**

Элементарная работа внешних сил по перенесению малого заряда  $dq$  с обкладки 2 конденсатора на обкладку 1:  $dA = \Delta\varphi \cdot dq = \frac{q \cdot dq}{C}$ .

Работа внешних сил при увеличении заряда конденсатора от 0 до  $q$

$$A = \int_0^q \frac{q \cdot dq}{C} = \frac{q^2}{2 \cdot C}.$$

Энергия заряженного конденсатора (используя  $C = \frac{q}{\Delta\varphi}$ )

$$W = \frac{q^2}{2 \cdot C} = \frac{C \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)}{2} = \frac{q \cdot \Delta\varphi}{2}. \quad (481)$$

### **Энергия электростатического поля**

В общем случае электрическую энергию любой системы заряженных неподвижных тел – проводников и непроводников – можно найти по формуле

$$W = \frac{1}{2} \cdot \int_S \varphi \cdot \sigma dS + \frac{1}{2} \cdot \int_V \varphi \cdot \rho dV, \quad (482)$$

где  $\sigma$  и  $\rho$  – поверхностная и объёмная плотности зарядов;  $\varphi$  – потенциал результирующего поля всех свободных и связанных зарядов в точках малых элементов  $dS$  и  $dV$  заряженных поверхностей и объёмов. Интегрирование проводится по всем заряженным поверхностям  $S$  и по всему заряженному объёму  $V$  тел системы.

На примере поля плоского конденсатора выразим энергию поля через его напряжённость. Для конденсатора  $C = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S / d$  и  $\Delta\varphi = E \cdot d$ . Отсюда

$$W = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot S \cdot d = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot V. \quad (483)$$

В однородном поле конденсатора его энергия распределена равномерно по всему объёму поля  $V = S \cdot d$ .

**Объёмная плотность энергии** электростатического поля плоского конденсатора  $\omega$

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 = \frac{1}{2} \cdot E \cdot D, \quad (484)$$

где  $D = \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E$  – электрическое смещение. Эта формула является отражением того факта, что электрическая энергия сосредоточена в электростатическом поле.

**Пондеомоторные силы** – механические силы, действующие на заряженные тела, помещённые в электромагнитное поле.

Например, в плоском конденсаторе сила, с которой пластины конденсатора притягивают друг друга, совершает работу за счёт уменьшения потенциальной энергии системы. С учётом  $\sigma = \frac{q}{S}$  и  $E = \frac{\sigma}{\varepsilon \cdot \varepsilon_0}$ , по-

лучаем

$$F = -\frac{dW}{dx} = -\frac{q}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot S} = -\frac{\sigma^2 \cdot S}{2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0} = -\frac{1}{2} \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2 \cdot S, \quad (485)$$

где знак минус указывает на то, что эта сила является силой притяжения. Под действием этой силы обкладки конденсатора сжимают пластину диэлектрика, помещённого между ними, и в диэлектрике возникает давление

$$p = F / S = \sigma^2 / 2 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 = 0,5 \cdot \varepsilon \cdot \varepsilon_0 \cdot E^2. \quad (486)$$

## 3.2. Постоянный электрический ток

### *Постоянный электрический ток, сила и плотность тока*

**Электродинамика** – раздел учения об электричестве, в котором рассматриваются явления и процессы, обусловленные движением электрических зарядов.

**Электрическим током** называется упорядоченное движение электрических зарядов.

За направление тока принимают направления движения положительных зарядов.

Количественной мерой электрического тока служит **сила тока**  $I$  – скалярная физическая величина, равная отношению заряда  $dq$ , переносимого сквозь рассматриваемую поверхность за малый промежуток времени к величине  $dt$  этого промежутка:

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (487)$$

Электрический ток называется постоянным, если сила тока и его направление не изменяются с течением времени.

Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}, \quad (488)$$

где  $q$  – электрический заряд, проходящий за время  $t$  через поперечное сечение проводника.

Единица силы тока – ампер.

Для характеристики направления электрического тока в разных точках рассматриваемой поверхности и распределения силы тока по этой поверхности служит вектор плотности тока  $\vec{j}$ . Сила тока сквозь произвольную поверхность  $S$  определяется как поток вектора плотности тока

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{dS},$$

где  $\vec{dS} = \vec{n}dS$  ( $\vec{n}$  – единичный вектор нормали (орт) к площади  $dS$ ).

**Плотностью электрического тока** называется вектор  $\vec{j}$ , совпадающий с направлением электрического тока в рассматриваемой точке и численно равный отношению силы тока  $dI$  сквозь малый элемент поверхности, ортогональный направлению тока, к площади  $dS_{\perp}$  этого элемента:

$$j = \frac{dI}{dS_{\perp}}. \quad (489)$$

Для постоянного тока  $I$ , текущего перпендикулярно сечению  $S$  проводника:

$$j = \frac{I}{S}. \quad (490)$$

Если за время  $dt$  через поперечное сечение  $S$  проводника переносится заряд  $dq = n \cdot e \cdot \langle v \rangle \cdot S dt$  (где  $n$ ,  $e$ , и  $\langle v \rangle$  – концентрация, заряд и средняя скорость упорядоченного движения зарядов), то сила тока  $I = \frac{dq}{dt} = n \cdot e \cdot \langle v \rangle \cdot S$ , а плотность тока:  $\vec{j} = n \cdot e \cdot \overline{\langle v \rangle}$ .

Единица плотности тока – А/м<sup>2</sup>.

### **Сторонние силы. Электродвижущая сила и напряжение**

Для возникновения и существования электрического тока необходимо:

- 1) наличие свободных носителей тока – заряженных частиц, способных перемещаться упорядоченно;
- 2) наличие электрического поля, энергия которого должна каким-то образом восполняться.

Если в цепи действуют только силы электростатического поля, то происходит перемещение носителей таким образом, что потенциалы всех точек выравниваются и электростатическое поле исчезает.

Для существования электрического тока необходимо наличие в цепи устройства, способного создавать и поддерживать разность потенциалов за счёт сил неэлектростатического происхождения.

Такие устройства называются источниками тока.

Силы неэлектростатического происхождения, действующие на заряды со стороны источников тока, называются сторонними.

Количественная характеристика сторонних сил – поле сторонних сил и его напряжённость  $\vec{E}_{стор}$ , определяемая сторонней силой, действующей на единичный положительный заряд.

Природа сторонних сил может быть различной. Например, в гальванических элементах они возникают за счёт энергии химических реакций между электродами и электролитами; в генераторе – за счёт механической энергии вращения ротора генератора; в солнечных батареях – за счёт энергии фотонов и т.п. Роль источника тока в электрической цепи такая же, как и роль насоса в гидравлической системе.

Под действием создаваемого поля сторонних сил электрические заряды движутся внутри источника тока против сил электростатического поля, благодаря чему на концах цепи поддерживается разность потенциалов и в цепи течёт постоянный электрический ток.

Физическая величина, определяемая работой, которую совершают сторонние силы при перемещении единичного положительного заряда, называется электродвижущей силой (ЭДС), действующей в цепи:

$$\mathcal{E} = \frac{A}{q_0}. \quad (491)$$

Эта работа совершается за счёт энергии, затрачиваемой в источнике тока, поэтому величину  $\mathcal{E}$ , можно назвать электродвижущей силой источника тока, включённого в цепь. ЭДС, как и потенциал, выражается в вольтах.

Участок цепи, на котором не действуют сторонние силы, называется однородным. Участок, на котором на носители тока действуют сторонние силы, называется неоднородным.

Работа сторонних сил по перемещению заряда  $q_0$  на замкнутом участке цепи будет  $A = \oint_{\text{стор}} \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \cdot \oint_{\text{стор}} \vec{E} \cdot d\vec{l}$ .

Отсюда ЭДС, действующая в замкнутой цепи, – это циркуляция вектора напряжённости поля сторонних сил

$$\mathcal{E} = \oint_{\text{стор}} \vec{E} \cdot d\vec{l}.$$

Следовательно, для поля сторонних сил циркуляция вектора напряжённости по замкнутому контуру не равна нулю. Поэтому поле сторонних сил непотенциально. ЭДС, на участке 1–2 цепи, равна

$$\mathcal{E}_{12} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l}.$$

Если на заряд  $q_0$  действуют как сторонние силы, так и силы электростатического поля, то результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{стор}} + \vec{F}_e = q_0 \cdot (\vec{E}_{\text{стор}} + \vec{E}).$$

Работа сторонней силы по перемещению заряда  $q_0$  на участке 1–2 будет

$$A_{12} = q_0 \cdot \int_1^2 \vec{E}_{\text{стор}} \cdot d\vec{l} + q_0 \cdot \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = q_0 \cdot \mathcal{E}_{12} + q_0 \cdot (\varphi_1 - \varphi_2).$$

Для замкнутой цепи работа электростатических сил равна нулю, поэтому  $A = q_0 \cdot \mathcal{E}$ .

**Напряжением**  $U$  на участке 1–2 называется физическая величина, численно равная суммарной работе, совершаемой электростатическими

и сторонними силами по перемещению единичного положительного заряда на данном участке цепи:

$$U = \frac{A_{12}}{q_0} = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}. \quad (492)$$

Понятие «напряжение» является обобщением понятия разности потенциалов: напряжение на концах участка цепи равно разности потенциалов, если участок не содержит источника тока (т.е. на участке отсутствует ЭДС; сторонние силы отсутствуют).

### **Закон Ома. Электрическое сопротивление**

Закон Ома для однородного участка цепи (не содержащего источника тока): **сила тока, текущего по однородному металлическому проводнику, пропорциональна напряжению на конце проводника** (интегральная форма закона Ома).

$$I = \frac{U}{R}. \quad (493)$$

Коэффициент пропорциональности  $R$  называется электрическим сопротивлением проводника. Единица электрического сопротивления – Ом. Величина

$$G = \frac{1}{R} \quad (494)$$

называется электрической проводимостью проводника. Единица электрической проводимости – сименс (См). 1См – проводимость участка электрической цепи сопротивлением 1Ом.

Сопротивление проводника зависит от его размеров и формы, а также от материала, из которого проводник изготовлен.

Для однородного линейного проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  сопротивление рассчитывается по формуле

$$R = \rho \cdot \frac{l}{S}, \quad (495)$$

где  $\rho$  – коэффициент пропорциональности (табл.), характеризующий материал проводника, который называется удельным электрическим сопротивлением. Единица удельного электрического сопротивления – 1 Ом·м.

Физический смысл электрического сопротивления заключается в том, что упорядоченному движению электронов в металлическом проводнике препятствуют их столкновения с колеблющимися ионами кристаллической решётки.

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется удельной электрической проводимостью вещества проводника

$$\gamma = \frac{1}{\rho}. \quad (496)$$

Единица удельного электрического сопротивления – сименс на метр (1 См/м). В проводнике  $\frac{U}{l} = E$  – напряжённость электрического поля  $R = \rho \cdot \frac{l}{S}$ ,  $j = \frac{I}{S}$ .

Из закона Ома получим соотношение  $\frac{I}{S} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{U}{l}$ , откуда  $j = \gamma \cdot E$ .

В векторной форме соотношение  $\vec{j} = \gamma \cdot \vec{E}$  (497) называется **законом Ома в дифференциальной форме**. Этот закон связывает плотность тока в любой точке внутри проводника с напряжённостью электрического поля в этой точке.

### Сопротивление соединения проводников

#### Последовательное соединение $n$ проводников (рис. 193)

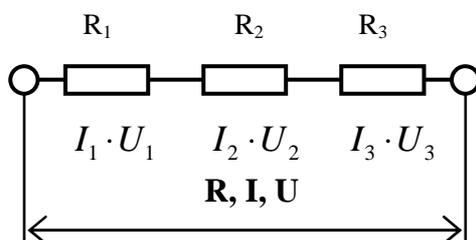


Рис. 193. Последовательное соединение проводников

$$I_1 = I_2 = \dots = I_n = I,$$

$$I \cdot R = U = \sum_{i=1}^n U_i = I \cdot \sum_{i=1}^n R_i, \quad (498)$$

$$R = \sum_{i=1}^n R_i.$$

#### Параллельное соединение $n$ проводников (рис. 194)

$$U_1 = U_2 = \dots = U_n = U,$$

$$\frac{U}{R} = I = \sum_{i=1}^n I_i = U \cdot \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i},$$

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (499)$$

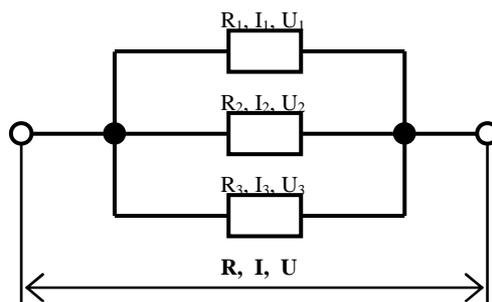


Рис. 194. Параллельное соединение проводников

### Температурная зависимость сопротивления

Опытным путём было установлено, что для большинства случаев изменение удельного сопротивления (а значит и сопротивления) с температурой описывается линейным законом

$$\rho = \rho_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t) \text{ или } R = R_0 \cdot (1 + \alpha \cdot t), \quad (500)$$

где  $\rho$  и  $\rho_0$ ,  $R$  и  $R_0$  – соответственно удельные сопротивления и сопротивления при температурах  $t$  и  $0^\circ\text{C}$ ,  $\alpha$  – температурный коэффициент сопротивления.

Сопротивление металлов при очень низких температурах  $T_k$  (0,14 – 20 К), называемых критическими, характерных для каждого вещества, скачкообразно уменьшается до нуля, и металл становится абсолютным проводником. Это явление называется **сверхпроводимостью**.

### Работа и мощность тока. Закон Джоуля–Ленца

Кулоновские и сторонние силы при перемещении заряда  $q$  вдоль электрической цепи совершают работу  $A$ .

Рассмотрим однородный проводник с сопротивлением  $R$ . к концам которого приложено напряжение  $U$ . За время  $dt$  через сечение проводника переносится заряд  $dq = I \cdot dt$ . Работа по перемещению заряда  $q_0$  между двумя точками поля равна  $A_{12} = q_0 \cdot \Delta\phi$ , откуда

$$dA = Udq = U \cdot Idt = I^2 \cdot R \cdot dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (501)$$

Мощность тока

$$P = \frac{dA}{dt} = U \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}. \quad (502)$$

Единица мощности – ватт (1 Вт).

Внесистемные единицы работы тока: ватт-час (Вт·ч) и киловатт-час (кВт·ч). 1 Вт·ч – работа тока мощностью 1 Вт в течение 1 ч:

1Вт·ч = 3600 Вт·с =  $3,6 \cdot 10^3$  Дж. Аналогично 1 кВт·ч = 1000 Вт·ч =  $3,6 \cdot 10^6$  Дж.

При прохождении тока по проводнику происходит рассеяние энергии вследствие столкновений носителей тока между собой и с любыми другими частицами среды. Если ток проходит по неподвижному проводнику, то вся работа тока  $dA$  идёт на нагревание проводника (выделение теплоты  $dQ$ ).

По закону сохранения энергии  $dA = dQ$ .

$$dQ = I \cdot U dt = I^2 \cdot R dt = \frac{U^2}{R} dt. \quad (503)$$

Количество теплоты  $Q$ , выделяющееся за конечный промежуток времени от 0 до  $t$  постоянным током  $I$  во всём объёме проводника, электрическое сопротивление которого  $R$ , получаем, интегрируя предыдущее выражение:

$$Q = \int_0^t I^2 \cdot R dt = I^2 \cdot R \cdot t. \quad (504)$$

**Закон Джоуля–Ленца (в интегральной форме):** количество теплоты, выделяемое постоянным электрическим током на участке цепи, равно произведению квадрату силы тока на время его прохождения и электрическое сопротивление этого участка цепи.

Выделим в проводнике цилиндрический объём  $dV = dS dl$  (ось цилиндра совпадает с направлением тока). Сопротивление этого объёма

$$R = \rho \cdot \frac{dl}{dS}.$$

По закону Джоуля–Ленца за время  $dt$  в этом объёме выделится теплота

$$dQ = I^2 \cdot R dt = \frac{\rho dl}{dS} \cdot (jdS)^2 dt = \rho \cdot j^2 dV dt. \quad (505)$$

**Удельной тепловой мощностью тока  $\omega$**  называется количество теплоты, выделяющееся в единицу времени в единице объёма:

$$\omega = \frac{dQ}{dV dt} = \rho \cdot j^2. \quad (506)$$

Используя дифференциальную форму закона Ома  $j = \gamma \cdot E$  и определение  $\rho = \frac{1}{\gamma}$ , получим закон Джоуля–Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = j \cdot E = \gamma \cdot E^2. \quad (507)$$

Тепловое действие электрического тока используется в осветительных и электронагревательных приборах, электросварке.

### Закон Ома для неоднородного участка цепи

Рассмотрим неоднородный участок цепи 1–2, на котором присутствуют силы неэлектрического происхождения (сторонние силы).

Обозначим через  $\varepsilon_{12}$  ЭДС на участке 1–2;  $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$  – приложенную на концах участка разность потенциалов.

Если участок 1–2 неподвижен, то (по закону сохранения энергии) общая работа  $A_{12}$  сторонних и электростатических сил, совершаемая над носителями тока, равна теплоте  $Q$ , выделяющейся на участке.

Работа сил по перемещению заряда  $q_0$

$$A_{12} = q_0 \cdot \varepsilon_{12} + q_0 \cdot \Delta\varphi.$$

ЭДС  $\varepsilon_{12}$ , как и сила тока  $I$ , – величина скалярная. Если ЭДС способствует движению положительных зарядов в выбранном направлении, то  $\varepsilon_{12} > 0$ , если препятствует, то  $\varepsilon_{12} < 0$ .

За время  $t$  в проводнике выделится теплота

$$Q = I^2 \cdot R \cdot t = I \cdot R \cdot (I \cdot t) = I \cdot R \cdot q_0.$$

Отсюда следует **закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме**, который является **обобщённым законом Ома**:

$$I \cdot R = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12},$$

или 
$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_{12}}{R}. \quad (508)$$

Частные случаи:

1. Если на данном участке цепи источник тока отсутствует, то мы получаем закон Ома для однородного участка цепи

$$I = \frac{U}{R}.$$

2. Если цепь замкнута ( $\Delta\varphi = 0$ ), то получаем закон Ома для замкнутой цепи

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{\varepsilon}{R_{\text{внеш}} + r_{\text{внут}}},$$

где  $\varepsilon$  – ЭДС, действующая в цепи;  $R$  – суммарное сопротивление всей цепи;  $R_{\text{внеш}}$  – сопротивление внешней цепи;  $r_{\text{внут}}$  – внутреннее сопротивление источника тока.

3. Если цепь разомкнута, то

$$I = 0 \text{ и } \varepsilon_{12} = \varphi_2 - \varphi_1,$$

т.е. ЭДС, действующая в разомкнутой цепи, равна разности потенциалов на её концах.

4. В случае короткого замыкания сопротивление внешней цепи  $R_{\text{внеш}} = 0$  и сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r_{\text{внут}}}$$

в этом случае ограничивается только величиной внутреннего сопротивления источника тока.

### Правила Кирхгофа для разветлённых цепей

Узлом электрической цепи называется любая точка разветвления цепи, в которой сходится не менее трёх проводников с током. Ток, входящий в узел, считается положительным, а ток, выходящий из узла, – отрицательным.

