

Лекция 7

Оценки качества переходных процессов.  
Прямые и косвенные оценки.



---

**Качество автоматической системы управления определяется совокупностью свойств, обеспечивающих эффективное функционирование как самого объекта управления, так и управляющего устройства, т. е. всей системы управления в целом.** Свойства, составляющие эту совокупность и имеющие количественные измерители, называют показателями качества системы управления.

Точность системы в переходных режимах оценивают при помощи прямых и косвенных показателей:

**Прямые показатели качества определяют по графику переходного процесса, возникающего в системе при ступенчатом внешнем воздействии.** Часто для определения прямых показателей качества используют переходную функцию системы.

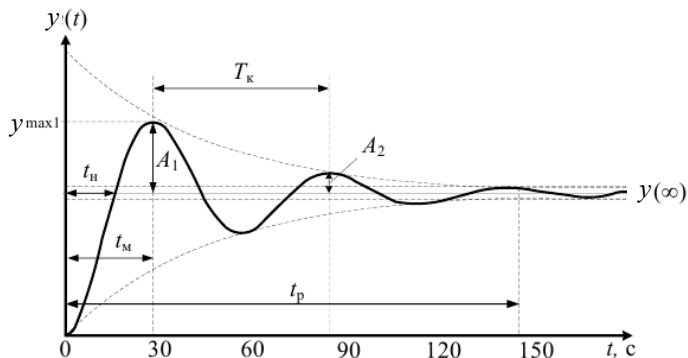
**Косвенные оценки качества переходных процессов САУ получают без использования переходных процессов.** При этом различают **корневые, частотные и интегральные косвенные оценки качества.**



## Прямые оценки качества

Точность системы в переходных режимах определяется величинами отклонений управляемой переменной  $x(t)$  от заданного значения  $g(t)$  и длительностью существования этих отклонений. Величина и длительность отклонений зависят от характера переходного процесса в системе. Характер переходного процесса, в свою очередь, зависит как от свойств системы, так и от места приложения внешнего воздействия, по заданию или по возмущению.

Если переходные процессы рассчитываются, то в качестве решения получают переходную функцию САУ – реакцию на единичное ступенчатое воздействие.

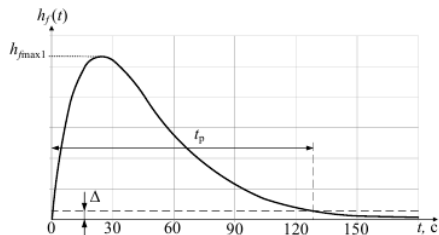
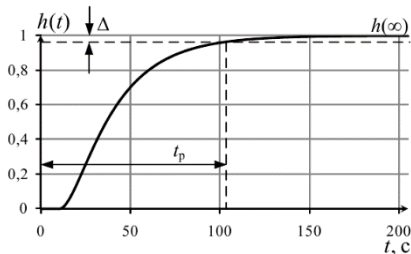




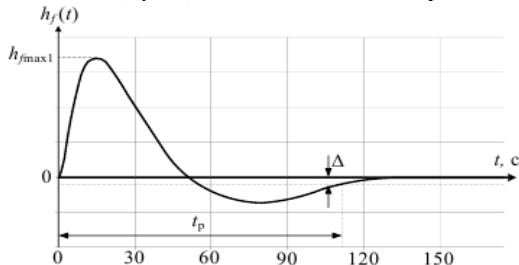
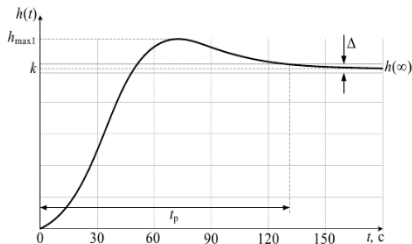
## Прямые оценки качества

При самой общей оценке качества обращают внимание прежде всего на форму переходного процесса. Различают следующие типовые переходные процессы :

