ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления и защит. Часть 1

Лекция 8

Расчет переходных процессов по вещественным частотным характеристикам. Метод трапеций.

Томск - 2019

Расчет переходных процессов по ВЧХ

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(P)e^{Pt}dt$$

Изображение *Y(P)* по передаточной функции $Y(P)=W(P)\cdot X(P)$

В случае переходной характеристики $x(t)=1(t)$ и $X(P)=\dfrac{1}{P}$

Тогда: $Y(P)=\dfrac{W(P)}{P}$

$$P=i\omega \;\Rightarrow\; y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}Y(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

$$Y(i\omega)=W(i\omega)\cdot X(i\omega)=\frac{W(i\omega)}{i\omega}\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{W(i\omega)}{i\omega}e^{i\omega t}d\omega$$

Представим: $W(i\omega)=\mathrm{Re}(i\omega)+i\,\mathrm{Im}(i\omega)$

$$e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t$$

Расчет переходных процессов по ВЧХ

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Re} + i\,\mathrm{Im}}{i\omega} (\cos\omega t + i\sin\omega t)\, d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im} - i\,\mathrm{Re}}{\omega} (\cos\omega t + i\sin\omega t)\, d\omega$$

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\cos\omega t + \mathrm{Re}\sin\omega t}{\omega}\, d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{Im}\sin\omega t - \mathrm{Re}\cos\omega t}{\omega}\, d\omega$$

Im – нечетная функция от ω

$\cos\omega t$ – четная

ω – нечетная

Re – четная

$\sin\omega t$ – нечетная

Тогда I_1 – четная функция; I_2 – нечетная

Расчет переходных процессов по ВЧХ

I_2=0, т.к. для нечетной функции $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = \int\limits_{-\infty}^{0} + \int\limits_{0}^{\infty}$

$\int\limits_{-\infty}^{0}$ и $\int\limits_{0}^{\infty}$ совпадают за исключением знака функции

Метод трапеций

$$y(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega$$

Этот интеграл плохо сходится, т. к. он содержит интегральный синус $\dfrac{\sin x}{x}$

Свойства интеграла для *y(t)*:

1. Свойство линейности.

$\mathrm{Re}(\omega)$ представим в виде $\mathrm{Re}(\omega) = \mathrm{Re}_1(\omega) + \mathrm{Re}_2(\omega) + \ldots + \mathrm{Re}_n(\omega)$

тогда $y(t) = y_1(t) + y_2(t) + \ldots + y_n(t)$

$$y_1(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}_i(\omega)}{\omega}\sin\omega t d\omega, \;\; i = 1, 2, \ldots, n$$

2. Свойство изменения вдоль оси ω

$\mathrm{Re}(a\omega) \rightarrow$ это соответствует уменьшению масштаба времени в переходной характеристике в a раз $\dfrac{t}{a}$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}(a\omega)}{\omega}\sin\omega t\,d\omega = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}(a\omega)}{a\omega}\sin(a\omega\cdot\frac{t}{a})d(a\omega)$$

Метод трапеций

Для расчета переходного процесса в замкнутой системе при наличии запаздывания в канале регулирования объекта чаще всего применяются **частотные методы**. **Можно выделить два основных:**

1. **Метод трапеций**, который строит переходные процессы в замкнутой системе с использованием таблиц *h*-функций и может выполняться вручную без применения компьютеров для вычислений.

2. **Метод**, основанный на применении так называемой **формулы интегрального синуса,** устанавливающей связь между вещественной частотной характеристикой системы и её переходным процессом в виде интеграла, который определяется численными методами на компьютере с применением современных вычислительных пакетов типа MATCAD или MATLAB.

Метод трапеций

Рассмотрим суть метода трапеций на примере построения переходного процесса в замкнутой системе по каналу управления. Для построения переходного процесса в замкнутой системе по каналу управления (т.е. при единичном ступенчатом изменении задающего воздействия $x_{зад}$) необходимо составить передаточную функцию замкнутой системе по указанному каналу, используя общую формулу.

$$W_{з.с.}(P) = \frac{W_{р.с.}(P)}{1 + W_{р.с.}(P)}$$

Из этой передаточной функции надо вывести аналитическое выражение для вещественной частотной характеристики замкнутой системы Re$_{з.с.}$(w) через частотные характеристики разомкнутой системы, построить график вещественной частотной характеристики, произвести разбивку его на трапеции, вычислить и построить составляющие переходного процесса для каждой трапеции с использованием таблиц *h*-функций, а затем найти суммарный переходный процесс.