**Первое правило Кирхгофа:** алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю.

Например, для узла  $A$  (рис. 195) первое правило Кирхгофа

$$I_1 - I_2 - I_3 + I_4 + I_5 - I_6 = 0.$$

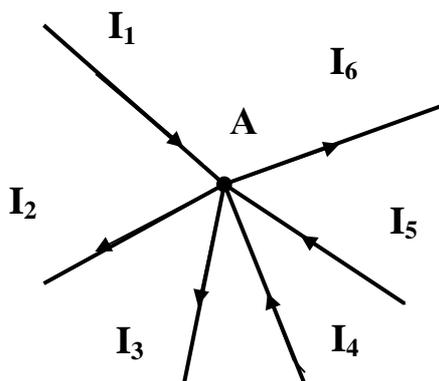


Рис.195. К первому правилу Кирхгофа

**Второе правило Кирхгофа:** в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвлённой электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов  $I_i$  на сопротивление  $R_i$  соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС  $\mathcal{E}_k$ , встречающихся в этом контуре:

$$\sum_i I_i \cdot R_i = \sum_k \mathcal{E}_k. \quad (509)$$

Например, для обхода по часовой стрелке замкнутого контура (рис. 196) ABCDA второе правило Кирхгофа имеет вид

$$I_1 \cdot R_1 - I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

При расчёте сложных цепей с применением правил Кирхгофа необходимо:

1. Выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов определяется при решении задачи: если искомый ток получается положительным, то его направление было выбрано правильно, а если отрицательным – его истинное направление противоположно выбранному.

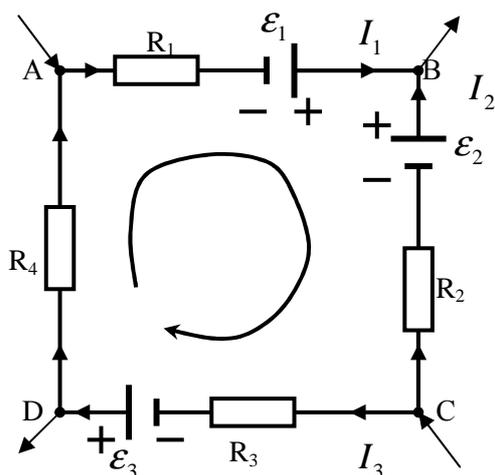


Рис. 196. Ко второму правилу Кирхгофа

2. Выбрать направление обхода контура и строго его придерживаться; произведение  $I \cdot R$  положительно, если ток на данном участке совпадает с направлением обхода. ЭДС, действующие по выбранному направлению обхода, считаются положительными, против – отрицательными.

3. Составить столько уравнений, чтобы их число было равно числу искомых величин (в систему уравнений должны входить все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи), каждый рассматриваемый контур должен содержать хотя бы один элемент, не содержащийся в предыдущих контурах, чтобы не получались уравнения, которые являются простой комбинацией уже составленных уравнений.

### 3.3. Электрический ток в различных средах

#### Электрический ток в металлах

Носителями электрического тока в металле являются свободные электроны.

При образовании кристаллической решётки электроны внешних оболочек атомов (валентные электроны) обобществляются, и кристалл представляет собой решётку неподвижных ионов металла, между которыми хаотически движутся свободные электроны, образуя электронный газ, обладающий свойствами идеального газа.

Согласно теории Друде–Лоренца, электроны обладают той же энергией теплового движения, что и молекулы одноатомного газа. Средняя скорость теплового движения электронов

$$\langle u \rangle = \sqrt{\frac{8 \cdot k \cdot T}{\pi \cdot m_e}}, \quad (510)$$

где  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К – постоянная Больцмана;  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31}$  кг – масса электрона;  $T$  – абсолютная (или термодинамическая) температура.

При комнатной температуре ( $T = 300$  К) средняя скорость теплового движения электронов равна  $\langle u \rangle = 1,1 \cdot 10^5$  м/с. Хаотическое тепловое движение электронов не может привести к возникновению тока.

При наложении внешнего электрического поля на металлический проводник в дополнение к хаотическому тепловому движению возникает упорядоченное движение электронов (электрический ток).

Даже при предельно допустимых значениях плотности тока средняя скорость  $\langle v \rangle$  упорядоченного движения электронов обуславливающего электрический ток, значительно меньше их скорости теплового движения  $\langle u \rangle$ :  $\langle v \rangle \ll \langle u \rangle$ .

#### Основные законы электрического тока в классической теории электропроводности металлов

Пусть в металлическом проводнике действует поле  $E = const$ . Под действием силы  $F = e \cdot E$  заряд  $e$  движется равноускоренно с ускорением  $a = \frac{e \cdot E}{m}$  и к концу свободного пробега приобретает скорость

$$v_{\max} = \frac{e \cdot E \cdot \langle t \rangle}{m}.$$

Среднее время свободного пробега электронов  $\langle t \rangle = \frac{\langle l \rangle}{\langle u \rangle}$  определяется средней длиной свободного пробега  $\langle l \rangle$  и средней скоростью движения электронов относительно кристаллической решётки  $\langle u \rangle + \langle v \rangle \cong \langle u \rangle$ .

Средняя скорость направленного движения электронов

$$\langle v \rangle = \frac{\langle v_{\max} \rangle + 0}{2} = \frac{e \cdot E \cdot \langle t \rangle}{2 \cdot m} = \frac{e \cdot E \cdot \langle l \rangle}{2 \cdot m \cdot \langle u \rangle}. \quad (511)$$

$$\text{Плотность тока } j = n \cdot e \cdot \langle v \rangle = \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle l \rangle}{2 \cdot m \cdot \langle u \rangle} \cdot E = \gamma \cdot E, \quad (512)$$

где  $\gamma = \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle l \rangle}{2 \cdot m \cdot \langle u \rangle}$  – удельная проводимость металла.

**Закон Джоуля-Ленца.** К концу свободного пробега электрон под действием поля приобретает дополнительную кинетическую энергию

$$\langle E_K \rangle = \frac{m \cdot v_{\max}^2}{2} = \frac{e^2 \cdot \langle l \rangle^2}{2 \cdot m \cdot \langle u \rangle^2} \cdot E^2, \quad (513)$$

которая при соударении электрона с ионом полностью передаётся решётке.

Если  $n$  – концентрация электронов, то в единицу времени в единице объёма происходит  $n \cdot \frac{\langle u \rangle}{\langle l \rangle}$  столкновений, и решётке передаётся энергия

гия

$$\omega = n \cdot \frac{\langle u \rangle}{\langle l \rangle} \cdot \langle E_K \rangle = \frac{n \cdot e^2 \cdot \langle l \rangle}{2 \cdot m \cdot \langle u \rangle^2} \cdot E^2 = \gamma \cdot E^2. \quad (514)$$

**Закон Видемана-Франца.** Отношение теплопроводности  $\lambda$  к удельной проводимости  $\gamma$  для всех металлов при одной и той же температуре одинаково и увеличивается пропорционально температуре

$$\frac{\lambda}{\gamma} = \beta \cdot T, \quad (515)$$

где  $\beta = 3 \cdot \left(\frac{k}{e}\right)^2$ .

### **Трудности классической теории**

1. Температурная зависимость сопротивления:  $\langle u \rangle \sim \sqrt{T}$ ,  $R \sim 1/\gamma$ ,  $\Rightarrow R \sim \sqrt{T}$ , что противоречит опытным данным, согласно которым  $R \sim T$ .

2. Оценка среднего пробега электронов. Чтобы получить величины удельной проводимости  $\gamma$ , совпадающие с опытными данными, следует принимать  $\langle l \rangle$  в сотни раз больше межатомных расстояний в кристалле.

3. Теплоёмкость металла складывается из теплоёмкости кристаллической решётки и теплоёмкости электронного газа. Поэтому удельная (расчётная на один моль) теплоёмкость металла должна быть существенно выше теплоёмкости диэлектриков, у которых нет свободных электронов, что противоречит эксперименту.

Все эти трудности снимаются квантовой теорией.

### **Эмиссионные явления**

**Работа выхода электронов из металла** – работа, которую нужно затратить для удаления электрона из металла в вакуум.

Работа выхода зависит от химической природы металлов и от чистоты их поверхности. Подобрав определённым образом покрытие поверхности, можно значительно изменить работу выхода.

Работа выхода выражается в электрон-вольтах (эВ): 1эВ равен работе, которую совершают силы поля при перемещении элементарного электрического заряда между точками, разность потенциалов между которыми равна 1 В. Так как  $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл} \Rightarrow 1\text{эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$ .

**Электронная эмиссия** – явление испускания электронов из металлов при сообщении электронам энергии, равной или большей работе выхода.

1. Термоэлектронная эмиссия – испускание электронов нагретыми металлами. Пример использования – электронные лампы.

2. Фотоэлектронная эмиссия – эмиссия электронов из металла под действием электромагнитного излучения. Пример использования – фотодатчики.

3. Вторичная электронная эмиссия – испускание электронов поверхностью металлов, полупроводников или диэлектриков при бомбардировке их пучком электронов. Отношение числа вторичных электронов  $n_2$  к числу первичных  $n_1$ , вызвавших эмиссию, называется коэффициентом вторичной эмиссии  $\delta = n_2 / n_1$ . Пример использования – фотоэлектронные умножители.

4. Автоэлектронная эмиссия – эмиссия электронов с поверхности металлов под действием сильного внешнего электрического поля.

### Электролиз

Вещества, растворы которых проводят электрический ток, называются **электролитами**. Как правило, это растворы солей.

При растворении солей в жидкости, взаимодействие молекул жидкости с молекулами соли ослабляет связь между частями молекул и некоторые из них разделяются на положительные и отрицательные ионы. В электрическом поле ионы электролита приходят в движение. Положительные ионы движутся к катоду, отрицательные – к аноду. Так возникает электрический ток в электролите (рис. 197).

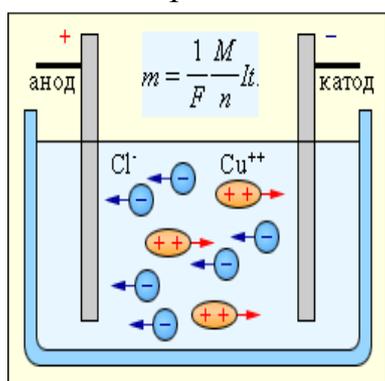


Рис. 197. Электрический ток в электролите

Майкл Фарадей установил, что при прохождении электрического тока через электролит масса вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна заряду, прошедшему через электролит:

$$m = k \cdot \Delta q \text{ или } m = k \cdot I \cdot \Delta t, \quad (516)$$

где  $I$  – сила тока;  $\Delta t$  – время пропускания тока через электролит;  $k$  – электрохимический эквивалент.

Он равен

$$k = \frac{1}{e \cdot N} \cdot \frac{M}{n}, \quad (517)$$

где  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл – величина элементарного заряда;

$N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$  моль<sup>-1</sup> – число Авогадро;  $M$  – молярная масса;  $n$  – валентность иона.

$$(517) \rightarrow (518): \quad m = \frac{1}{e \cdot N} \cdot \frac{M}{n} \cdot I \cdot \Delta t. \quad (518)$$

Электрохимический эквивалент  $k$  численно равен массе выделившегося на электродах вещества при переносе ионами заряда в 1 Кл.

Произведение величины элементарного заряда на число Авогадро называется числом Фарадея:  $F = e \cdot N_A$ ;  $F \approx 96500 \left( \frac{\text{Кл}}{\text{моль}} \right)$ . Число Фарадея – это электрический заряд, переносимый веществом в количестве 1 моля при электролизе.

Явление электролиза широко применяется в современном промышленном производстве. С помощью электролиза из солей и оксидов

получают многие металлы, например, медь, никель, алюминий. Путём электролиза можно наносить тонкие слои металлов на поверхность изделий из других металлов, для защиты от коррозии.

### **Газовые разряды**

Под действием **ионизатора** (сильный нагрев, жёсткое излучение, потоки частиц) нейтральные молекулы (атомы) газа расщепляются на ионы и свободные электроны – происходит **ионизация газа**.

**Энергия ионизации** – энергия, которую надо затратить, чтобы из молекулы (атома) выбить один электрон.

**Рекомбинацией** называется процесс обратный ионизации: положительные и отрицательные ионы, положительные ионы и электроны, встречаясь, воссоединяются между собой с образованием нейтральных атомов и молекул.

Прохождение электрического тока через ионизированный газ называется **газовым разрядом**.

Разряд, существующий только под действием внешних ионизаторов, называется **несамостоятельным газовым разрядом**.

Разряд в газе, сохраняющийся после прекращения действия ионизатора, называется самостоятельным газовым разрядом.

Рассмотрим цепь, содержащую газовый промежуток (рис. 197), подвергающийся непрерывному, постоянному по интенсивности воздействию ионизатора. В результате действия ионизатора газ приобретает некоторую электропроводность и в цепи потечёт ток, зависимость которого от приложенного напряжения (вольт-амперная характеристика) представлена на рисунке (рис. 198).

На участке ОА выполняется закон Ома. Потом (участок АВ) рост силы тока замедляется, а затем (участок ВС) прекращается совсем. В этом случае число ионов и электронов, создаваемых внешним ионизатором, равно числу ионов и электронов, достигающих электродов (и нейтрализующихся на электродах). Ток  $I_{нас}$ , соответствующий участку ВС, называется **током насыщения**, и его величина определяется мощностью ионизатора.

При увеличении напряжения первичные электроны (созданные ионизатором), ускоренные электрическим полем, в свою очередь начинают ударно ионизировать молекулы газа, образуя вторичные электроны и ионы.

Общее количество ионов и электронов будет возрастать по мере приближения электронов к аноду лавинообразно. Это является причи-

ной увеличения тока на участке CD. Описанный процесс называется **ударной ионизацией**.

Наконец, при значительных напряжениях между электродами газового промежутка положительные ионы, ускоренные электрическим полем, также приобретают энергию, достаточную для ионизации молекул газа, что порождает ионные лавины. Когда возникают, кроме электронных лавин, ещё и ионные, сила тока растёт уже практически без увеличения напряжения (участок DE).

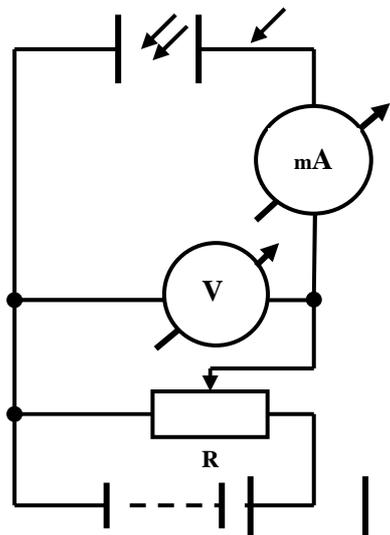


Рис. 198. Электрическая цепь, содержащая газовый промежуток

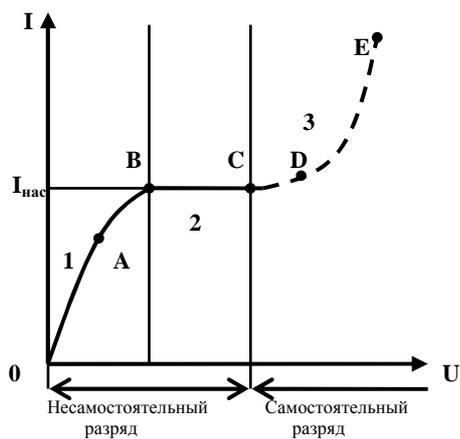


Рис. 199. Вольт-амперная характеристика

Лавинообразное размножение электронов и ионов приводит к тому, что разряд становится самостоятельным, то есть сохраняется после прекращения действия внешнего ионизатора. Напряжение, при котором возникает самостоятельный газовый разряд, называется **напряжением пробоя**.

В зависимости от давления газа, конфигурации электродов, параметров внешней цепи можно говорить о четырёх типах самостоятельного разряда:

1. Тлеющий разряд возникает при низком давлении.
2. Искровой разряд возникает при большой напряжённости электрического поля в газе, находящимся под давлением порядка атмосферного.

3. Дуговой разряд возникает: а) если после зажигания искрового разряда от мощного источника постепенно уменьшать расстояние между электродами; б) минуя стадию искры, если электроды (например, угольные) сблизить до соприкосновения, а потом развести.

4. Коронный разряд возникает при высоком давлении в резко неоднородном поле вблизи электродов с большой кривизной поверхности.

Для возникновения самостоятельного разряда необходимо, чтобы концентрация и энергия вторичных ионов и электронов, образовавшихся под действием ионизатора, были достаточны для лавинного размножения носителей (число вторичных носителей должно превышать число носителей, покидающих газовый разряд вследствие рекомбинации или нейтрализации на поверхностях, окружающих газовый разряд).

К настоящему времени все виды электрического разряда в газах исследуются и применяются во многих областях науки и техники. Тлеющий, дуговой и импульсные разряды используются при возбуждении газовых лазеров. Плазматроны, в которых основным рабочим процессом служит дуговой или ВЧ-разряд, являются важными устройствами, в ряде областей техники, в частности при получении особо чистых полупроводников и металлов. Мощные плазматроны используются в качестве реакторов в плазмохимии. На применении искрового разряда основаны прецизионные методы электроискровой обработки. При фокусировке лазерного светового излучения происходит пробой воздуха в фокусе и возникает безэлектродный разряд (подобный ВЧ-разряду в искре), называемый лазерной искрой. Мощные, сильноточные разряды в водороде были первыми шагами на пути к управляемому термоядерному синтезу.

В системе естественных наук изучение электрического разряда в газах занимает особое место в физике плазмы. При электрическом разряде в газе образуется низкотемпературная плазма, для которой характерна малая степень ионизации. В отличие от высокотемпературной (полностью ионизованной) плазмы, в низкотемпературной плазме атомы или молекулы нейтрального газа играют важную роль. Электроны, ионы и нейтральные частицы «мягко» взаимодействуют. Вследствие этого может возникнуть термодинамически неравновесная ситуация, которая ещё более усложняется, если в балансе энергии электрического разряда в газе нельзя пренебречь световым излучением. В таких случаях низкотемпературную плазму необходимо описывать с помощью кинетической теории плазмы.

### 3.4. Магнитное поле

#### *Магнитное поле и его характеристики*

Магнетизм – раздел физики, изучающий магнитные явления.

В XIX веке были экспериментально исследованы законы взаимодействия постоянных магнитов и проводников, по которым пропускался электрический ток. Опыты показали, что подобно тому, как в пространстве, окружающем электрические заряды, возникает электростатическое поле. В пространстве, окружающем токи и постоянные магниты, возникает силовое поле, которое называют магнитным.

Были установлены два экспериментальных факта:

- 1) магнитное поле действует на движущиеся электрические заряды;
- 2) движущиеся заряды создают магнитное поле.

Этим магнитное поле существенно отличается от электростатического, которое действует как на движущиеся, так и на неподвижные заряды. Магнитное поле не оказывает силового действия на неподвижные заряды.

Опыт показывает, что характер воздействия магнитного поля на ток зависит:

- 1) от формы проводника, по которому течёт ток;
- 2) расположения проводника;
- 3) направления тока.

Аналогично тому, как при исследовании электростатического поля использовался точечный пробный заряд, при исследовании магнитного поля используется замкнутый плоский контур с током (рамка с током), линейные размеры которого малы по сравнению с расстоянием до токов, образующих магнитное поле.

Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали  $\vec{n}$  к контуру. В качестве положительного направления нормали принимается направление, связанное с током правилом правого винта (правилом буравчика).

За положительное направление нормали принимается направление поступательного движения правого винта, головка которого вращается в направлении тока, текущего в рамке (рис. 199).

Магнитное поле оказывает на рамку с током ориентирующее действие, поворачивая её определённым образом. Это свойство используется для выбора направления магнитного поля.