- монотонный переходный процесс, когда  $dh/dt$  ( $dy/dt$ ) не меняет знак;



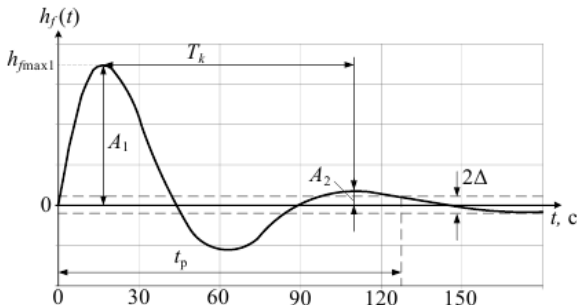
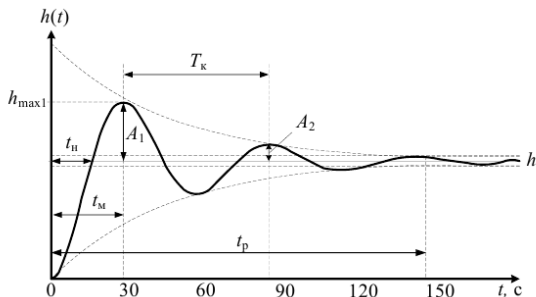
- аperiodический переходный процесс, когда  $dh/dt$  ( $dy/dt$ ) меняет знак один раз;





## Прямые оценки качества

- колебательный переходный процесс, когда  $dh/dt$  ( $dy/dt$ ) меняет знак много раз.



Каждый из трех типовых процессов имеет свои преимущества и недостатки, и предпочтение той или иной форме процесса делают с учетом особенностей управляемого объекта.



## Прямые оценки качества

---

1.  $A_1$  – **динамическая ошибка** (характеризует максимальный выброс регулируемой величины).

2. **Перерегулирование.**

$$\sigma = \frac{A_1}{y(\infty)} \cdot 100\%; \quad \text{воздействие по каналу задания}$$

$$\sigma = \frac{A_3}{A_1} \cdot 100\%. \quad \text{воздействие по возмущению}$$

3. **Динамический коэффициент регулирования** (только для переходных процессов САУ по возмущающему воздействию)

$$R_D = \frac{y(\infty) + A_1}{K_{об}}.$$

где  $K_{об}$  – коэффициент передачи объекта.

**Чем ниже  $R_D$ , тем выше качество системы регулирования.**



## Прямые оценки качества

---

### 4. Степень затухания переходного процесса

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}$$

Изменяется в пределах  $0 \leq \psi \leq 1$

$\psi = 0 \Rightarrow A_2 = A_1$  – незатухающие колебания

$\psi = 1 \Rightarrow A_2 = 0$  – апериодический переходный процесс

### 5. Статическая ошибка

$$\varepsilon_{ст} = s - y(\infty)$$

Для статических систем  $\varepsilon_{ст} \neq 0$ , для астатических –  $\varepsilon_{ст} = 0$

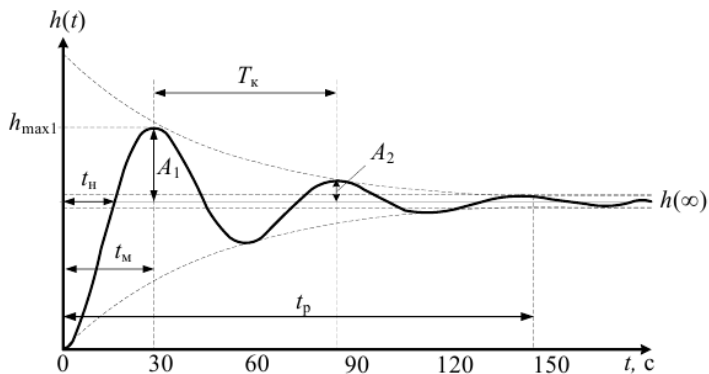
$\varepsilon_{ст}$  определяет точность поддержания заданного значения регулируемой величины в статике.