Метод трапеций

$$W_{р.с.}(i\omega) = \mathrm{Re}(i\omega) + i\,\mathrm{Im}(i\omega)$$

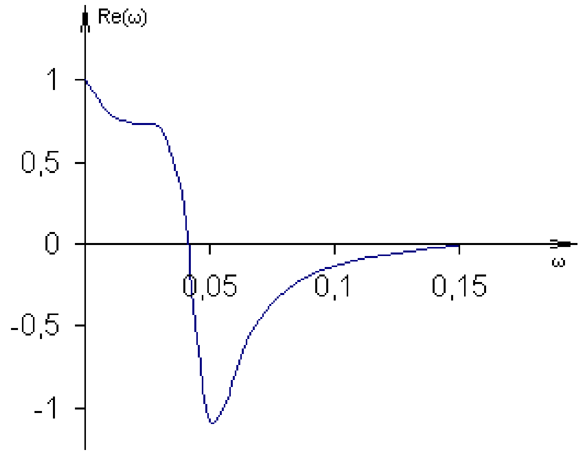
$$W_{з.с.}(i\omega) = \frac{\mathrm{Re}(i\omega) + i\,\mathrm{Im}(i\omega)}{1 + \mathrm{Re}(i\omega) + i\,\mathrm{Im}(i\omega)}$$

$$W_{з.с.}(i\omega) = \frac{\mathrm{Re}(i\omega)(1 + \mathrm{Re}(i\omega)) + \mathrm{Im}^2(i\omega)}{(1 + \mathrm{Re}(i\omega))^2 + \mathrm{Im}^2(i\omega)}$$

Очевидно, что для расчета и построения вещественной частотной характеристики замкнутой системы по выведенной формуле, потребуется вывести формулы и рассчитать вещественную и мнимую частотные характеристики разомкнутой системы $Re_{р.с.}(w)$ и $Im_{р.с.}(w)$. Они рассчитываются через частотные характеристики объекта и регулятора по правилу последовательного соединения звеньев.

Метод трапеций

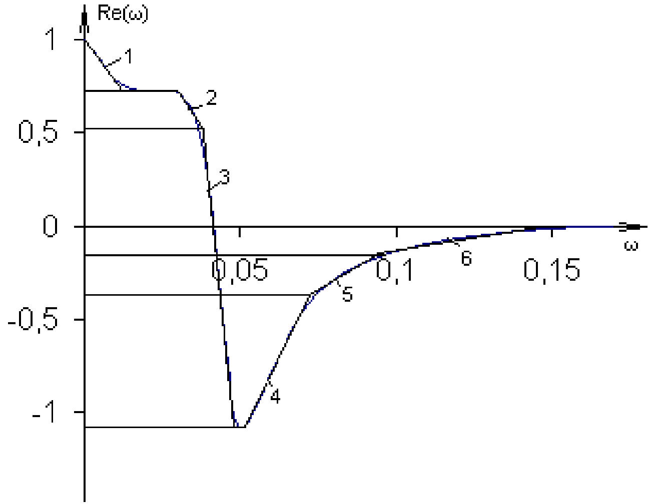
Следует напомнить, что вещественная частотная характеристика замкнутой системы по каналу управления определяет переходный процесс в замкнутой системе по каналу управления, т.е. переходный процесс, возникающий при единичном ступенчатом изменении задающего воздействия $x_{зад}(t)=1(t)$. Система должна воспроизвести новое задание, значит ее выходная величина должна стремиться к 1. Учитывая известное из ТАУ соотношения, что $Re_{з.с.}(\infty)=x_{вых з.с.}(0)=0$, а также $Re_{з.с.}(0)=x_{вых з.с.}(\infty)=1$ делаем вывод, что график вещественной характеристики должен начинаться из 1 (при $w=0$) и стремиться к 0 (при $w=\infty$).