За направление магнитного поля в данной точке принимается направление, вдоль которого располагается положительная нормаль к свободно повешенной рамке с током, или направление, совпадающее

с направлением силы, действующей на северный полюс ( $N$ ) магнитной стрелки, помещённой в данную точку поля.

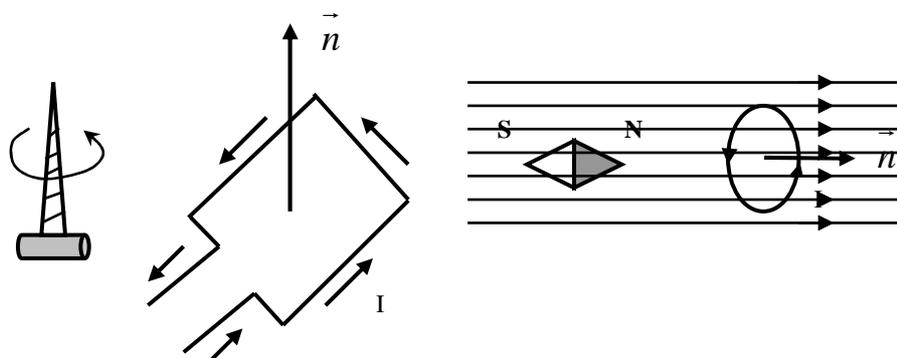


Рис. 200. Направление нормали

Магнитное поле описывается двумя количественными характеристиками:  $\vec{B}$  – вектором магнитной индукции и  $\vec{H}$  – напряжённостью магнитного поля.

Согласно гипотезе Ампера в любом теле существуют микроскопические токи, обусловленные движением электронов в атомах и молекулах. Эти микроскопические токи создают своё магнитное поле и могут поворачиваться в магнитных полях макротоков. Например, если вблизи какого-то тела поместить проводник с током (макроток), то под действием его магнитного поля микротоки во всех атомах определённым образом ориентируются, создавая в теле дополнительное магнитное поле. Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  характеризует результирующее магнитное поле, создаваемое всеми макро- и микротоками, т.е. при одном и том же токе и прочих равных условиях вектор  $\vec{B}$  в разных средах будет иметь разные значения. Вектор  $\vec{H}$  описывает магнитное поле макротоков. Связь между векторами  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$   $\vec{B} = \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}$ . (519)

Эта связь справедлива для однородной изотропной среды.  $\mu_0$  – магнитная постоянная ( $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M} = 12,56 \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{M}$ );  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (безразмерная, табличная величина), показывающая, во сколько раз магнитное поле макротоков  $H$  усиливается за счёт поля микротоков среды.

Единица магнитной индукции – 1 тесла. 1 Тл = 1 Н / (А·м).

1 тесла – магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению ин-

дукции  $\vec{B}$  поля, если по этому проводнику течёт ток 1 А. Единица напряжённости магнитного поля – 1 ампер на метр. 1 А/м – напряжённость такого поля, магнитная индукция которого в вакууме равна  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{\Gamma_H}{м}$  (как следует из (517)).

### **Вращающий момент сил на рамку с током в магнитном поле**

Рамка с током испытывает ориентирующее действие поля, поэтому на неё в магнитном поле действует пара сил. Вращающий момент сил зависит как от свойств поля в данной точке, так и от свойств рамки с током и определяется векторным произведением

$$\vec{M} = [\vec{p}_m, \vec{B}], \quad (520)$$

где  $\vec{p}_m$  – вектор магнитного момента рамки,  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции.

По определению векторного произведения скалярная величина момента

$$M = p_m \cdot B \cdot \sin \alpha, \quad (521)$$

где  $\alpha$  – угол между нормалью к плоскости контура и вектором  $\vec{B}$ .

Для плоского контура с током  $I$  магнитный момент определяется

$$\vec{p}_m = I \cdot S \cdot \vec{n}, \quad (522)$$

где  $S$  – площадь поверхности контура (рамки);  $\vec{n}$  – единичный вектор нормали к поверхности рамки. Модуль вектора магнитного момента

$$p_m = I \cdot S \quad (523)$$

Если в данную точку магнитного поля помещать рамки с различными магнитными моментами, то на них действуют различные вращающие моменты, однако отношение  $B = \frac{M_{\max}}{p_m}$  ( $M_{\max}$  – максимальный вращающий момент) для всех контуров одно и то же и поэтому может служить характеристикой магнитного поля. Следует отметить, что вектор  $\vec{B}$  может быть определён их закона Ампера и из выражения для силы Лоренца.

Магнитная индукция определяется максимальным вращающим моментом, действующим на рамку с магнитным моментом, равным единице, когда нормаль к рамке перпендикулярна направлению тока.

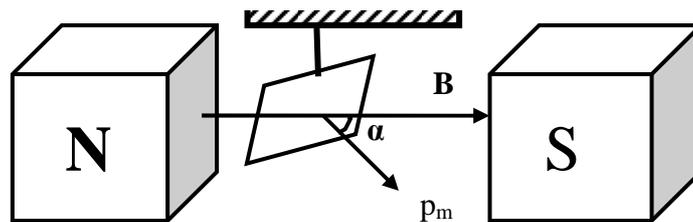


Рис. 201. Рамка с током в магнитном поле

$M = M_{\max}$  при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  радиан (рис. 201). В этом положении рамка с током будет находиться в неустойчивом положении. Устойчивое – когда плоскость рамки  $\perp$  линиям индукции.

### Графическое изображение магнитного поля

Магнитное поле графически изображается с помощью силовых линий или линий магнитной индукции. Силовая линия магнитного поля – это линия, касательная к которой в каждой точке поля совпадает с направлением вектора магнитной индукции  $\vec{B}$ .

Направление силовых линий определяется по правилу правого винта (буравчика): если поступательное движение правого винта совпадает с направлением тока в проводнике, то направление его вращательного движения укажет направление силовых линий и наоборот (рис. 202).

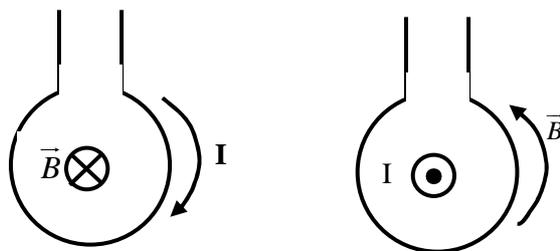
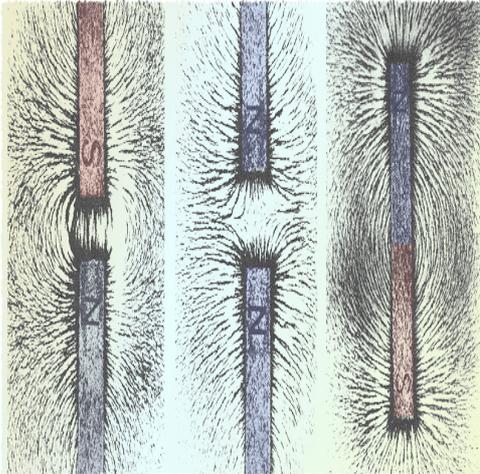
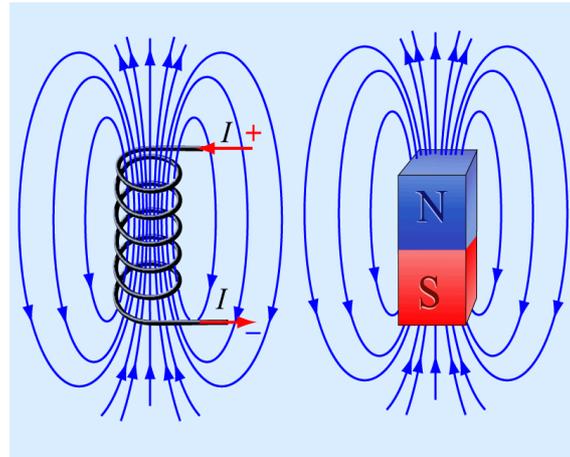


Рис. 202. К определению направления силовых линий магнитного поля

Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты. Такое поле называется вихревым (рис. 203, 204). Вспомним, что силовые линии электростатического поля разомкнуты: они начинаются на положительных зарядах, а заканчиваются на отрицательных зарядах (или в бесконечности). Такое поле называется потенциальным. Из сопоставления картины силовых линий магнитного и электростатических полей можно сделать вывод, что магнитных зарядов не существует.



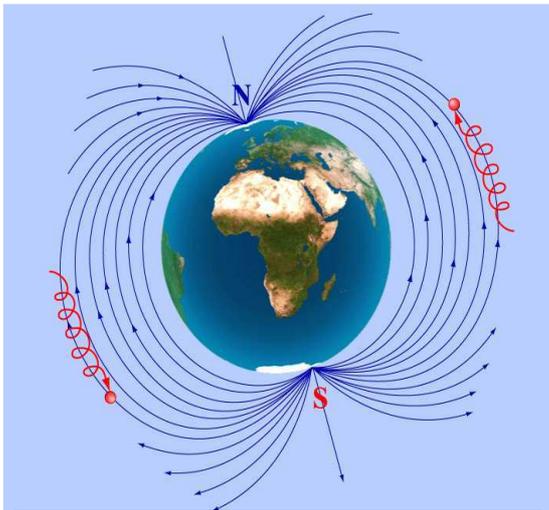
*Рис. 203. Демонстрация линии магнитной индукции полосовых магнитов с помощью металлических опилок*



*Рис. 204. Линии магнитной индукции катушки с током (слева) и полосового магнита (справа)*

Магнитное поле Земли подобно полю магнита (рис. 205).

Под действием этого поля заряженные частицы в радиационных поясах движутся по спиралям. Поскольку северный полюс магнитной стрелки указывает на север, соответствующий магнитный полюс Земли оказывается южным магнитным полюсом (так как северный полюс одного магнита притягивается к юному полюсу другого). Магнитные полюса Земли не совпадают с положением географических полюсов, находящихся на оси вращения Земли.



*Рис. 205. Магнитное поле Земли*



*Рис. 206. Северное сияние*

Солнечный ветер – постоянный радиальный поток плазмы солнечной короны в межпланетное пространство, содержащий главным образом протоны, немного ядер гелия, ионов кислорода, кремния, серы, же-

леза. Эти частицы достигают орбиты Земли, имея большую скорость. Например, скорость протонов составляет 300–750 км/с. В окрестностях Земли столкновение частиц солнечного ветра с геомагнитным полем порождает стационарную ударную волну перед магнитосферой. Солнечный ветер как бы обтекает магнитосферу, ограничивая её протяжённость в пространстве.

Границу магнитосферы при грубом рассмотрении можно считать непрозрачной для солнечного ветра. На дневной стороне границы магнитосферы магнитопауза происходит на расстоянии порядка десяти земных радиусов. Прорвавшиеся в магнитосферу частицы вызывают полярные сияния (рис. 206). Во внутренних областях магнитосферы магнитное поле удерживает, как в ловушке, потоки быстрых частиц. Эти частицы образуют радиационные пояса Земли.

Изменения интенсивности солнечного ветра, связанные со вспышками на Солнце, приводят к магнитным бурям. При этом происходит усиление полярных сияний, возрастает поток частиц в радиационных поясах, искажается магнитное поле Земли.

Исследование при помощи космических аппаратов показали, что магнитосфера существует и у некоторых других планет: Меркурия, Юпитера, Сатурна, Венеры.

### **Подобие векторных характеристик магнитного и электростатических полей**

Вектор магнитной индукции  $\vec{B}$  – аналог вектора напряжённости электростатического поля  $\vec{E}$ . Эти величины определяют силовое действие этих полей и зависят от свойств среды. Аналогом вектора электрического смещения  $\vec{D}$  является вектор напряжённости  $\vec{H}$  магнитного поля.

Для магнитного поля, как и для электрического, справедлив **принцип суперпозиции**: магнитная индукция результирующего поля, создаваемого несколькими токами или движущимися зарядами, равна векторной сумме магнитных индукций полей, создаваемых каждым током или движущимся зарядом.

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i. \quad (524)$$

#### Пример.

На рис. 207 в точке А определена индукция  $\vec{B}$  магнитного поля, создаваемого проводниками с токами  $I_1$  (направлен перпендикулярно чертежу от нас) и  $I_2$  (направлен перпендикулярно чертежу к нам)

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$$

(их направления указаны на рис. 49).

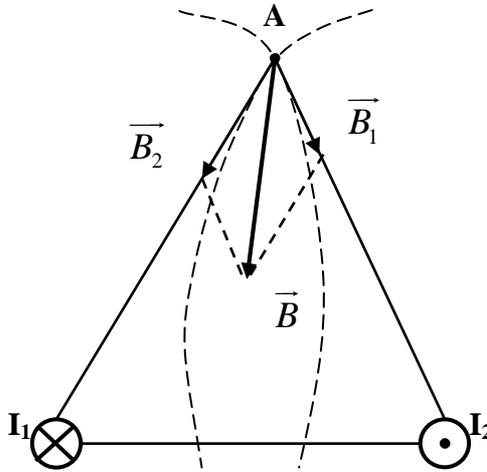


Рис. 207. К принципу суперпозиции магнитных полей

### Закон Био–Савара–Лапласа и его применение к расчёту полей

Определяет в произвольной точке А индукцию поля  $\vec{dB}$ , создаваемую элементом проводника  $\vec{dl}$  с током  $I$  на расстоянии  $r$  от него.

$$\vec{dB} = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}, \quad (525)$$

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}, \quad (526)$$

где  $\vec{dl}$  – вектор, по модулю равный длине  $dl$  элемента проводника и совпадающий по направлению с током;  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведённый из элемента  $dl$  проводника в точку А поля;  $r$  – модуль радиус-вектора  $\vec{r}$ ;  $\mu_0$  – магнитная постоянная;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (рис. 208).

Вектор  $\vec{dB}$  перпендикулярен  $\vec{dl}$  и  $\vec{r}$  и направлен по касательной к линии магнитной индукции (определяется по правилу векторного произведения двух векторов  $\vec{dl}$  и  $\vec{r}$ , т. е.  $\vec{dB}$  перпендикулярен плоскости, в которой лежат перемножаемые вектора).

Направление  $\vec{dB}$  определяется по правилу правого винта: направление головки винта даёт направление  $\vec{dB}$ , если поступательное движение винта соответствует направлению тока в элементе.

Для напряженности магнитного поля можно записать аналогичные формулы:

$$\vec{dH} = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot [\vec{dl}, \vec{r}]}{r^3}; \quad (527)$$

$$dH = \frac{1}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I \cdot dl \cdot \sin \alpha}{r^2}. \quad (528)$$

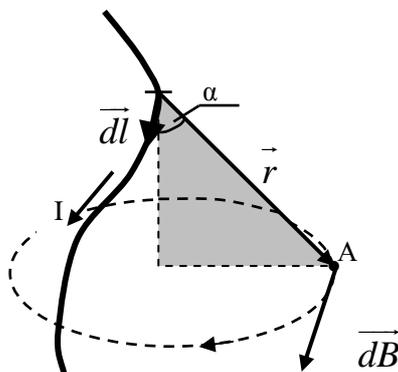


Рис.208. К закону Био–Савара–Лапласа

Изолированный элемент с током создать невозможно. Ток, который создает магнитное поле, всегда течет по проводникам конечных размеров.

Поэтому далее надо применять принцип суперпозиции и векторно суммировать (интегрировать)  $\vec{dB}$  или  $\vec{dH}$ , созданные всеми элементами тока  $I \cdot \vec{dl}$ ,

$$\vec{B} = \int \vec{dB} \text{ или } \vec{H} = \int \vec{dH}. \quad (529)$$

Рассмотрим **магнитное поле прямого тока**.

Ток течёт по тонкому прямому проводнику бесконечной длины (рис. 209).

В качестве постоянной интегрирования выберем угол  $\alpha$ . Из рис. 208 имеем

$$r = \frac{R}{\sin \alpha}; \quad dl = \frac{r \cdot d\alpha}{\sin \alpha}.$$

Подставив эти значения в формулу (528), получим:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \int_0^\pi \sin \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I}{R}.$$

Таким образом, для бесконечно длинного прямолинейного проводника с током

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{R}. \quad (530)$$

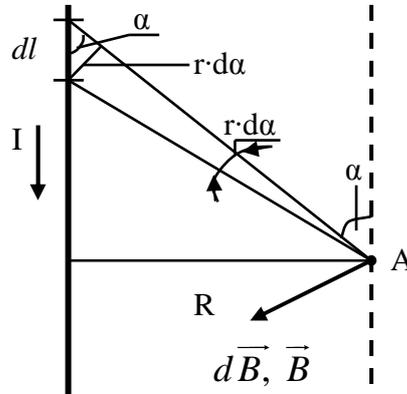


Рис. 209. Тонкий, прямой проводник с током

Для магнитного поля кругового тока, как следует из рис. 210, сложение векторов  $\vec{dB}$  можно заменить сложением их модулей

$$dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{R^2} \quad (\text{учли, что } r = R, \sin \alpha = 1),$$

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{I}{R^2} \int dl = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot I}{4 \cdot \pi \cdot R^2} \cdot 2 \cdot \pi \cdot R = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I}{2 \cdot R}.$$

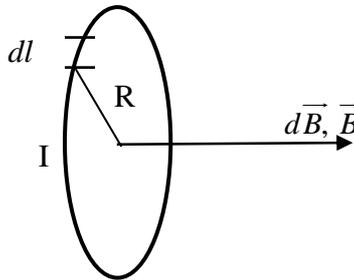


Рис. 210. Круговой виток с током

Таким образом,

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{I}{2 \cdot R}. \quad (531)$$

Можно показать, что на расстоянии  $r$  от центра витка вдоль оси витка магнитное поле будет  $B = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{2} \cdot \frac{I \cdot R^2}{(\sqrt{R^2 + r^2})^3}$ . (532)

Напряжённость магнитного поля, создаваемая круговым током, на большом расстоянии от витка с током ( $r \gg R$ )

$$H = \frac{B}{\mu \cdot \mu_0} = \frac{I \cdot R^2}{2 \cdot r^3} = \frac{I \cdot R^2 \cdot 2 \cdot \pi}{2 \cdot r^3 \cdot 2 \cdot \pi} = \frac{2 \cdot I \cdot \pi \cdot R^2}{4 \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{2 \cdot I \cdot S}{4 \cdot \pi \cdot r^3} = \frac{2 \cdot p_m}{4 \cdot \pi \cdot r^3}, \quad (533)$$

где  $p_m = I \cdot S$  – магнитный момент витка с током.

Для **поля соленоида** можно показать, что

$$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot I \cdot n, \quad (534)$$

где  $n = N / l$  – число витков на единицу длины соленоида.

Соленоид устроен следующим образом (рис. 211): на керамическую трубку наматывается проводящий провод в один или несколько слоёв. Если диаметр соленоида много меньше, чем его длина, то внутри такого соленоида при пропускании тока по проводу возникает однородное магнитное поле, индукция которого может быть найдена по формуле (534).

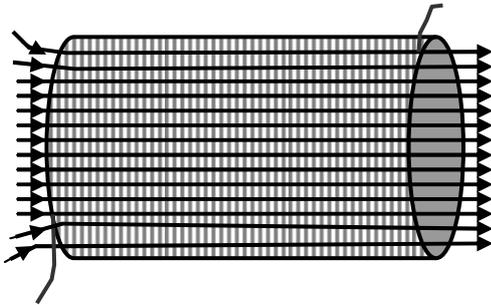


Рис. 211. Соленоид

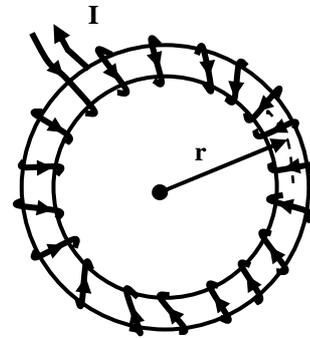


Рис. 212. Торойд

Для магнитного **поля тороида** (кольцевой катушки с витками, намотанными на сердечник, имеющей форму тора, по которой течёт ток).