## Прямые оценки качества

### 6. Время регулирования или время переходного процесса.

Оно характеризует быстрдействие САУ и определяется как интервал времени от начала (момента подачи скачкообразного входного воздействия) до момента, когда отклонение от установившегося значения станет меньше определенной величины  $\Delta$  (обычно  $\Delta$  принимается равным 5% от  $y(\infty)$ ;  $\Delta = 0,05y(\infty)$ )







## Косвенные оценки качества

---

Косвенные оценки качества переходного процесса подразделяются на 3 группы:

- **интегральные;**
- **частотные;**
- **корневые.**

### **ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА**

Для оценки качества применяются определенные **интегралы** от координат САУ, **их производных и комбинаций из них.**

Эти интегралы выбирают так, чтобы с одной стороны они **характеризовали качество процесса**, а с другой стороны просто **выражались через параметры САУ.**

Интегральные оценки не дают возможности непосредственно оценить прямые показатели качества. Однако, исходя из опыта, их можно рекомендовать как косвенные оценки, дающие возможность сравнивать САУ друг с другом, выбирать ту САУ, у которой соответствующая интегральная оценка меньше.

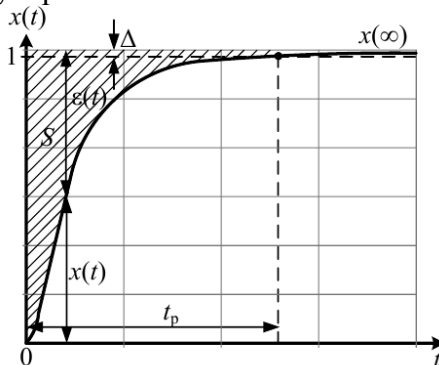


## Интегральные оценки качества

Если переходный процесс системы является **монотонным**, то для оценки его качества можно использовать интеграл:

$$I_1 = \int_0^{\infty} [x(\infty) - x(t)] dt = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) dt$$

Где  $\varepsilon(t)$  – ошибка регулирования



Первая интегральная оценка определяет площадь под кривой  $\varepsilon(t)$

**Интегральная оценка учитывает и отклонения в системе и быстродействие в системе.**



## Интегральные оценки качества

---

Порядок определения ошибки:

$$I_1 = \lim_{P \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-Pt} dt = \lim_{P \rightarrow 0} E(P)$$

$E(P)$  определяют по передаточной функции системы:

$$E(P) = W_{\gamma\varepsilon} \cdot \Upsilon(P)$$

$W_{\gamma\varepsilon}$  заменим на  $W_{\gamma y}$  (если не имеем входного сигнала  $s$ )

т.к.  $\Upsilon(P) = \frac{1}{P}$ , то  $E(P) = W_{\gamma\varepsilon} \cdot \frac{1}{P}$

Неудобством первой интегральной оценки вида является то, что ее можно использовать только для **монотонных переходных процессов**, когда не меняется знак отклонения  $x$ . Если же имеет место **колебательный процесс**, то при вычислении интеграла  $I_1$  площади будут складываться алгебраически и минимум этого интеграла может соответствовать колебаниям с малым затуханием или вообще без затухания. Так как форма переходного процесса при расчете систем регулирования может быть неизвестна, то применение интегральной оценки  $I_1$  оказывается **ограниченным**.



## Интегральные оценки качества

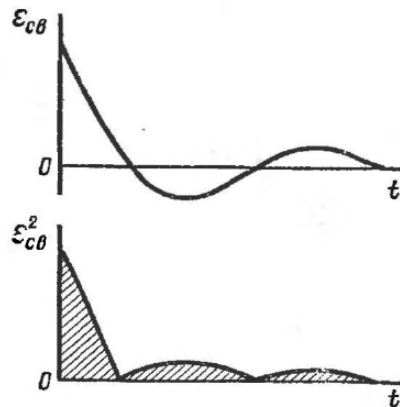
Чтобы исправить недостатки первой интегральной ошибки нужно брать  $|\varepsilon(t)|$

$$I = \int_0^{\infty} |\varepsilon(t)| dt$$

Недостаток –  $|\varepsilon(t)|$  трудно определить.