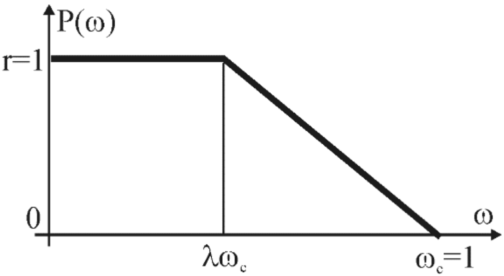
Метод трапеций

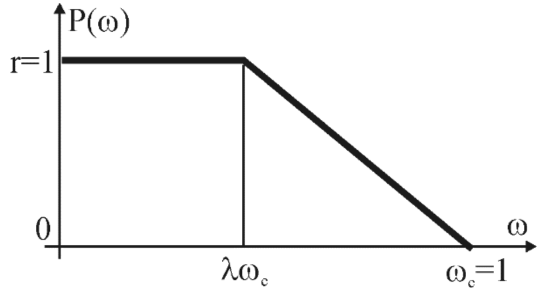
Далее приступают к построению переходного процесса методом трапеций:

1. Проводят кусочно-линейную аппроксимацию графика $Re_{з.с.}(w)$ и на аппроксимирующих отрезках прямых строят геометрические фигуры-трапеции и треугольники, прилегающие к оси ординат.



Метод трапеций





Трапециевидная переходная характеристика Единичные трапеции

$$\chi = \frac{\omega_d}{\omega_c}$$

Единичная трапеция имеет высоту, равную единице, и частоту среза w_c, также равную единице. Единичная трапеция характеризуется частотой излома w_d, которая может быть задана в виде коэффициента наклона боковой грани трапеции. Для единичных трапеций с различным коэффициентом наклона может быть вычислен оригинал, то есть функция времени. Эта функция получила название *h*-функции. В настоящее время составлены подробные таблицы *h*-функции для различных коэффициентов наклона, лежащих в пределах от 0 до 1.

Метод трапеций

2. Трапеции и треугольники вычерчивают в отдельной системе координат, присваивая им знак “+” или “-” с тем, чтобы суммарная площадь геометрических фигур примерно равнялась площади, ограниченной графиком $\mathrm{Re}_{з.с.}(w)$ и осями координат.

При этом выделяют отдельные трапеции так, чтобы:

- основанием трапеций являлась ось частот;

- левая боковая сторона трапеций (высота) примыкала к оси ординат;

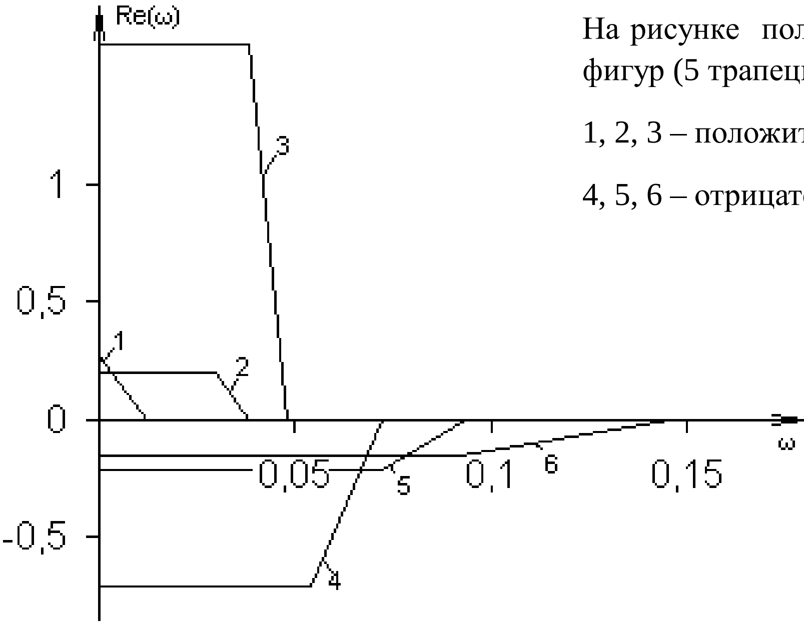
- при сложении ординат отдельных трапеций в точках сопряжения должна получиться исходная ломаная линия.

На рисунке получили 6 геометрических фигур (5 трапеций и 1 треугольник):

1,2,3 – положительные трапеции;

4,5, 6 – отрицательные.

Метод трапеций



На рисунке получили 6 геометрических фигур (5 трапеций и 1 треугольник):

1, 2, 3 – положительные трапеции;

4, 5, 6 – отрицательные.