Магнитное поле отсутствует вне тороида, а внутри его оно является однородным (рис. 212).

Линии магнитной индукции, как следует из соображений симметрии, есть окружности, центры которых расположены на оси тороида.

Используя теорему о циркуляции вектора  $\vec{B}$  (будет рассмотрена позже), можно показать, что

$$B = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}, \quad (535)$$

где  $N$  – число витков тороида.

## Закон Ампера

Ампер установил, что сила  $\vec{dF}$ , с которой магнитное поле действует на элемент проводника  $dl$  с током, находящегося в магнитном поле, равна

$$\vec{dF} = I \cdot [\vec{dl}, \vec{B}],$$

где  $\vec{dl}$  – вектор по модулю равный  $dl$  и совпадающий по направлению с током;  $\vec{B}$  – вектор магнитной индукции.

$$\text{Модуль силы Ампера } dF = I \cdot B \cdot dl \cdot \sin \alpha \quad (536)$$

В случае однородного магнитного поля, сила, действующая на участок проводника, находящегося в нём, со стороны поля:

$$F = I \cdot B \cdot l \cdot \sin \alpha \quad (537)$$

Направление силы Ампера определяется по **правилу левой руки** (рис. 213): если ладонь левой руки расположить так, чтобы в неё входил вектор  $\vec{B}$ , а четыре вытянутых пальца расположить по направлению тока в проводнике, то отогнутый большой палец покажет направление силы Ампера.

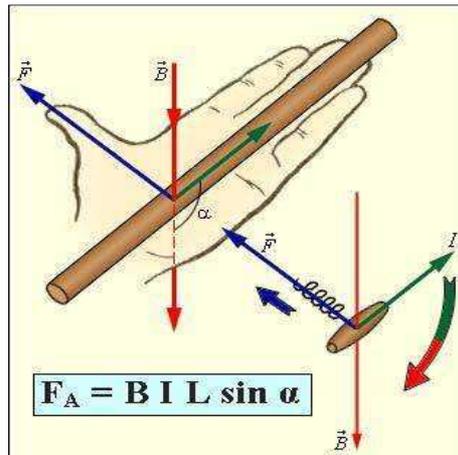


Рис. 213. Правило левой руки

### Взаимодействие параллельных токов

Закон Ампера применяется для определения силы взаимодействия двух токов. Два параллельных проводника с токами  $I_1$  и  $I_2$  находятся на расстоянии  $R$  друг от друга. Направление сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , с которыми поля  $\vec{B}_1$  и  $\vec{B}_2$  действуют на проводники с токами  $I_1$  и  $I_2$ , определяется по правилу левой руки (рис. 213).

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1}{R} \quad dF_1 = I_2 \cdot B_1 \cdot dl \quad (\text{поле } \vec{B}_1 \text{ действует на элемент } dl$$

второго тока, угол  $\alpha$  между  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ ). Подставив в эту формулу  $B_1$ , получим:

$$dF_1 = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{R} dl.$$

Рассуждая аналогично, имеем:

$$dF_2 = I_1 \cdot B_2 \cdot dl = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{R} dl;$$

$$dF_1 = dF_2 = dF = \frac{\mu \cdot \mu_0}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{R} dl. \quad (538)$$

Проводники с токами одинакового направления притягиваются, с токами разного направления – отталкиваются (рис. 214, 215).

В системе СИ единица измерения силы тока – ампер. По определению – ампер есть сила не изменяющегося тока, который, проходя по двум параллельным прямолинейным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого кругового сечения, расположенным на расстоянии 1 метра один от другого в вакууме, вызвал бы между этими проводниками силу, равную  $2 \cdot 10^{-7}$  Н на каждый метр длины.

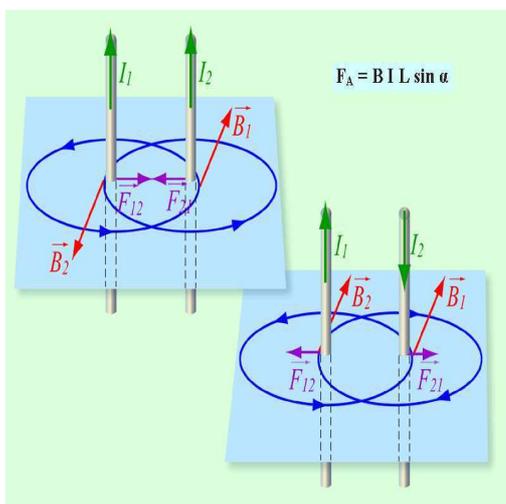


Рис. 214. Взаимодействие проводников с током

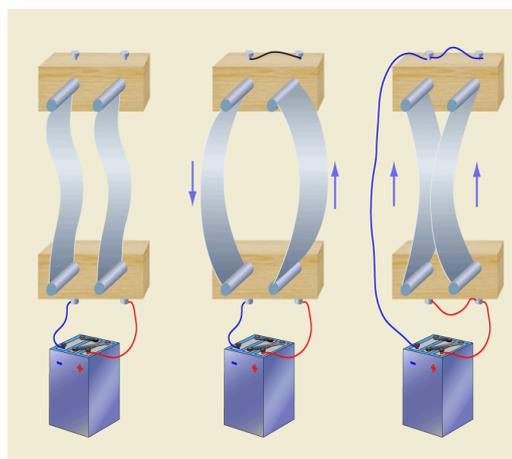


Рис. 215. Проводники с токами

В вакууме ( $\mu = 1$ ) сила взаимодействия на единицу длины проводника

$$\frac{dF}{dl} = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{R} \quad \text{при } I_1 = I_2 = 1 \text{ А и } R = 1 \text{ м: } \frac{dF}{dl} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н/м} \Rightarrow$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{H}{A^2} = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{Гн}{м},$$

где генри (Гн) – единица индуктивности.

### **Единицы магнитной индукции и напряжённости магнитного поля**

Пусть элемент проводника  $dl$  с током  $I$  перпендикулярен направлению магнитного поля. Закон Ампера  $dF = I \cdot B \cdot dl \Rightarrow B = \frac{1}{I} \cdot \frac{dF}{dl}$ .

Единица магнитной индукции тесла (Тл) – магнитная индукция такого однородного магнитного поля, которое действует с силой 1 Н на каждый метр длины прямолинейного проводника, расположенного перпендикулярно направлению поля, если по этому проводнику проходит ток 1 А:  $1Тл = 1 Н / А \cdot м$ .

Из формулы  $B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H$  в вакууме ( $\mu = 1$ ) получим  $H = \frac{B}{\mu}$ .

Единица напряжённости магнитного поля  $H$  – ампер на метр (А/м), напряжённость такого поля, индукция которого в вакууме равна  $4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} Тл$ .

### **Магнитное поле свободно движущегося заряда**

Проводник с током создаёт вокруг себя магнитное поле. Электрический ток – это упорядоченное движение заряженных зарядов. Магнитное поле  $\vec{B}$  точечного заряда  $q$ , свободно движущегося с постоянной

нерелятивистской скоростью  $\vec{v}$  ( $v \ll c$ ):  $\vec{B} = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{q \cdot [\vec{v}, \vec{r}]}{r^3}$ ,

$$B = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{q \cdot v}{r^2} \sin \alpha. \quad (539)$$

### **Сила Лоренца**

Так же как и на проводник с током, магнитное поле действует и на отдельный заряд, движущийся в магнитном поле.

Сила, действующая на электрический заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , называется силой Лоренца

$$\vec{F} = q \cdot [\vec{v}, \vec{B}],$$

или

$$F = q \cdot v \cdot B \sin \alpha, \quad (540)$$

где  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Направление силы Лоренца также определяется **правилом левой руки**: если силовые линии магнитного поля входят в ладонь, четыре вытянутых пальца совпадают с направлением движения положительно заряженной частицы, то отогнутый большой палец указывает направление силы Лоренца (рис. 216).

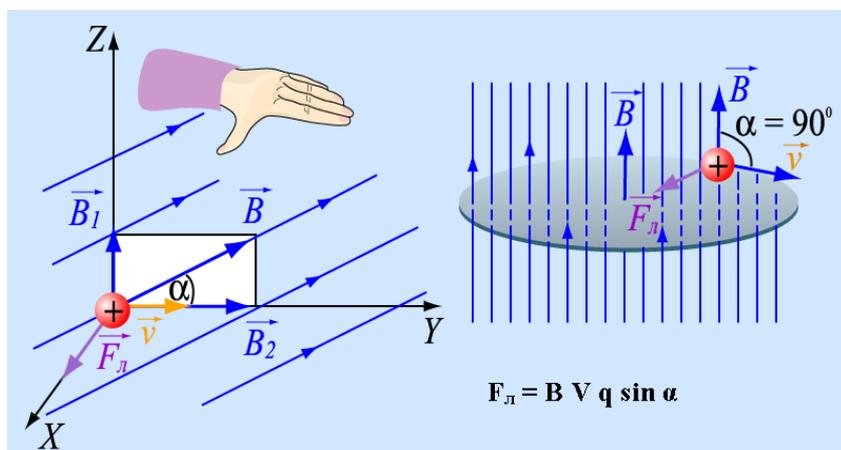


Рис. 216. Правило левой руки для определения направления силы Лоренца

### Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле

1. Частица влетает в магнитное поле параллельно его силовым линиям ( $\vec{v} \uparrow \uparrow \vec{B}$  или  $\vec{v} \uparrow \downarrow \vec{B}$ , рис. 217).

На заряженную частицу, движущуюся в магнитном поле, действует сила Лоренца  $F = q \cdot v \cdot B \sin \alpha$  (взаимодействием частицы с гравитационным полем можно пренебречь из-за малой массы частицы).

В этом случае угол  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$  равен нулю или  $180^\circ$  для частиц с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  соответственно.

Синус этих углов равен нулю,  $\Rightarrow F_L = 0$ , и частица будет двигаться в соответствии с первым законом Ньютона, равномерно и прямолинейно.

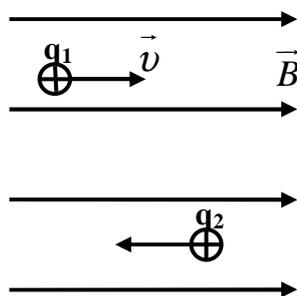


Рис. 217. Частица влетает в магнитное поле параллельно его силовым линиям

2. Частица влетает в магнитное поле перпендикулярно его силовым линиям (рис. 218).

В этом случае частица будет двигаться по окружности с ускорением  $a = \frac{v^2}{R}$ .

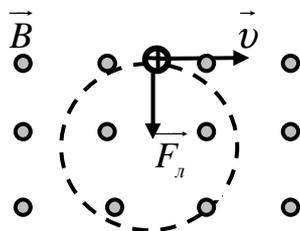


Рис. 218. Траектория положительно заряженной частицы, влетевшей перпендикулярно силовым линиям магнитного поля

Действительно, т. к.  $\alpha = 90^0$ ,  $\sin\alpha=1 \Rightarrow F_n = q \cdot v \cdot B$ . При этом сила Лоренца перпендикулярна  $\vec{v}$  ( $F_n \perp v$ ). Из механики известно, что если на тело действует сила, направленная перпендикулярно вектору скорости, то тело будет двигаться по окружности с постоянной по величине скоростью.

Запишем систему уравнений, описывающих движение частицы при условии, что известны масса частицы  $m$ , скорость частицы  $v$ , магнитная индукция поля  $B$ .

$$a_n = \frac{F_n}{m}, \quad (1^*)$$

$$F_n = q \cdot v \cdot B, \quad (2^*)$$

$$a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (3^*)$$

$$(2^*), (3^*) \rightarrow (1^*), \text{ получим } \frac{v^2}{R} = \frac{q \cdot v \cdot B}{m} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v}{q \cdot B} \quad (4^*).$$

Из (4\*),  $\Rightarrow$ , что чем массивнее частица и чем с большей скоростью движется, тем труднее полю отклонить её от первоначального направления движения (радиус окружности больше).

Период вращения найдём из кинематики. Поскольку частица вращается равномерно, то можно записать  $v = \frac{S}{t}$ ;

$$v = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{T} \Rightarrow T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v}.$$

Учитывая (4\*), можно записать  $T = \frac{2 \cdot \pi}{q \cdot B} \cdot \frac{m \cdot v}{v} = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B}$  (5\*).

Из (5\*),  $\Rightarrow$  период вращения заряженной частицы в однородном магнитном поле не зависит от скорости движения.

3. Частица влетает в однородное магнитное поле под углом  $\alpha$  к силовым линиям.

В этом случае частица будет двигаться по спирали (рис. 219).

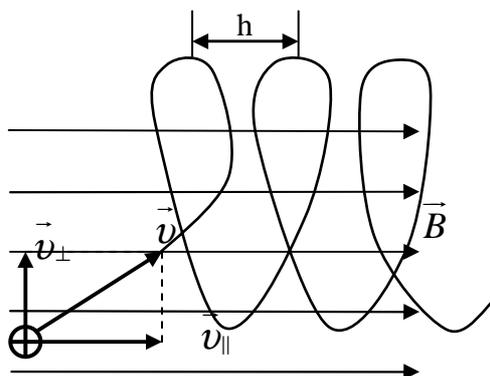


Рис. 219. Траектория частицы

Действительно, магнитное поле не действует на параллельную полю составляющую скорости  $\vec{v}_{\parallel}$  и вдоль поля частица должна двигаться равномерно и прямолинейно согласно 1-ому закону Ньютона. На перпендикулярную полю составляющую скорости  $\vec{v}_{\perp}$  действует сила Лоренца, равная  $F_n = q \cdot v_{\perp} \cdot B$ . Она направлена перпендикулярно  $\vec{v}_{\perp}$  и заставляет частицу вращаться в плоскости, перпендикулярной вектору  $B$ . Одновременное участие в описанных двух движениях и обеспечивает спиралевидную форму траектории движения частицы. Так же, как и в предыдущем случае, можно найти радиус вращения и период, зная  $m$ ,  $v$ ,  $\alpha$ ,  $q$  и  $B$ .

$$a_n = \frac{F_n}{m}, \quad (1*)$$

$$F_n = q \cdot v_{\perp} \cdot B, \quad (2*)$$

$$a_n = \frac{v_{\perp}^2}{R}, \quad (3*)$$

$$v_{\perp} = v \cdot \sin \alpha. \quad (4*)$$

$$(2*), (3*) \rightarrow (1*): \frac{v_{\perp}^2}{R} = \frac{q \cdot v_{\perp} \cdot B}{m} \Rightarrow R = \frac{m \cdot v_{\perp}}{q \cdot B} \quad (5*) \text{ с учётом (4*)}$$

$$R = \frac{m \cdot v \cdot \sin \alpha}{q \cdot B} . \quad (6^*)$$

Период вращения равен  $T = \frac{2 \cdot \pi \cdot R}{v_{\perp}}$  (7\*); (5\*)  $\rightarrow$  (7\*):

$$T = \frac{2 \cdot \pi \cdot m}{q \cdot B} . \quad (8^*)$$

Шаг спирали  $h$  найдём из кинематики

$$h = v_{\parallel} \cdot T (*), \quad v_{\parallel} = v \cdot \cos \alpha (**);$$

$$(**) \rightarrow (*): \quad h = v \cdot T \cos \alpha .$$

Если магнитное поле неоднородно и заряженная частица движется под углом к линиям магнитного поля в направлении возрастания поля, то величины  $R$  и  $h$  уменьшаются с ростом  $\overline{B}$ . На этом основана фокусировка заряженных частиц магнитным полем.

### Эффект Холла

**Эффект Холла** – это возникновение электрического поля в проводнике или в полупроводнике с током при помещении его в магнитное поле.

Эффект Холла – следствие влияния силы Лоренца на движение носителей тока. В магнитном поле  $\vec{B}$  при протекании через проводник тока с плотностью  $\vec{j}$  устанавливается электрическое поле с напряжённостью

$$\vec{E} = R \cdot [\vec{B}, \vec{j}], \quad (541)$$

где  $R$  – постоянная Холла.

Пусть, например, металлическая пластинка с током расположена в магнитном поле, перпендикулярном току (рис. 220). Сила Лоренца приводит к повышению концентрации носителей тока, электронов, у верхнего края пластинки. При этом верхний край зарядится отрицательно, а нижний, соответственно, – положительно. Стационарное распределение зарядов будет достигнуто, когда действие созданного таким образом электрического поля уравнивает силу Лоренца

$$e \cdot E = e \cdot \frac{\Delta \varphi}{a} = e \cdot v \cdot B, \quad \text{или} \quad \Delta \varphi = v \cdot B \cdot a ,$$

где  $a$  – ширина пластинки;  $e$  – заряд электрона;  $\Delta \varphi$  – поперечная (холловская) разность потенциалов.

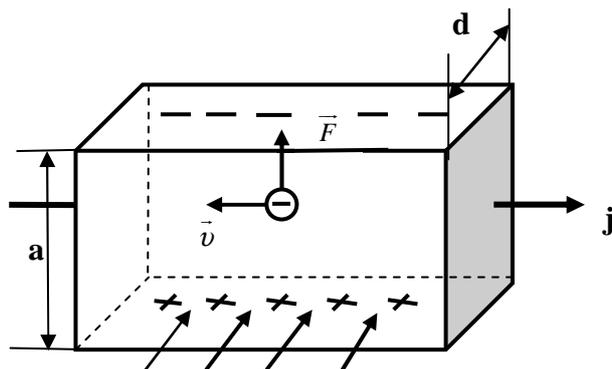


Рис. 220. Металлическая пластинка с током в магнитном поле

Поскольку сила тока  $I = j \cdot S = n \cdot e \cdot v \cdot S$  ( $S = a \cdot d$  – площадь поперечного сечения пластинки толщиной  $d$  и шириной  $a$ ;  $n$  – концентрация электронов;  $v$  – средняя скорость упорядоченного движения электронов), то

$$\Delta\varphi = \frac{I}{n \cdot e \cdot a \cdot d} \cdot B \cdot a = \frac{1}{e \cdot n} \cdot \frac{I \cdot B}{d} = R \cdot \frac{I \cdot B}{d}. \quad (542)$$

Знак постоянной Холла  $R = 1 / e \cdot n$  совпадает со знаком носителей тока, поэтому эффект Холла используют для определения природы носителей тока в веществах и определения их концентрации.

### Теорема о циркуляции вектора $\vec{B}$

Циркуляцией вектора  $\vec{B}$  по заданному замкнутому контуру  $L$  называется следующий интеграл по этому контуру:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_l dl, \quad (543)$$

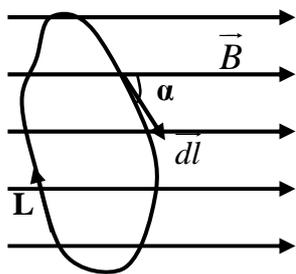


Рис. 221. Контур в магнитном поле

где  $d\vec{l}$  – элемент длины контура, направленный вдоль обхода контура;  $B_l = B \cdot \cos \alpha$  – составляющая вектора  $\vec{B}$  в направлении касательной к контуру с учётом выбранного направления обхода;  $\alpha$  – угол между векторами  $\vec{B}$  и  $d\vec{l}$  (рис. 221).

Циркуляция вектора  $\vec{B}$  по произвольному замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной  $\mu_0$  на алгебраическую сумму токов, охватываемых этим контуром:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = \oint_L B_L dl = \mu_0 \cdot \sum_{k=1}^n I_k, \quad (544)$$

где  $n$  – число проводников с токами, охватываемых контуром  $L$  произвольной формы.

Эта теорема справедлива только для поля в вакууме, поскольку для поля в веществе надо учитывать молекулярные токи. Каждый ток учитывается столько раз, сколько он охватывается контуром. Положительным считается ток, направление которого связано с направлением обхода по контуру правилом правого винта.

Пример: магнитное поле прямого тока.

Замкнутый контур представим в виде окружности радиуса  $r$  (рис. 222).

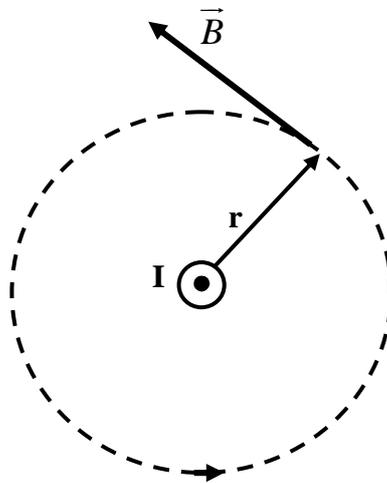


Рис. 222. Замкнутый контур

В каждой точке этой окружности вектор  $\vec{B}$  одинаков по модулю и направлен по касательной к окружности

$$\oint_L B_t dl = \oint_L B dl = B \oint_L dl = B \cdot 2 \cdot \pi \cdot r = \mu_0 \cdot I, \text{ отсюда } B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}. \quad (545)$$

Сравним выражения для циркуляции векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{B}$ .

$$\oint_L \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad \oint_L \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 \cdot \sum_{k=1}^n I_k.$$

Принципиальное различие между этими формулами в том, что циркуляция вектора  $\vec{E}$  электростатического поля всегда равна нулю. Такое поле является потенциальным. Циркуляция вектора  $\vec{B}$  магнитного поля не равна нулю. Такое поле является вихревым.

### Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток)

Магнитным потоком  $\Phi$  через замкнутый контур (рис. 222) площадью  $S$  называется скалярная физическая величина, численно равная произведению магнитной индукции  $B$  на площадь контура  $S$ , который пронизывается магнитным полем, и на косинус угла между вектором  $\vec{B}$  и нормалью к контуру  $\vec{n}$   $\Phi = B \cdot S \cos \alpha$ .

(546)

Поток вектора  $\vec{B}$  может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от знака  $\cos \alpha$ . Единица магнитного потока – вебер (Вб). 1 Вб – магнитный поток, проходящий сквозь плоскую поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно однородному магнитному полю, индукция которого равна 1 Тл ( $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$ ).

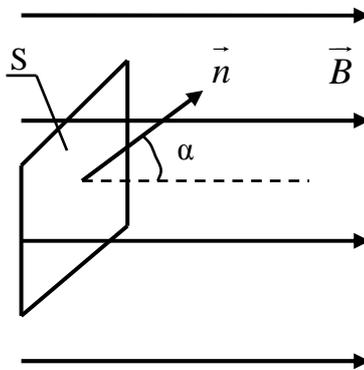


Рис. 223. Замкнутый контур в магнитном поле

### Теорема Гаусса для магнитного поля в вакууме

Поток вектора магнитной индукции сквозь любую замкнутую поверхность равен нулю  $\oint_S \vec{B} d\vec{S} = 0$ . (547)

Эта теорема отражает факт отсутствия магнитных зарядов, вследствие чего линии магнитной индукции не имеют ни начала, ни конца и являются замкнутыми.

### Потокоцепление

Магнитный поток через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, называется потокоцеплением  $\psi$  этого контура.

Потокоцепление контура, обусловленное магнитным полем тока в самом этом контуре, называется потокоцеплением самоиндукции.

Например, найдём потокосцепление самоиндукции соленоида с сердечником с магнитной индукцией  $\mu$ . Магнитный поток сквозь один виток соленоида площадью  $S$  равен  $\Phi_1 = B \cdot S$ .

Полный магнитный поток, сцепленный со всеми витками соленоида, равен

$$\Psi = \Phi_1 \cdot N = B \cdot S \cdot N = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot N \cdot I}{l} \cdot S \cdot N = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N^2 \cdot I}{l} \cdot S. \quad (548)$$

Потокосцепление контура, обусловленное магнитным полем тока, идущего в другом контуре, называется потокосцеплением взаимной индукции этих двух контуров.

### **Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле**

Проводник длиной  $l$  (он может свободно перемещаться) с током  $I$  находится в однородном магнитном поле (рис. 224).

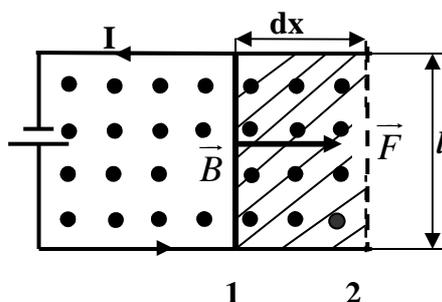


Рис. 224. Проводник длиной  $l$

Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – из-за чертежа. Сила Ампера  $F = I \cdot B \cdot l$ . Под её действием проводник переместился из положения 1 в положение 2.

Работа, совершенная магнитным полем:

$$dA = \vec{F} d\vec{x} = I d\vec{x} [\vec{l}, \vec{B}] = I \cdot B \cdot l \cdot dx = I \cdot BdS = Id\Phi.$$

Использованы соотношения  $dS = ldx$  – площадь, пересекаемая проводником при его перемещении в магнитном поле;  $BdS = d\Phi$  – поток вектора магнитной индукции, пронизывающей эту площадь. Таким образом,  $dA = Id\Phi$ . (549)

Работа по перемещению проводника с током в магнитном поле равна произведению силы тока на магнитный поток, пересечённый движущимся проводником.

### Работа по перемещению контура с током в магнитном поле

Магнитное поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка – за чертёж (рис. 225). Работа  $dA$  сил Ампера при перемещении контура ABCDA равна сумме работ по перемещению проводников ABC ( $dA_1$ ) и CDA ( $dA_2$ ), т.е.  $dA = dA_1 + dA_2$ .

При перемещении участка CDA силы Ампера направлены в сторону перемещения (образуют с направлением перемещения острые углы), поэтому  $dA_2 > 0$ ,

$$dA_2 = I \cdot (d\Phi_0 + d\Phi_2).$$

Силы, действующие на участок ABC контура, направлены против перемещения (образуют с направлением перемещения тупые углы), поэтому  $dA_1 < 0$ ;

$$dA_1 = -I \cdot (d\Phi_0 + d\Phi_1).$$

В сумме

$$dA = I \cdot (d\Phi_2 - d\Phi_1), \text{ или } A = I \cdot \Delta\Phi, \text{ или } A = I \cdot (\Psi_2 - \Psi_1). \quad (550)$$

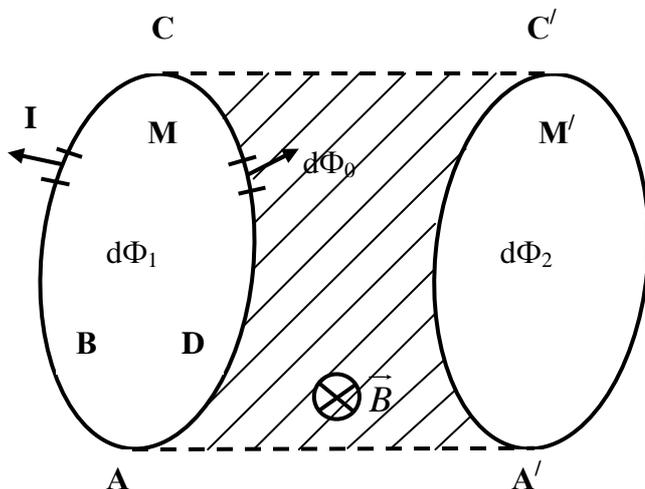


Рис.225. Перемещение контура с током в магнитном поле

Работа по перемещению замкнутого контура с током в магнитном поле равна произведению силы тока в контуре на изменение магнитного потока сцепленного с контуром (или на его потокосцепление).

### 3.5. Явление электромагнитной индукции

#### Основной закон электромагнитной индукции

Явление электромагнитной индукции заключается в возникновении электрического тока в замкнутом проводнике, если он пронизывается переменным магнитным потоком.

Появление в проводнике электрического тока свидетельствует о том, что в нём возникает электродвижущая сила индукции (ЭДС). Это явление было открыто опытным путём М. Фарадеем в 1831 году.

Опыт 1. Соленоид подключён к гальванометру (рис. 226). Если в соленоид вдвигать (или выдвигать) постоянный магнит, то в моменты вдвигания (или выдвигания) наблюдается отклонение стрелки гальванометра, т.е. в соленоиде индуцируется ЭДС.

Направления отклонения стрелки при вдвигании и выдвигании противоположны. Если постоянный магнит развернуть так, чтобы полюса поменялись местами, то и направление отклонения стрелки изменится на противоположное. Отклонение стрелки тем больше, чем больше скорость движения магнита относительно соленоида. Такой же эффект будет, если постоянный магнит оставить неподвижным, а относительно него перемещать соленоид.

Опыт 2. Один соленоид ( $K_1$ ) подключён к источнику тока. Другой соленоид ( $K_2$ ) подключён к гальванометру (рис. 227).

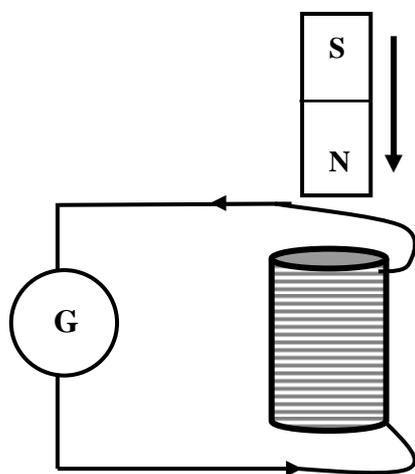


Рис. 226. Опыт 1

Отклонение стрелки гальванометра наблюдается в моменты включения или выключения тока, в моменты его увеличения или уменьшения, или при перемещении катушек друг относительно друга. При включении и выключении стрелка отклоняется в разные стороны, т.е. знак индуцированной ЭДС в этих случаях различен.

Такой же эффект – наведение в катушке  $K_2$  ЭДС различного знака – наблюдается при увеличении или уменьшении тока в катушке  $K_1$  при сближении или удалении катушек.

Основные свойства индукционного тока:

1. Индукционный ток возникает всегда, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции.

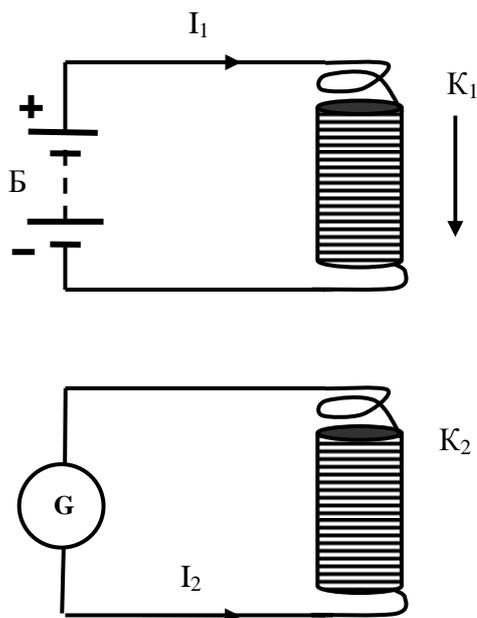


Рис. 227. Опыт 2

2. Сила индукционного тока не зависит от способа изменения потока магнитной индукции, а определяется лишь скоростью его изменения.

Открытие явления электромагнитной индукции:

- 1) показало взаимосвязь между электрическим и магнитным полем;
- 2) предложило способ получения электрического тока с помощью магнитного поля.

Обобщая результаты опытов, Фарадей показал, что всякий раз, когда происходит изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции, в контуре возникает индукционный ток.

Возникновение в цепи индукционного тока указывает на наличие в цепи электродвижущей силы. Эта ЭДС называется электродвижущей силой электромагнитной индукции.

**Закон Фарадея:** ЭДС электромагнитной индукции в контуре численно равна и противоположна по знаку скорости изменения магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную этим контуром:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (551)$$

При равномерном изменении магнитного потока через контур

$$\varepsilon_i = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (552)$$

где  $\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$  – скорость изменения магнитного потока.

Формула (552) – справедлива только для одного витка. Если имеется  $N$  витков, то

$$\varepsilon_i = -N \cdot \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}. \quad (553)$$

Для замкнутого контура магнитный поток  $\Phi$  есть не что иное, как потокосцепление  $\psi$  этого контура. Поэтому в электротехнике закон Фарадея часто записывают в форме  $\varepsilon_i = -\frac{d\psi}{dt}$ . (554)

Знак минус в формулах 549–552 означает, что ЭДС индукции вызывает такой ток, магнитное поле которого противодействует изменению магнитного потока его вызвавшего, то есть при  $\frac{d\Phi}{dt} > 0$ ,  $\varepsilon_i < 0$  и наоборот.

Таким образом, необходимым и достаточным условием возникновения индукционного тока является следующее: проводящий контур должен быть замкнутым, а магнитный поток через площадь, ограниченную этим контуром, должен изменяться.

Проанализируем закон Фарадея. С учётом того, что  $\Phi_1 = B \cdot S \cdot \cos \alpha$  запишем:  $\varepsilon_i = -\frac{\Delta(B \cdot S \cdot \cos \alpha)}{\Delta t}$ .

Из этой формулы следует, что в замкнутом контуре, находящемся в магнитном поле, ЭДС индукции будет возникать в трёх случаях:

1. Если меняется величина вектора магнитной индукции.
2. Если изменяется площадь контура.
3. Если контур вращается в магнитном поле.

Направление индукционного тока определяется по **правилу Ленца**: при всяком изменении магнитного потока сквозь поверхность, натянутую на замкнутый проводящий контур, в последнем возникает индукционный ток такого направления, что его магнитное поле противодействует изменению магнитного потока.

Рассмотрим примеры. Пусть магнитное поле направлено, как показано на рисунке (рис. 228), и величина поля нарастает  $(\frac{\Delta B}{\Delta t}) > 0$ . Определим направление индукционного тока.

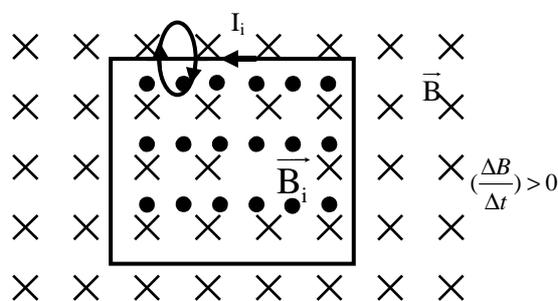


Рис. 228. Контур в магнитном поле

В данном случае индукционный ток направлен против часовой стрелки, так как при этом его магнитное поле  $\vec{B}_i$  (обозначено точками) будет препятствовать нарастанию индуцирующего поля  $\vec{B}$ .

На рис. 229 стрелки вверх и вниз – соответственно введение магнита в катушку, и его извлечение из неё.

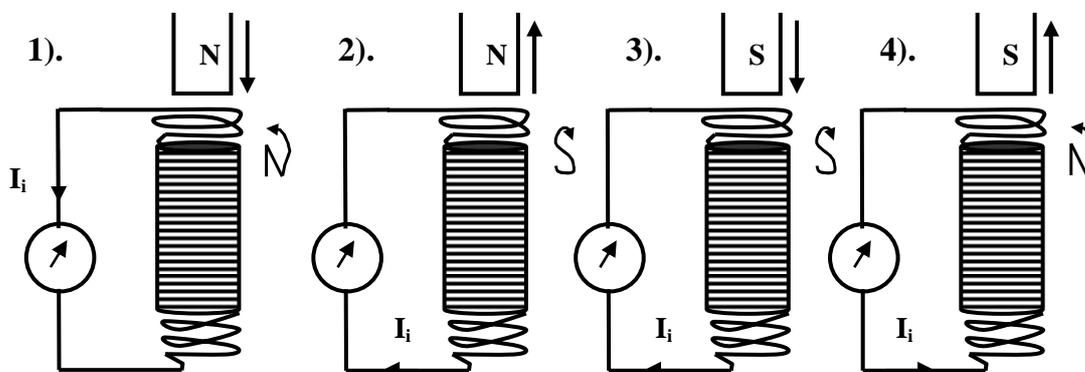


Рис. 229. К определению направления индукционного тока

Из приведённых на рис. 229 примеров можно сформулировать следующее правило:

$\vec{N} \ S$  конец буквы N (начало буквы S) указывает направление индукционного тока в замкнутом контуре.

ЭДС электромагнитной индукции выражается в вольтах

$$\left[ \frac{d\Phi}{dt} \right] = \frac{Вб}{с} = \frac{Тл \cdot м^2}{с} = \frac{Н \cdot м^2}{А \cdot м \cdot с} = \frac{Дж}{А \cdot с} = \frac{А \cdot В \cdot с}{А \cdot с} = В.$$

### ЭДС индукции в неподвижных проводниках

Согласно закону Фарадея, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно в случае неподвижного контура, находящегося в переменном магнитном поле. Однако сила Лоренца на неподвижные заряды не действует, поэтому в данном случае ею нельзя объяснить возникновение ЭДС индукции.

Кроме того, опыт показывает, что ЭДС индукции не зависит от рода вещества проводника, от состояния проводника, в частности, от его температуры, которая может быть неодинаковой вдоль проводника. Следовательно, сторонние силы, индуцируемые магнитным полем, не связаны с изменением свойств проводника в магнитном поле, а обусловлены самим магнитным полем.

Максвелл для объяснения ЭДС индукции в неподвижных проводниках предположил, что переменное магнитное поле возбуждает в ок-

ружающем пространстве вихревое электрическое поле, которое и является причиной возникновения индукционного тока в проводнике.

На рис. 230 приведён пример вихревого электрического поля, возникающего при возрастании магнитного поля.

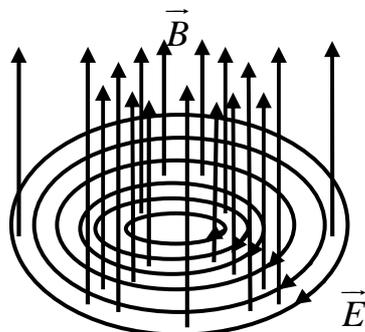


Рис. 230. Вихревое электрическое поле

Вихревое электрическое поле не является электростатическим. Силовые линии электростатического поля всегда разомкнуты – они начинаются и заканчиваются на электрических зарядах. Именно поэтому напряжение по замкнутому контуру в электростатическом поле всегда равно нулю, это поле не может поддерживать замкнутое движение зарядов и, следовательно, не может привести к возникновению электродвижущей силы.

Электрическое поле, возбуждаемое изменениями магнитного поля, имеет непрерывные силовые линии, т.е. представляет собой вихревое поле. Такое поле вызывает в проводнике электроны по замкнутым траекториям и приводит к возникновению ЭДС. При этом сторонними силами являются силы вихревого электрического поля.

Циркуляция  $\vec{E}_B$  этого поля по любому контуру  $L$  проводника представляет собой ЭДС электромагнитной индукции

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_B \vec{dl} = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (555)$$

### Вращение рамки в магнитном поле

Явление электромагнитной индукции применяется для преобразования механической энергии в энергию электрического тока. Для этой цели используются генераторы, принцип действия которых рассмотрим на примере плоской рамки, вращающейся в однородном ( $B = \text{const}$ ) магнитном поле (рис. 231).