Метод трапеций

3. Для каждой трапеции определяют

а) высоту с учетом знака Re(0), (т.е. значение при $w=0$)

б) частоту равномерного пропускания w_p (частоту в точках сопряжения аппроксимирующих отрезков прямых)

в) частоту среза w_{cp}(предельную частоту для данной трапеции)

г) рассчитывают отношение $\chi = \dfrac{\omega_d}{\omega_c}$

Получилась следующая таблица параметров трапеций:

Номер трапеции	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Re(0)	0,27	0,20	1,58	0,70	0,21	0,15
w_p	0	0,030	0,038	0,054	0,073	0,094
w_{cp}	0,012	0,038	0,048	0,073	0,094	0,146
c	0	0,78	0,80	0,75	0,77	0,64

Метод трапеций

4. По величине для каждой трапеции из таблиц χ-функций выписывают составляющую переходного процесса в функции безразмерного табличного времени, т. е. получают таблицу данных.

$t_{табл}$	$h_{табл}$

5. Поскольку в таблице χ - функций табличные переходные процессы рассчитаны для так называемых единичных трапеций, т.е. для трапеций с высотой Re(0)=1, далее производят пересчет табличных данных с учетом параметров реальных трапеций по следующим формулам:

$$t = \frac{\tau}{\omega_{ср}} \qquad x_{вых} = \chi \cdot \mathrm{Re}$$

Метод трапеций

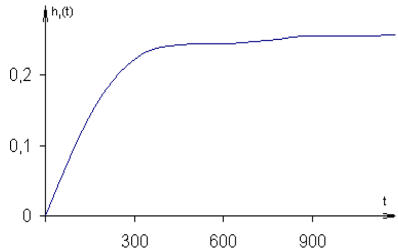
В результате получают новые таблицы для каждой трапеции:

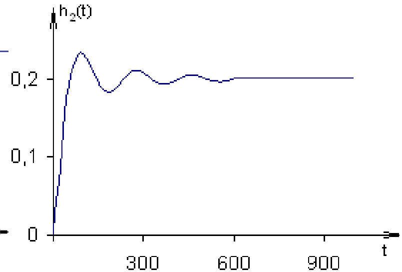
τ	x	t	$X_{вых}$

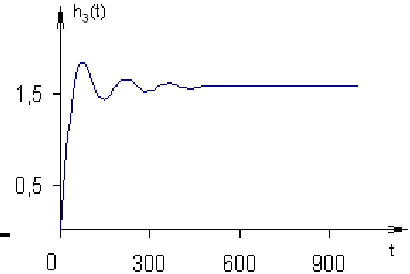
По данным этих таблиц (а всего их будет столько, сколько получилось трапеций) строят составляющие переходного процесса.

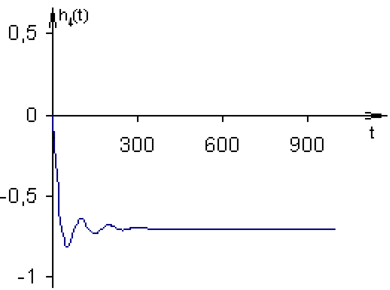
Метод трапеций

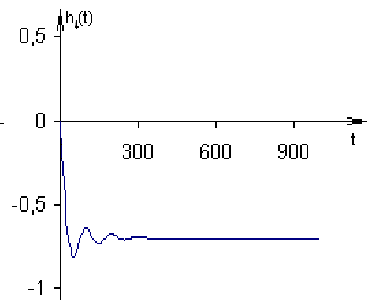
Составляющие переходного процесса:

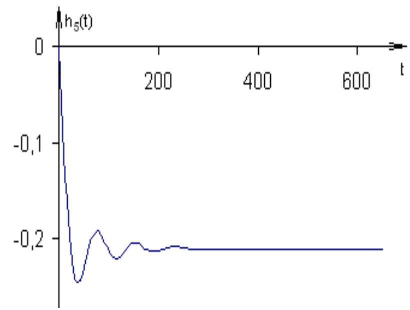












Метод трапеций

Далее их надо суммировать, причем суммировать графически. Значит необходимо эти составляющие переходного процесса, соответствующие разным трапециям, вычерчивать в одной системе координат. Лучше это делать сразу и покрупнее, чтобы легче затем их складывать. **Суммируя графически эти составляющие, находят искомый переходный процесс по каналу управления.** Далее по графику переходного процесса определяют прямые показатели качества. После окончания переходного процесса выходная величина выходит на установившееся значение $x_{уст}=1$.