Пусть рамка вращается равномерно с угловой скоростью  $\omega = \text{const}$ . Магнитный момент, сцепленный с рамкой площадью  $S$ , в любой момент времени  $t$  равен  $\Phi = B_n \cdot S = B \cdot S \cos \alpha = B \cdot S \cos \omega t$ , где  $\alpha = \omega t$  – угол поворота рамки в момент времени  $t$ .

При вращении рамки в ней возникает переменная ЭДС индукции

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B \cdot S \cdot \sin \omega t. \quad (556)$$

Максимальное значение ЭДС индукции  $\varepsilon_{\max} = B \cdot S \cdot \omega$ . Тогда  $\varepsilon_i = \varepsilon_{\max} \sin \omega t$ .

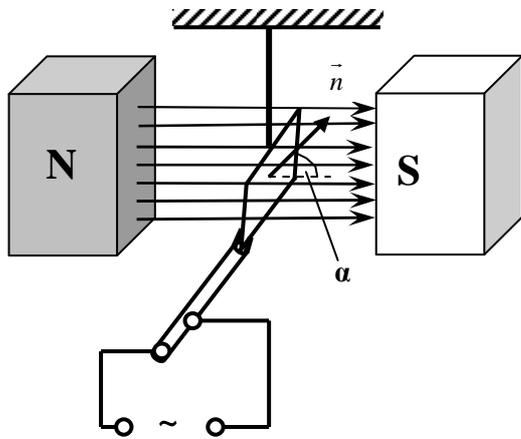


Рис. 231. Вращающаяся в поле плоская рамка

При равномерном вращении рамки в однородном магнитном поле в ней возникает переменная ЭДС, изменяющаяся по гармоническому закону.

Процесс превращения механической энергии в электрическую обратим. Если по рамке, помещённой в магнитное поле, пропускать электрический ток, то на неё будет действовать вращающий момент

$$\vec{M} = I \cdot S \cdot [\vec{n}, \vec{B}] \quad (557)$$

и рамка начнёт вращаться.

На этом принципе основан принцип действия электродвигателей.

### Вихревые токи (токи Фуко)

Индукционный ток возникает не только в линейных проводниках, но и в сплошных, массивных проводниках, помещённых в переменное магнитное поле. Эти токи замкнуты в толще проводника и называются вихревыми токами, или токами Фуко.

Токи Фуко также подчиняются правилу Ленца: их магнитное поле направлено так, чтобы противодействовать изменению магнитного потока, индуцирующему вихревые токи. Поэтому вихревые токи тормозятся в магнитном поле. Кроме того, вихревые токи вызывают сильное нагревание проводников. В электрических машинах, для того чтобы минимизировать влияние токов Фуко, сердечники трансформаторов и магнитные цепи электрических машин собирают из тонких пластин, изолированных друг от друга специальным лаком или скалиной.

Тепло, выделяемое токами Фуко, используется в металлургических индукционных печах.

Взаимодействие индукционных токов с высокочастотным магнитным полем приводит к неравномерному распределению магнитного потока по сечению магнитопроводов – вытеснение магнитного потока из объёма в приповерхностные области проводника. Это явление называется магнитным скин-эффектом.

Вихревые токи возникают и в самом проводнике, по которому течёт переменный ток, что приводит к неравномерному распределению тока

по сечению проводника – вытеснение токов высокой частоты в приповерхностные области проводника. Это явление называется электрическим скин-эффектом.

**Возникновение индукционного тока в проводнике, движущемся в однородном магнитном поле**

ЭДС индукции может возникать не только в замкнутом проводнике, но также и в незамкнутом, если он движется в магнитном поле. Пусть прямолинейный проводник движется перпендикулярно силовым линиям магнитного поля, то ЭДС индукции определяется следующим соотношением:

$$\varepsilon = B \cdot l \cdot v. \quad (558)$$

Если движение проводника происходит под углом  $\alpha$  к линиям магнитной индукции, то

$$\varepsilon_i = B \cdot l \cdot v \cdot \sin \alpha, \quad (559)$$

где  $B$  – магнитная индукция;  $l$  – длина проводника;  $v$  – скорость его движения;  $\alpha$  – угол между  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Направление индукционного тока определяется в этом случае правилом правой руки.

**Правило правой руки.** Если правую руку расположить так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, а отогнутый на  $90^\circ$  большой палец по движению замкнутого контура, то четыре вытянутых пальца укажут направление индукционного тока (рис. 232).

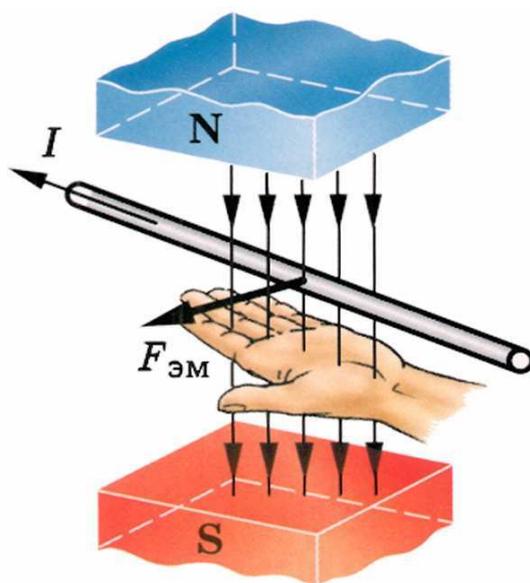


Рис. 232. К правилу правой руки

### Явление самоиндукции

Явление возникновения в цепи индукционного электрического тока при изменении в ней силы тока называют явлением самоиндукции. Это явление возникает либо при размыкании, либо при замыкании цепи.

Если имеется проводник и по нему протекает переменный электрический ток, в этом проводнике появляется второй электрический ток, называемый током самоиндукции.

При замыкании электрической цепи  $\xrightarrow{\quad I \quad} \xleftarrow{\quad I_i \quad}$

При размыкании электрической цепи  $\xrightarrow{\quad I_i \quad} \xrightarrow{\quad I \quad}$

$$\varepsilon = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}; \Delta\Phi \sim \Delta I; \Delta\Phi = L \cdot \Delta I \Rightarrow \varepsilon = -\frac{L \cdot \Delta I}{\Delta t}. \quad (560)$$

ЭДС самоиндукции прямо пропорциональна скорости изменения силы тока в цепи  $\left(\frac{\Delta I}{\Delta t}\right)$ .

Знак минус также задаётся правилом Ленца, а именно: если основной ток увеличивается, ток самоиндукции направлен навстречу ему; если основной ток уменьшается, то ток самоиндукции направлен в ту же сторону, что и основной.

Формула (558) справедлива в случае равномерного изменения тока в контуре. В общем случае

$$\varepsilon = -L \cdot \frac{dI}{dt}. \quad (561)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  называют индуктивностью (коэффициентом самоиндукции)

$$L = \frac{\Phi}{I}. \quad (562)$$

Индуктивность проводника равна 1 Гн, если в нём при изменении силы тока на 1 А за 1 с возникает ЭДС самоиндукции 1 В.

Индуктивность проводника зависит от его геометрии (т.е. от его формы и размеров), а также от магнитной проницаемости окружающей среды.

Например, индуктивность соленоида определяется выражением

$$L = \mu_0 \cdot \mu \cdot n^2 \cdot V = \mu_0 \cdot \mu \cdot n^2 \cdot S \cdot l, \quad (563)$$

где  $n = \frac{N}{l}$  – число витков на единицу длины катушки;  $V$  – объём соленоида,  $\mu_0 \approx 12,56 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$  – магнитная постоянная;  $\mu$  – магнитная проницаемость среды (табличная величина).  $\mu = B/B_0$  показывает, во сколько раз  $\vec{B}$  в веществе полностью заполняющем поле, отличается по модулю от  $\vec{B}_0$  магнитного поля в вакууме.

### Токи при размыкании и замыкании цепи

При всяком изменении силы тока в проводящем контуре возникает ЭДС самоиндукции, в результате чего в контуре появляются дополнительные токи, называемые экстратоками самоиндукции.

Пусть в цепи сопротивлением  $R$  и индуктивностью  $L$  под действием внешней ЭДС течёт постоянный ток  $I_0 = \mathcal{E}/R$ . В момент времени  $t = 0$  выключим источник тока. Возникает ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_s = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ , препятствующая уменьшению тока. Ток в цепи определяется

законом Ома:  $\mathcal{E}_s = I \cdot R$ , или  $I \cdot R = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ . Разделяем переменные

$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \cdot dt$  и интегрируем по  $I$  (от  $I_0$  до  $I$ ) и по  $t$  (от 0 до  $t$ ); получим

$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R \cdot t}{L}$ , или  $I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$  (564), где  $\tau = \frac{L}{R}$  – постоянная, называемая

временем релаксации.

Время релаксации – время, в течение которого сила тока уменьшается в  $e$  раз.

Таким образом, при выключении источника тока сила тока убывает по экспоненциальному закону, а не мгновенно (рис. 233, кривая 1).

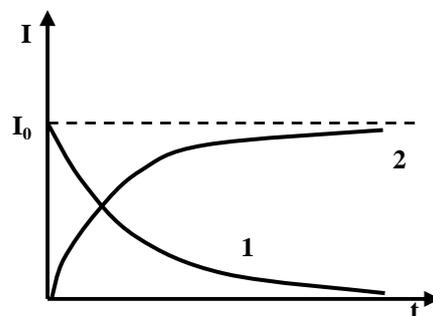


Рис. 233. Зависимость  $I(t)$

Оценим значение ЭДС самоиндукции при мгновенном увеличении сопротивления от  $R_0$  до  $R$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} \cdot \exp\left(-\frac{R \cdot t}{L}\right), \Rightarrow \varepsilon_s = -L \cdot \frac{dI}{dt} = \frac{R}{R_0} \cdot \varepsilon \cdot \exp\left(-\frac{R \cdot t}{L}\right). \quad (565)$$

Т.е. при резком размыкании контура ( $R \gg R_0$ ) ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s$  может во много раз превысить  $\varepsilon$ , что может привести к пробое изоляции и выводу из строя измерительных приборов.

При замыкании цепи помимо внешней ЭДС  $\varepsilon$  возникает ЭДС самоиндукции  $\varepsilon_s = -L \cdot \frac{dI}{dt}$ , препятствующая возрастанию тока. По закону

Ома  $I \cdot R = \varepsilon + \varepsilon_s$ , или  $I \cdot R = \varepsilon - L \cdot \frac{dI}{dt}$ . Можно показать, что решение

этого уравнения имеет вид

$$I = I_0 \cdot \left(1 - e^{\left(-\frac{t}{\tau}\right)}\right), \quad (566)$$

где  $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$  – установившейся ток при  $t \rightarrow \infty$ .

Таким образом, при включении источника тока сила тока возрастает по экспоненциальному закону, а не мгновенно (рис. 232, кривая 2).

### Взаимная индукция

Взаимной индукцией называется явление возбуждения ЭДС электромагнитной индукции в одной электрической цепи при изменении электрического тока в другой цепи или при изменении взаимного расположения этих двух цепей.

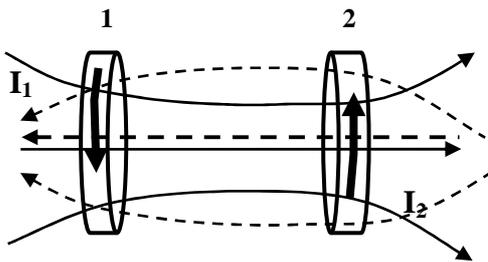


Рис. 234. Два контура с токами  $I_1$  и  $I_2$

Рассмотрим два неподвижных контура 1 и 2 с токами  $I_1$  и  $I_2$ , расположенных довольно близко друг к другу (рис. 234). При протекании в контуре 1 тока  $I_1$  магнитный поток пронизывает второй контур  $\Phi_{21} = L_{21} \cdot I_1$  аналогично  $\Phi_{12} = L_{12} \cdot I_2$ .

Коэффициенты пропорциональности  $L_{21}$  и  $L_{12}$  равны друг другу:  $L_{12} = L_{21} = L$  и называются взаимной индуктивностью контура.

При изменении силы тока в одном из контуров, в другом индуцируется ЭДС:  $\varepsilon_{i2} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -L \cdot \frac{dI_1}{dt}$ ,  $\varepsilon_{i1} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -L \cdot \frac{dI_2}{dt}$ . (567)

Взаимная индуктивность контуров зависит от геометрической формы, размеров, взаимного расположения контуров и от магнитной проницаемости окружающей среды.

Пример. Рассчитаем взаимную индуктивность двух катушек, намотанных на тороидальный сердечник (рис. 235).

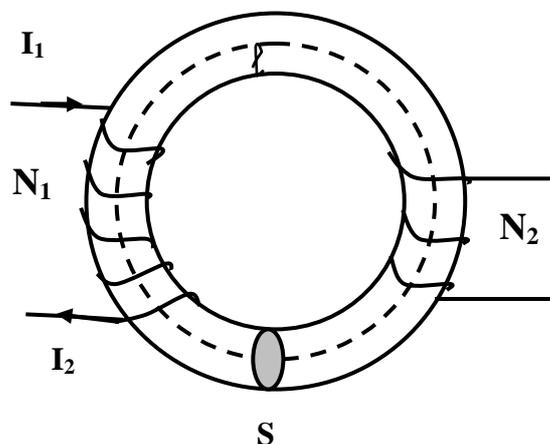


Рис.235. Две катушки, намотанные на тороидальный сердечник

Первая катушка с числом витков  $N_1$  и током  $I_1$  создаёт поле  $B = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N_1 \cdot I_1}{l}$ . Магнитный поток сквозь один виток второй катушки  $\Phi_2 = B \cdot S = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N_1 \cdot I_1}{l} \cdot S$ , где  $l$  – длина сердечника по средней линии. Тогда полный магнитный поток (потокосцепление) сквозь вторичную обмотку, содержащую  $N_2$  витков

$$\Psi = \Phi_2 \cdot N_2 = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{l} \cdot S \cdot I_1.$$

Поскольку поток  $\Psi$  создается током  $I_1$ , то  $L = \frac{\Psi}{I_1} = \mu_0 \cdot \mu \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{l} \cdot S.$  (568)

Данное устройство является примером трансформатора.

### Трансформаторы

Принцип действия трансформаторов, применяемых для повышения или понижения напряжения переменного тока, основан на явлении взаимной индукции. Переменный ток  $I_1$  создаёт в первичной обмотке переменное магнитное поле. Это вызывает во вторичной обмотке появление ЭДС взаимной индукции. При этом

$$\varepsilon_2 = -\frac{N_2}{N_1} \cdot \varepsilon_1, \quad (569)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – число витков в первичной и вторичной обмотках.

Отношение  $k = N_2/N_1$ , показывающее, во сколько раз ЭДС во вторичной обмотке трансформатора больше или меньше, чем в первичной, называется коэффициентом трансформации.

Если  $k > 1$ , то трансформатор – повышающий, если  $k < 1$  – понижающий.

### Энергия магнитного поля

Проводник, по которому протекает электрический ток, всегда окружён магнитным полем. Магнитное поле появляется и исчезает вместе с появлением и исчезновением тока. Магнитное поле, подобно электрическому полю, является носителем энергии. Энергия магнитного поля равна работе, которую совершает ток на создание этого поля.

Рассмотрим контур индуктивностью  $L$ , по которому течёт ток  $I$ . С данным контуром сцеплен магнитный поток  $\Phi = L \cdot I$ . При изменении тока на  $dI$  магнитный поток изменяется на  $d\Phi = L \cdot dI$ . Для такого изменения магнитного потока необходимо совершить работу  $dA = I \cdot d\Phi = L \cdot I \cdot dI$ . Тогда работа по созданию магнитного потока  $\Phi$  будет равна

$$A = \int_0^I L \cdot I dI = L \cdot I^2 / 2.$$

Энергия магнитного поля, связанного с контуром:

$$W = L \cdot I^2 / 2. \quad (570)$$

На примере однородного магнитного поля внутри длинного соленоида выразим энергию магнитного поля через величины, характеризующие это поле в окружающем пространстве. Индуктивность соленоида

$$L = \mu_0 \cdot \mu \cdot N^2 \cdot S / l; \quad (571)$$

$B = \mu_0 \cdot \mu \cdot N \cdot I / l \Rightarrow I = B \cdot l / \mu_0 \cdot \mu \cdot N$ ; учитывая, что  $B = \mu_0 \cdot \mu \cdot H$ , получаем:

$$W = B^2 \cdot V / 2 \cdot \mu_0 \cdot \mu = B \cdot H \cdot V / 2, \quad (572)$$

где  $S \cdot l = V$  – объём соленоида.

Магнитное поле длинного соленоида однородно и сосредоточено внутри него, поэтому энергия заключена в объёме соленоида и распределена в нём с объёмной плотностью

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{B^2}{2 \cdot \mu_0 \cdot \mu} = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot H^2}{2} = \frac{B \cdot H}{2}. \quad (573)$$

Эти соотношения носят общий характер и справедливы и для неоднородных полей, но только для сред, в которых связь между  $\vec{B}$  и  $\vec{H}$  линейная (т.е. для пара – и диамагнетиков). Выражение для объёмной плотности энергии магнитного поля аналогично соответствующему выражению для объёмной плотности энергии электростатического поля

$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2} = \frac{E \cdot D}{2}$  с той разницей, что электрические величины

заменены в нём магнитными. Имеет место электромеханическая аналогия (таблица 15) и аналогия при сопоставлении полей (таблица 16).

Таблица 15

*Электромеханическая аналогия*

Поступательное движение		Вращательное движение		Электромагнитные величины	
Смещение	$x$	Угловое смещение	$\varphi$	Заряд	$Q$
Скорость	$v = \frac{dx}{dt}$	Угловая скорость	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	Сила тока	$I = \frac{dQ}{dt}$
Ускорение	$a = \frac{d^2x}{dt^2}$	Угловое ускорение	$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$	Скорость изменения тока	$\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$
Масса	$m$	Момент инерции	$J$	Индуктивность	$L$
Сила	$F$	Момент силы	$M$	Напряжение	$U$
Импульс	$m \cdot v$	Момент импульса	$J \cdot \omega$	Поток магнитной индукции	$L \cdot I$
Работа	$Fdx$	Работа	$M \cdot d\varphi$	Работа	$UdQ$
Мощность	$F \cdot v$	Мощность	$M \cdot \omega$	Мощность	$U \cdot I$
Кинетическая энергия	$m \cdot v^2 / 2$	Кинетическая энергия	$J \cdot \omega^2 / 2$	Энергия магнитного поля	$L \cdot I^2 / 2$

Таблица 16

*Аналогия при сопоставлении электрического и магнитного полей*

Электрическое поле	Формула	Магнитное поле	Формула
Точечный заряд	$Q$	Элемент проводника с током	$Idt$
Взаимодействие точечных зарядов	$F = \frac{ Q_1  \cdot  Q_2 }{4 \cdot \pi \cdot \varepsilon_0 \cdot r^2}$	Взаимодействие токов	$dF = \frac{\mu_0 \cdot \mu}{4 \cdot \pi} \cdot \frac{2 \cdot I_1 \cdot I_2}{R} dl$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0$	Магнитная постоянная	$\mu_0$
Силовая характеристика электрического поля	$E = F / Q_0$	Силовая характеристика магнитного поля	$B = M_{\max} / p_m$
Однородное электрическое поле	$\vec{E} = const$	Однородное магнитное поле	$\vec{B} = const$
Принцип суперпозиции	$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i$	Принцип суперпозиции	$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i$

Поляризованность	$\vec{P} = \frac{\vec{p}_V}{V} = \sum_i \vec{P}_i / V$	Намагниченность	$\vec{J} = \frac{\vec{p}_m}{V} = \sum_i \vec{P}_a / V$
Ёмкость уединённого проводника	$C = Q / \varphi$	Индуктивность катушки	$L = \Phi / I$
Энергия заряженного конденсатора	$W = \frac{C \cdot (\Delta\varphi)^2}{2}$	Энергия катушки с током	$W = \frac{L \cdot I^2}{2}$
Диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon$	Магнитная проницаемость	$\mu$
Объёмная плотность энергии	$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot E^2}{2}$ $= \frac{E \cdot D}{2}$	Объёмная плотность энергии	$\omega = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \cdot \mu \cdot H^2}{2}$ $= \frac{B \cdot H}{2}$
Поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхность $S$	$\Phi_E = \oint_S \vec{E} d\vec{S} = \oint_S E_n dS$	Поток вектора $\vec{B}$ сквозь поверхность $S$	$\Phi_B = \oint_S \vec{B} d\vec{S} = \oint_S B_n dS$

### 3.6. Элементы теории Максвелла для электромагнитного поля

#### **Идея Максвелла о возбуждении электрического поля переменным магнитным полем**

Из закона Фарадея  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  следует, что *любое* изменение сцепленного с контуром потока магнитной индукции приводит к возникновению электродвижущей силы индукции и вследствие этого появляется индукционный ток. Следовательно, возникновение ЭДС электромагнитной индукции возможно и в *неподвижном* контуре, находящемся в переменном магнитном поле. Однако ЭДС в любой цепи возникает только тогда, когда в ней на носители тока действуют *сторонние силы* – силы неэлектростатического происхождения. Поэтому встает вопрос о природе сторонних сил в данном случае. Опыт показывает, что сторонние силы не связаны ни с тепловыми, ни с химическими процессами в контуре; их возникновение нельзя объяснить силами Лоренца, так как они на неподвижные заряды не действуют.

**Гипотеза Максвелла:** всякое переменное магнитное поле возбуждает в окружающем пространстве электрическое поле, которое и является причиной индукционного поля в контуре.

Согласно представлениям Максвелла, контур, в котором появляется ЭДС, играет второстепенную роль, являясь своего рода лишь «прибором», обнаруживающим это поле.

#### **Циркуляция вектора напряженности вихревого электрического поля**

$$\text{Циркуляция вектора } \vec{E}_B : \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (574)$$

По Максвеллу, изменяющееся во времени магнитное поле порождает поле электрическое  $\vec{E}_B$ , циркуляция которого  $\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = \oint_L E_{Bl} dl = -\frac{d\Phi}{dt}$ .

Учитывая, что  $\Phi = \int_S \vec{B} d\vec{S}$  и поверхность, и контур неподвижны, можно записать  $\oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} d\vec{S} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}$  (575). Здесь  $E_{Bl}$  – проекция вектора  $\vec{E}_B$  на направление  $d\vec{l}$ ; символ частной производной подчеркивает тот факт, что интеграл  $\int_S \vec{B} d\vec{S}$  является функцией только от времени.

Сравним циркуляции векторов  $\vec{E}_Q$  и  $\vec{E}_B$

$$\oint_L \vec{E}_Q d\vec{l} = 0; \quad \oint_L \vec{E}_B d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}.$$

Между рассматриваемыми полями ( $\vec{E}_Q$  и  $\vec{E}_B$ ) имеется принципиальное различие: циркуляция вектора  $\vec{E}_B$  в отличие от циркуляции вектора  $\vec{E}_Q$  не равна нулю.

Таким образом, можно сделать **вывод**: *Электрическое поле  $\vec{E}_B$ , возбуждаемое переменным магнитным полем, как и само магнитное поле, является вихревым. Электростатическое поле  $\vec{E}_Q$  (его циркуляция равна нулю – потенциальное ( $\vec{E}_Q$  – вектор напряженности электростатического поля).*

### Ток смещения

Согласно Максвеллу, если *всякое переменное магнитное поле возбуждает* в окружающем пространстве *вихревое электрическое поле*, то должно существовать и обратное явление: *всякое изменение электрического поля должно вызывать появление* в окружающем пространстве *вихревого магнитного поля*.

### Ток смещения

$$I_{cm} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}. \quad (576)$$

Он введен Максвеллом для установления количественных соотношений между изменяющимся электрическим полем и вызываемым им магнитным полем.

По Максвеллу, в цепи переменного тока, содержащей конденсатор, переменное электрическое поле в конденсаторе в каждый момент времени создает такое магнитное поле, *как если бы между обкладками конденсатора существовал ток смещения, равный току в подводящих проводах*. Тогда можно утверждать, что токи проводимости  $I$  и смещения  $I_{cm}$  равны  $I_{cm} = I$ . Ток проводимости вблизи обкладок конденсатора

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \int_S \sigma dS = \int_S \frac{\partial \sigma}{\partial t} dS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} dS. \quad (577)$$

Поверхностная плотность заряда  $\sigma$  на обкладках равна электрическому смещению  $D$  в конденсаторе. Подынтегральное выражение можно рассматривать как частный случай скалярного произведения  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ ,

когда  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  и  $d\vec{S}$  взаимно параллельны. Поэтому для общего случая

можно записать  $I = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S} = I_{cm}$ .

#### Плотность тока смещения

$$\vec{j}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (578)$$

Сила тока сквозь произвольную поверхность может быть определена как поток вектора плотности тока  $I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$ . Тогда  $I = I_{cm} = \int_S \vec{j}_{cm} d\vec{S}$ .

Сравнив это выражение с  $I_{cm} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} d\vec{S}$ , получим  $\vec{j}_{cm} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ .

Здесь  $D$  – вектор электрического смещения в конденсаторе.

#### Плотность тока смещения в диэлектрике

$$\vec{j}_{cm} = \epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}, \quad (579)$$

$\vec{D} = \epsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P}$ . Дифференцируя, получим плотность тока смещения в диэлектрике.

#### Плотность тока поляризации

$$\frac{\partial \vec{P}}{\partial t}.$$

Она обусловлена упорядоченным движением электрических зарядов в диэлектрике (смещение зарядов в неполярных молекулах или поворот диполей в полярных молекулах). Возбуждение магнитного поля токами поляризации правомерно, так как токи поляризации по своей природе не отличаются от токов проводимости.

#### Плотность тока смещения в вакууме

$$\epsilon_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Обусловлена *только* изменением электрического поля во времени, но также побуждает магнитное поле. Это принципиально новое утверждение Максвелла. Даже в *вакууме* всякое изменение во времени электрического поля приводит к возникновению в окружающем пространстве магнитного поля.

### **Замкнутость цепей переменного тока. Плотность полного тока**

$$\vec{j}_{\text{полн}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (580)$$

По Максвеллу, полный ток всегда замкнут, т. е. на концах проводника обрывается лишь проводимость, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости ( $\vec{j}_{\text{полн}}$  – плотность полного тока;  $\vec{j}$  – плотность тока проводимости; формула  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  – плотность тока смещения).

#### **Полный ток**

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S}. \quad (581)$$

Определяется как поток вектора плотности полного тока.

**Выводы, сделанные Максвеллом.** Введя понятия тока смещения и полного тока, Максвелл по-новому подошел к рассмотрению замкнутости цепей переменного тока.

*Полный ток в них всегда замкнут*, т.е. на концах проводника обрывается лишь ток проводимости, а в диэлектрике (вакууме) между концами проводника имеется ток смещения, который замыкает ток проводимости.

Из всех физических свойств, присущих току проводимости, Максвелл приписал току смещения лишь одно – *способность создавать в окружающем пространстве магнитное поле.*

### **Обобщенная теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$**

#### **Теорема о циркуляции вектора $\vec{H}$**

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = I. \quad (582)$$

Циркуляция вектора  $\vec{H}$  по произвольному замкнутому контуру  $L$  равна алгебраической сумме токов проводимости, охватываемых этим контуром.

#### **Полный ток**

$$I_{\text{полн}} = \int_S \vec{j}_{\text{полн}} d\vec{S}. \quad (583)$$

Поверхность  $S$  натянута на замкнутый контур  $L$ .

### Обобщенная теорема о циркуляции вектора $H$

$$\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}. \quad (584)$$

Максвелл обобщил теорему о циркуляции вектора  $H$ , введя в её правую часть полный ток.

### Уравнения Максвелла для электромагнитного поля

#### Уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{S}; & \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= \int_V \rho dV \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= \int_S (\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) d\vec{S}; & \int_S \vec{B} d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \quad (585)$$

Величины, входящие в уравнения Максвелла, не являются независимыми и связаны так:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \cdot \epsilon_0 \cdot \vec{E}; \\ \vec{B} &= \mu \cdot \mu_0 \cdot \vec{H}; \\ \vec{j} &= \gamma \cdot \vec{E}, \end{aligned} \quad (586)$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля;  $D$  – электрическое смещение;  $\vec{B}$  – магнитная индукция;  $\vec{H}$  – напряженность магнитного поля;  $\vec{j}$  – плотность тока проводимости;  $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$  – плотность тока смещения;  $\rho$  – объемная плотность заряда;  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$  – соответственно электрическая и магнитная постоянные;  $\epsilon$  и  $\mu$  – соответственно диэлектрическая и магнитная проницаемости;  $\gamma$  – удельная проводимость вещества.

**Физический смысл уравнений.** Источником электрического поля могут быть либо электрические заряды, либо изменяющиеся во времени магнитные поля, а магнитные поля могут возбуждаться либо движущимися электрическими зарядами (электрическими токами), либо переменными электрическими полями. Уравнения Максвелла несимметричны относительно электрического и магнитного полей. Это связано с тем, что в природе существуют электрические заряды, но нет магнитных зарядов.

### Уравнения Максвелла для стационарных полей

$$\begin{aligned} &\text{Стационарные поля} \\ \vec{E} &= \text{const}; & \vec{B} &= \text{const}. \end{aligned} \quad (587)$$

## Полная система уравнений Максвелла для стационарных полей

$$\begin{aligned} \oint_L \vec{E} d\vec{l} &= 0; & \oint_S \vec{D} d\vec{S} &= Q \\ \oint_L \vec{H} d\vec{l} &= I; & \int_S \vec{B} d\vec{S} &= 0 \end{aligned} \quad (588)$$

Источниками электрического поля в данном случае являются только электрические заряды, источниками магнитного – только токи проводимости.

В этом случае электрические и магнитные поля независимы друг от друга, что и позволяет изучать отдельно постоянное электрическое и магнитное поля.

**Уравнения Максвелла в дифференциальной форме** характеризуют поле в каждой точке пространства.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (589)$$

Физический смысл уравнений Максвелла в дифференциальной форме тот же, что и уравнений Максвелла в интегральной форме.

Теоремы векторного анализа, используемые при переходе от интегральной формы уравнений к дифференциальной, – теоремы Стокса и Гаусса.

**Теорема Стокса:** зная ротор вектора  $A$  в каждой точке некоторой поверхности  $S$ , можно вычислить циркуляцию этого вектора по контуру  $L$ , ограничивающему  $S$

$$\oint_L \vec{A} d\vec{l} = \int_S \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{S}. \quad (590)$$

**Теорема Гаусса:** зная дивергенцию вектора  $A$  в каждой точке пространства, можно вычислить поток этого вектора через произвольную замкнутую поверхность  $S$  конечных размеров

$$\oint_S \vec{A} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV. \quad (591)$$

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и во времени изменяются непрерывно.

Выясним, какая из форм уравнений Максвелла – интегральная или дифференциальная – наиболее предпочтительна?

Если заряды и токи распределены в пространстве непрерывно, то обе формы уравнений Максвелла – интегральная или дифференциальная – эквивалентны. Однако если имеются *поверхности разрыва* – поверхности, на которых свойства среды или полей меняются скачкообразно, то интегральная форма уравнений является более общей.

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме предполагают, что все величины в пространстве и во времени изменяются непрерывно. Чтобы достичь математической эквивалентности обеих форм уравнений Максвелла, дифференциальную форму дополняют *граничными условиями*, которым можно удовлетворять магнитное поле на границе раздела двух сред.

$$\begin{aligned} D_{n1} &= D_{n2}; & E_{\tau1} &= E_{\tau2}; \\ B_{n1} &= B_{n2}; & H_{\tau1} &= H_{\tau2} \end{aligned} \quad (592)$$

(первое и последнее уравнения отвечают случаям, когда на границе раздела нет ни свободных зарядов, ни токов проводимости).

Из уравнений Максвелла следует, что переменное магнитное поле всегда связано с порождаемым им электрическим полем, а переменное электрическое поле всегда связано с порождаемым им магнитным, т.е. электрическое и магнитное поля неразрывно связаны друг с другом – они образуют единое **электромагнитное поле**.

Теория Максвелла, являясь обобщением основных законов электрических и магнитных явлений, не только не смогла объяснить уже известные экспериментальные факты, что также является важным её следствием, но и предсказала новые явления. Одним из важных выводов этой теории являлось существование магнитного поля токов смещения, что позволило Максвеллу предсказать существование **электромагнитных волн** – переменного электромагнитного поля, распространяющегося в пространстве с конечной скоростью. В дальнейшем было доказано, что скорость распространения свободного электромагнитного поля (не связанного с зарядами и токами) в вакууме равна скорости света:  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. Эти выводы привели Максвелла к созданию электромагнитной теории света, согласно которой свет представляет собой также электромагнитные волны.

## Приложение

### Некоторые сведения из математики

Таблица 17

*Правила действия со степенями и корнями*

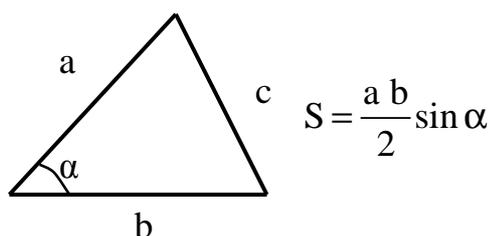
$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$
$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$
$a^n = \frac{1}{a^{-n}}$	$1 / \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$
$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	

Таблица 18

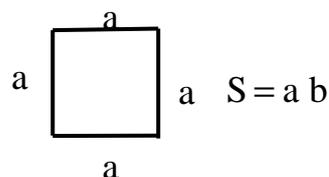
*Некоторые основные соотношения*

Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$
Квадрат двучлена	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$
Формула корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

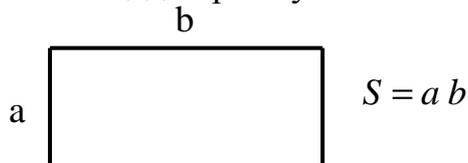
Площадь треугольника



Площадь квадрата



Площадь прямоугольника



Площадь трапеции

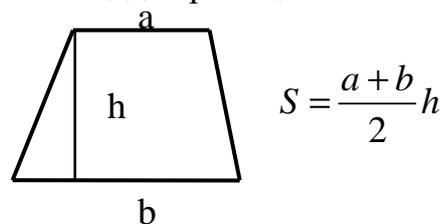


Таблица 19

Соотношения для вычислений площади и объема

Площадь сферы радиусом R	$S = 4\pi R^2$
Площадь круга радиусом R	$S = \pi R^2$
Длина окружности радиусом R	$l = 2\pi R$
Объем сферы радиусом R	$V = \frac{4}{3}\pi R^3$
Объем цилиндра высотой H с радиусом основания R	$V = \pi R^2 H$
Объем куба со стороной a	$V = a^3$
Объем конуса высотой H с радиусом основания R	$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

Таблица 20

Основные производные

$y = u + v - \omega$	$y' = u' + v' - \omega'$
$y = u v$	$y' = u' v + u v'$
$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
$y = const$	$y' = 0$
$y = Ax$	$y' = A, \text{ где } A - const$
$y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
$y = \sin x$	$y' = \cos x$
$y = \sin Ax$	$y' = A \cos Ax, A - const$
$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
$y = \cos Ax$	$y' = -A \sin Ax$
$y = a^x$	$y' = a^x \ln a$
$y = tg x$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

### Некоторые интегралы

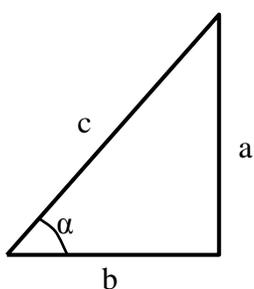
$$\int x^m \cdot dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad m = \text{const} \neq -1. \quad \int \frac{dx}{x} = \ln x.$$

$$\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2} \cdot dx = -\frac{1}{x}. \quad \int \sin x \cdot dx = -\cos x.$$

$$\int \cos x \cdot dx = \sin x. \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x. \quad \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left( \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right).$$

Тригонометрические функции острого угла:



$$\sin \alpha = \frac{a}{c};$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b};$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}.$$

Теорема Пифагора

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Теорема косинусов

$$a^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cos \alpha.$$

Таблица 21

### Основные тригонометрические тождества

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$	$1 + \cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$	$1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$
$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$	$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$
$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha}$	$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$

Таблица 22

### Формулы приведения

$\alpha$	$\alpha + (\pi/2)$	$\alpha + \pi$	$\alpha + (3\pi/2)$	$(\pi/2) - \alpha$	$\pi - \alpha$	$(3\pi/2) - \alpha$
sin	cos $\alpha$	-sin $\alpha$	-cos $\alpha$	cos $\alpha$	sin $\alpha$	-cos $\alpha$
cos	-sin $\alpha$	-cos $\alpha$	sin $\alpha$	sin $\alpha$	-cos $\alpha$	-sin $\alpha$
tg	-ctg $\alpha$	tg $\alpha$	-ctg $\alpha$	ctg $\alpha$	-tg $\alpha$	ctg $\alpha$
ctg	-tg $\alpha$	ctg $\alpha$	-tg $\alpha$	tg $\alpha$	-ctg $\alpha$	tg $\alpha$

Тригонометрические функции двойного аргумента:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha; \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha; \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Таблица 23

*Единицы СИ*

Величина		Единица	
Наименование	Размерность	Наименование	Обозначение
<b>Основные единицы</b>			
Длина	L	метр	м
Масса	M	килограмм	кг
Время	T	секунда	с
Сила электрического тока	I	ампер	A
Термодинамическая температура	Θ	кельвин	K
Количество вещества	ν	моль	моль
Сила света	J	кандела	кд
<b>Дополнительные единицы</b>			
Плоский угол	–	радиан	рад
Телесный угол	–	стерадиан	ср

Таблица 24

*Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименования*

Приставка		Множитель
Наименование	обозначение	
пэта	П	$10^{15}$
тра	T	$10^{12}$
гга	G	$10^9$
мега	M	$10^6$
кило	к	$10^3$
гекто	г	$10^2$
санتي	с	$10^{-2}$
мили	м	$10^{-3}$
микро	мк	$10^{-6}$
нано	н	$10^{-9}$
пико	п	$10^{-12}$
фемто	ф	$10^{-15}$

## Основные физические постоянные (округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	$g$	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / (\text{кг} \cdot \text{с}^2)$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R$	$8,31 \text{ Дж} / (\text{моль} \cdot \text{К})$
Молярный объём идеального газа (при нормальных условиях)	$V_M$	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 / \text{моль}$
Постоянная Фарадея	$F$	96485 Кл/моль
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} / \text{К}$
Элементарный заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Скорость света в вакууме	$c$	$3,00 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана – Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт} / (\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$
Постоянная закона смещения Вина	$b$	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Планка	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	$R$	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радиус Бора	$a$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комптоновская длина волны электрона	$\lambda$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	$\mu_B$	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж} (13,6 \text{ эВ})$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф} / \text{м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн} / \text{м}$
Масса покоя электрона		$9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса покоя протона		$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Масса покоя нейтрона		$1,68 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$

Таблица 26

*Некоторые внесистемные единицы физических величин*

1 год = 365,25 сут = $3,16 \cdot 10^7$ с	1 мм. рт. ст. = 133,3 Па.
1 сут = 86400 с	1 атм. = 760 мм. рт. ст. $\approx 10^5$ Па
$1^\circ = 1,75 \cdot 10^{-2}$ рад.	$1 \text{ \AA} = 10^{-10}$ м. (ангстрем)
$1' = 2,91 \cdot 10^{-4}$ рад.	1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж.
$1'' = 4,85 \cdot 10^{-6}$ рад.	1 кал = 4,19 Дж
	1 Р = $2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг (Рентген)
1 л.с. = 736 Вт	1 а.е.м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг

Нормальные условия: давление  $10^5$  Па, температура  $0^\circ$  С.

**Данные о Земле, Луне и Солнце**

Таблица 27

*Земля*

Радиус	$6,378164 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность	$5,518 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup>
Масса	$5,976 \cdot 10^{24}$ кг
Ускорение свободного падения у поверхности	9,81 м/с <sup>2</sup>
На широте $45^\circ$	9,8 м/с <sup>2</sup>
На экваторе	9,78 м/с <sup>2</sup>
На полюсе	9,83 м/с <sup>2</sup>
Средняя скорость движения по орбите	29,76 км/ч
Линейная скорость точки земной поверхности на широте $60^\circ$	223 м/с
Среднее расстояние до солнца	$1,49598 \cdot 10^{11}$ м
Наибольшая высота суши над уровнем океана (гора Джомолунгма (Эверест))	8882 м
Наибольшая глубина Мирового океана (Марианская впадина, Тихий океан)	11500 м

Таблица 28

*Луна*

Радиус	$1,737 \cdot 10^6$ м
Средняя плотность	$3,33 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup>
Масса	$7,35 \cdot 10^{22}$ кг
Ускорение свободного падения у поверхности	1,62 м/с <sup>2</sup>
Среднее расстояние до Луны	$3,844 \cdot 10^8$ м

Таблица 29

*Солнце*

Радиус	$6,9599 \cdot 10^8$ м
Средняя плотность	$1,41 \cdot 10^3$ кг/м <sup>3</sup>
Масса	$1,989 \cdot 10^{30}$ кг
Ускорение свободного падения	274 м/с <sup>2</sup>

Таблица 30

*Свойства некоторых твердых веществ*

Вещество	Плотность, $10^3$ кг/м <sup>3</sup>	Температура плавления, °С
Алюминий	2,6	660
Железо	7,9	1530
Золото	19,32	1063
Латунь	8,4	900
Лед	0,9	0
Медь	8,6	1083
Олово	7,2	232
Платина	21,4	1770
Парафин	0,87	42
Свинец	11,3	327
Серебро	10,5	960
Сталь	7,7	1300
Смола	1,1	–
Цинк	7,0	420
Чугун	7,8	1100
Гипс	1,5	
Бетон	2,0	
Гранит, стекло	2,5	
Кирпич	1,8	

Таблица 31

*Плотности жидкостей*

Вещество	$10^3 \cdot$ кг/м <sup>3</sup>	Вещество	$10^3 \cdot$ кг/м <sup>3</sup>
Бензин, эфир	0,70	Ртуть	13,6
Вода морская	1,1	Глицерин	1,26
Вода чистая при 4 <sup>0</sup> С	1	Масло подсолнечное	0,92
Керосин, спирт	0,8	Молоко	1,05

Таблица 32

*Плотность газов (при нормальных условиях)*

Газ	Плотность, кг/м <sup>3</sup>
Водород	0,09
Воздух	1,29
Гелий	0,18
Кислород	1,43

Таблица 33

*Коэффициент трения скольжения  
(при движении, для сухих поверхностей)*

Бронза по бронзе	0,2
Дерево по дереву	0,33
Железо по железу	0,4
Металл по дереву (в среднем)	0,16
Лед по льду	0,035
Каучук по дереву или металлу	0,55
Ремень кожаный по чугунному шкиву	0,56

Таблица 34

*Удельная теплоемкость, кДж / (кг·К)*

Вещество	
<b>Твердые тела</b>	
Алюминий	0,88
Лед	2,1
Медь	0,38
Олово	0,23
Свинец	0,13
Серебро	0,23
Сталь	0,46
<b>Жидкости</b>	
Вода	4,19
Ртуть	0,12
Спирт	2,4
<b>Газы (при постоянном давлении)</b>	
Азот	1,05
Водород	14,3
Воздух	1,01
Гелий	5,29
Кислород	0,913

Таблица 35

*Удельная теплота парообразования, кДж / (кг·К)*

Вещество	
Вода	2,3
Ртуть	0,29
Спирт	0,85

Таблица 36

*Температура конденсации некоторых газов, °С  
(при нормальном давлении)*

Вещество	
Азот	-195
Водород	-253
Гелий	-269
Кислород	-183

Таблица 37

*Коэффициент поверхностного натяжения жидкостей, мН/м  
(при 20° С )*

Вода	73	Молоко	46
Бензин	21	Нефть	30
Керосин	24	Ртуть	510
Мыльный раствор	40	Спирт	22

Таблица 38

*Удельная теплота сгорания топлива, МДж/кг*

Бензин	46	Порох	3,8
Дерево	10	Спирт	29
Дизельное топливо	42	Топливо для реактив-	
Каменный уголь	29	ных самолетов	43
Керосин	46	Условное топливо	29

Таблица 39

*Удельная теплота плавления, кДж / (кг·К)*

Вещество	
Алюминий	380
Лед	330
Медь	180
Олово	59
Свинец	25
Серебро	87
Сталь	82

Таблица 40

*Зависимость давления  $p$  и плотности  $\rho$  насыщенного  
водяного пара от температуры*

$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{кПа}$	$\rho, \text{г/м}^3$	$t, ^\circ\text{C}$	$p, \text{кПа}$	$\rho, \text{г/м}^3$
-5	0,40	3,2	11	1,33	10,0
0	0,61	4,8	12	1,40	10,7
1	0,65	5,2	13	1,49	11,4
2	0,71	5,6	14	1,60	12,1
3	0,76	6,0	15	1,71	12,8
4	0,81	6,4	16	1,81	13,6
5	0,88	6,8	17	1,93	14,5
6	0,93	7,3	18	2,07	15,4
7	1,0	7,8	19	2,20	16,3
8	1,06	8,3	20	2,33	17,3
9	1,14	8,8	25	3,17	23,0
10	1,23	9,4	50	12,3	33,0

Таблица 41

*Психрометрическая таблица*

Показания сухого пси- хромметра	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	100	81	63	45	28	11	—	—	—	—	—
2	100	84	68	51	53	20	—	—	—	—	—
4	100	85	70	56	42	28	14	—	—	—	—
6	100	86	73	60	47	35	23	10	—	—	—
8	100	87	75	63	51	40	28	18	7	—	—
10	100	88	76	65	54	44	34	24	14	5	—
12	100	89	78	68	57	48	38	29	20	11	—
14	100	89	79	70	60	51	42	34	25	17	9
16	100	90	81	71	62	54	45	37	30	22	15
18	100	91	82	73	65	56	49	41	34	27	20
20	100	91	83	74	66	59	51	44	37	30	24
22	100	92	83	76	68	61	54	47	40	34	28
24	100	92	84	77	69	62	56	59	43	37	31
26	100	92	85	78	71	64	58	51	46	40	34
28	100	93	85	78	72	65	59	53	48	42	37
30	100	93	85	79	73	67	61	55	50	44	39

Таблица 42

*Предел прочности на растяжение  $\sigma_{пр}$  и модуль упругости  $E$*

Вещество	$\sigma_{пр}$ , Мпа	$E$ , ГПа
Алюминий	100	70
Латунь	50	100
Свинец	15	17
Серебро	140	80
Сталь	500	210

Таблица 43

*Подвижность ионов в газах,  $m^2 B \cdot c$*

Газ	Положительные ионы	Отрицательные ионы
Азот	$1,27 \cdot 10^{-4}$	$1,81 \cdot 10^{-4}$
Водород	$5,4 \cdot 10^{-4}$	$7,4 \cdot 10^{-4}$
Воздух	$1,4 \cdot 10^{-4}$	$1,9 \cdot 10^{-4}$

Таблица 44

*Диэлектрическая проницаемость*

Алмаз	16,5	Парафин	2
Масло	5	Парафинированная бумага	2
Воск	7,8	Слюда	6
Вода	81	Стекло	7
Керосин	2	Фарфор	6
Лёд ( $-18^{\circ}C$ )	3,2	Эбонит	2,6
Резина	3	Янтарь	2,7

Таблица 45

*Удельное сопротивление проводников ( $10^{-7} Ом \cdot м$ )*

Алюминий	0,28	Нихром	11,0
Вольфрам	0,55	Олово	1,2
Графит	0,39	Платина	1,05
Железо	1,2	Ртуть	9,4
Кобальт	0,62	Свинец	2,1
Латунь	0,71	Серебро	0,16
Медь	0,17	Сталь	0,12
Никелин	4,2	Цинк	0,59
Никель	0,73		

Таблица 46

Температурный коэффициент сопротивления ( $10^{-3} K^{-1}$ )

Алюминий	3,6	Нихром	0,4
Вольфрам	4,2	Олово	4,2
Железо	6,0	Платина	3,8
Латунь	1,0	Свинец	3,7
Медь	4,2	Серебро	3,6
Никелин	0,1	Сталь	6,0
Никель	6,2		

Таблица 47

Электрохимические эквиваленты, мг/Кл ( $10^{-6}$  кг/Кл)

Алюминий ( $Al^{3+}$ )	0,093	Никель ( $Ni^{2+}$ )	0,36
Водород ( $H^+$ )	0,0104	Серебро ( $Ag^+$ )	1,12
Кислород ( $O^{2-}$ )	0,083	Хром ( $Cr^{3+}$ )	0,18
Медь ( $Cu^{2+}$ )	0,33	Цинк ( $Zn^{2+}$ )	0,34
Олово ( $Sn^{2+}$ )	0,62		

Таблица 48

Работа выхода электронов из металла,  $10^{-19}$  Дж

Вольфрам	7,2	Платина	8,5
Калий	3,2	Серебро	7,5
Литий	3,8	Цезий	3,2
Натрий	4,0	Цинк	6,6

Таблица 49

Энергия ионизации (эВ)

Водород	13,6	Литий	75,6
Гелий	24,6	Ртуть	10,4

Таблица 50

## Период полураспада радиоактивных изотопов

Изотоп	Символ изотопа	Период полураспада
Актиний	$^{225}_{89}\text{Ac}$	10 сут
Иод	$^{131}_{53}\text{I}$	8 сут
Иридий	$^{192}_{77}\text{Ir}$	75 сут
Кобальт	$^{60}_{27}\text{Co}$	5,3 года
Магний	$^{27}_{12}\text{Mg}$	10 мин
Радий	$^{219}_{88}\text{Ra}$	$10^{-3}$ с
Радий	$^{226}_{88}\text{Ra}$	$1,62 \cdot 10^3$ лет
Радон	$^{222}_{86}\text{Rn}$	3,8 сут
Стронций	$^{90}_{38}\text{Sr}$	28 лет
Торий	$^{229}_{90}\text{Th}$	$7 \cdot 10^3$ лет
Уран	$^{238}_{92}\text{U}$	$4,5 \cdot 10^9$ лет
Фосфор	$^{32}_{15}\text{P}$	14,3сут
Натрий	$^{22}_{11}\text{Na}$	2,6 года

## ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ЭЛЕМЕНТОВ Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

ПЕРИОДЫ	Г Р У П П Ы								Э Л Е М Е Н Т О В														
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII															
1	<b>H</b> 1 1,008																		2 4,003	<b>He</b>			
2	<b>Li</b> 3 6,94	<b>Be</b> 4 9,01	5 10,81	<b>B</b> 6 12,01	<b>C</b> 7 14,01	<b>N</b> 8 16,0	<b>O</b> 9 19,0													10 20,18	<b>Ne</b>		
3	<b>Na</b> 11 22,99	<b>Mg</b> 12 24,3	13 26,98	<b>Al</b> 14 28,09	<b>Si</b> 15 30,97	<b>P</b> 16 32,06	<b>S</b> 17 35,45														18 39,95	<b>Ar</b>	
4	<b>K</b> 19 39,10	<b>Ca</b> 20 40,1	21 44,96	<b>Ti</b> 22 47,9	<b>V</b> 23 50,9	<b>Cr</b> 24 52,0	<b>Mn</b> 25 54,94	<b>Fe</b> 26 55,85	<b>Co</b> 27 58,93	<b>Ni</b> 28 58,71													
	29 63,55	<b>Cu</b> 30 65,4	<b>Zn</b> 31 69,7	<b>Ga</b> 32 72,59	<b>Ge</b> 33 74,92	<b>As</b> 34 78,96	<b>Se</b> 35 78,9	<b>Br</b>													36 83,80	<b>Kr</b>	
5	<b>Rb</b> 37 85,47	<b>Sr</b> 38 87,6	<b>Y</b> 39 88,9	<b>Zr</b> 40 91,2	<b>Nb</b> 41 92,9	<b>Mo</b> 42 95,94	<b>Tc</b> 43 (99)	<b>Ru</b> 44 101,1	<b>Rh</b> 45 102,9	<b>Pd</b> 46 106,4													
	47 107,9	<b>Ag</b> 48 112,4	<b>Cd</b> 49 114,8	<b>In</b> 50 118,7	<b>Sn</b> 51 121,75	<b>Sb</b> 52 127,6	<b>Te</b> 53 126,9	<b>I</b>														54 131,3	<b>Xe</b>
6	<b>Cs</b> 55 132,9	<b>Ba</b> 56 137,3	* <b>La</b> 57 138,9	<b>Hf</b> 72 178,5	<b>Ta</b> 73 180,9	<b>W</b> 74 183,8	<b>Re</b> 75 186,2	<b>Os</b> 76 190,2	<b>Ir</b> 77 192,2	<b>Pt</b> 78 195,1													
	79 196,9	<b>Au</b> 80 200,6	<b>Hg</b> 81 204,4	<b>Tl</b> 82 207,2	<b>Pb</b> 83 208,9	<b>Bi</b> 84 (210)	<b>Po</b> 85 (210)	<b>At</b>														86 (222)	<b>Rn</b>
7	<b>Fr</b> 87 (223)	<b>Ra</b> 88 (226)	** <b>Ac</b> 89 (227)	<b>Rf</b> 104 (261)	<b>Db</b> 105 (262)	<b>Sg</b> 106 (263)	<b>Bh</b> 107 (264)	<b>Hs</b> 108 (265)	<b>Mt</b> 109 (266)														

\* ЛАНТАНОИДЫ

\*\* АКТИНОИДЫ

58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
<b>Ce</b>	<b>Pr</b>	<b>Nd</b>	<b>Pm</b>	<b>Sm</b>	<b>Eu</b>	<b>Gd</b>	<b>Tb</b>	<b>Dy</b>	<b>Ho</b>	<b>Er</b>	<b>Tm</b>	<b>Yb</b>	<b>Lu</b>
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
<b>Th</b>	<b>Pa</b>	<b>U</b>	<b>Np</b>	<b>Pu</b>	<b>Am</b>	<b>Cm</b>	<b>Bk</b>	<b>Cf</b>	<b>Es</b>	<b>Fm</b>	<b>Md</b>	<b>No</b>	<b>Lr</b>

Таблица 51

*Масса нейтральных атомов*

Элемент	Порядковый номер	Изотоп	Масса, а.е.м.
Водород	1	$^1\text{H}$	1,00783
		$^2\text{H}$	2,01410
		$^3\text{H}$	3,01605
Гелий	2	$^3\text{He}$	3,01603
		$^4\text{He}$	4,00260
Литий	3	$^6\text{Li}$	6,01513
		$^7\text{Li}$	7,01601
Бериллий	4	$^7\text{Be}$	7,01693
		$^9\text{Be}$	9,01219
		$^{10}\text{Be}$	10,01354
Бор	5	$^9\text{B}$	9,01333
		$^{10}\text{B}$	10,01294
		$^{11}\text{B}$	11,00931
Углерод	6	$^{10}\text{C}$	10,00168
		$^{12}\text{C}$	12,00000
		$^{13}\text{C}$	13,00335
		$^{14}\text{C}$	14,00324
Азот	7	$^{13}\text{N}$	13,00574
		$^{14}\text{N}$	14,00307
		$^{15}\text{N}$	15,00011
Кислород	8	$^{16}\text{O}$	15,99491
		$^{17}\text{O}$	16,99913
		$^{18}\text{O}$	17,99916
Фтор	9	$^{19}\text{F}$	18,99840
Натрий	11	$^{22}\text{Na}$	21,99444
		$^{23}\text{Na}$	22,98977
Магний	12	$^{23}\text{Mg}$	22,99414
Алюминий	13	$^{30}\text{Al}$	29,99817
Кремний	14	$^{31}\text{Si}$	30,97535
Фосфор	15	$^{31}\text{P}$	30,97376
Калий	19	$^{41}\text{K}$	40,96184
Кальций	20	$^{44}\text{Ca}$	43,95549
Свинец	82	$^{206}\text{Pb}$	205,97446
Полоний	84	$^{210}\text{Po}$	209,98297

## Список литературы

1. Детлаф А.А. Курс физики: учебное пособие для студентов вузов [текст] / А.А. Детлаф, Б.М. Яворский. – М.: Академия, 2005. – 720 с. (книга двух авторов)
2. Дмитриева В.Ф. Физика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования [текст] / В.Ф. Дмитриева. – М.: Академия, 2007. – 464 с. (книга одного автора)
3. Митлина Л.А. Курс физики: Механика. Молекулярная физика и термодинамика: учеб. пособ. [текст] / Л.А. Митлина; Самар. гос. техн. ун-т. Самара, 2004. – 186 с. (книга одного автора)
4. Открытая физика 2.6. Часть I [электронный ресурс]: <http://physics.ru/courses/op25 part1/design/index.htm>
5. Трофимова Т.И. Курс физики [текст] / Т.И. Трофимова. – М.: Высшая школа, 1999. – 542 с.
6. Трофимова Т.И. Физика в таблицах и формулах: учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений и образоват. учреждений сред. проф. образования [текст] / Т.И. Трофимова. – 3-е изд., испр. – М.: «Академия», 2006. – 448 с. (книга одного автора)
7. Касаткиина И.Л. Репетитор по физике. Механика. Молекулярная физика. Термодинамика / И.Л. Касаткина. - Ростов н/Д: Феникс, 2006. - 848 с.

Учебное издание

ПОЛИЦИНСКИЙ Евгений Валериевич

## ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ. ЧАСТЬ 1

Учебное пособие

Научный редактор кандидат педагогических наук,

доцент

*Л.Б. Гиль*

Компьютерная верстка

*Е.В. Полицинский*

Дизайн обложки

*Е.В. Полицинский*

Подписано к печати 17.01.12 Формат 60х84/8. Бумага «Снегурочка».

Печать XEROX. Усл.-печ.л. 18,90 Уч.-изд.л. 17,11

Заказ 1457 Тираж 100 экз.



Национальный исследовательский Томский политехнический университет  
Система менеджмента качества

Издательства Томского политехнического университета сертифицирована  
NATIONAL QUALITY ASSURANCE по стандарту ISO 9001:2008



ИЗДАТЕЛЬСТВО



ТПУ. 634050, г. Томск, пр. Ленина, 30.

Тел/факс: 8(3822) 56-35-35 www.tpu.ru