Второй вид интегральной оценки:

$$I_2 = \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt$$





## Интегральные оценки качества

---

Рассмотрим аналогичный порядок определения второй интегральной оценки:

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} E(P)e^{Pt} dP$$

$$P = i\omega$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(i\omega)e^{i\omega t} d(\omega)$$

Умножим на  $\mathcal{E}(t)$  и проинтегрируем по времени от нуля до  $\infty$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(t) \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(i\omega)e^{i\omega t} d(\omega) \right) dt$$



## Интегральные оценки качества

---

Изменим порядок интегрирования:

$$I_2 = \int_0^{\infty} E(i\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt d\omega$$

$$E(P) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-Pt} dt$$

$$E(i\omega) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$E(-i\omega) = \int_0^{\infty} \varepsilon(t) e^{i\omega t} dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} E(i\omega) \cdot E(-i\omega) d\omega$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega$$



## Интегральные оценки качества

---

Докажем это:

$$a + ib, \quad M = \sqrt{a^2 + b^2}$$
$$M^2 = a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$$

поэтому  $E(i\omega) \cdot E(-i\omega) = |E(i\omega)|^2$

Функция  $|E(i\omega)|^2$  четная от  $\omega$ , поэтому вычисления можно вести от 0 до  $\infty$ , но при этом увеличив коэффициент в 2 раза перед значком интеграла:

$$I_2 = 2 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |E(i\omega)|^2 d\omega$$

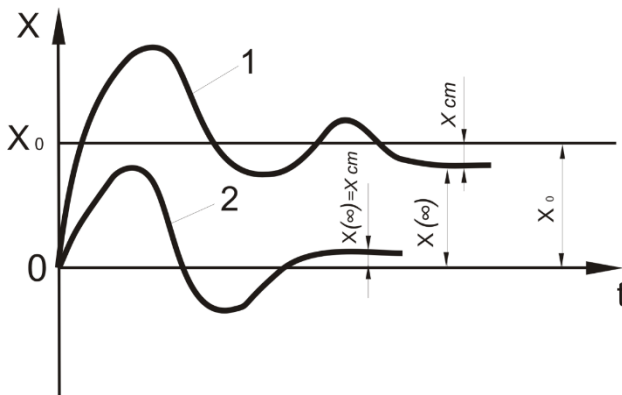
Полученное выражение называется **формула Релея (или Парсеваля)**.

**Для второй интегральной оценки идеальный переходный процесс совпадает с осью времени.**



## Оценка качества в установившихся режимах

Статическая ошибка определяет поведение системы в статике, когда она практически не меняется.



Для определения статической ошибки используют предельную теорему о конечном значении оригинала (преобразование Лапласа).





## Оценка качества в установившихся режимах

---

Теорема: пусть  $x(t)$  – оригинал, ему соответствует изображение  $X(P)$ , тогда

$$x(\infty) = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot X(P)$$

По аналогии:

$$\varepsilon(\infty) = \varepsilon_{cm} = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot E(P)$$

Изображение ошибки можно получить по передаточной функции по каналу воздействия:

$$E(P) = W_{x\varepsilon}(P) \cdot X(P)$$

Учитывая, что для переходных процессов  $x(t)$  – единичная ступенчатая функция, то изображение входного воздействия будет равно:

$$X(P) = \frac{1}{P}$$



## Оценка качества в установившихся режимах

---

Тогда:

$$E(P) = \frac{W_{x\varepsilon}(P)}{P}$$

Подставив это выражение в формулу  $\mathcal{E}$  :

$$\mathcal{E}(\infty) = \mathcal{E}_{cm} = \lim_{P \rightarrow 0} P \cdot \frac{W_{x\varepsilon}(P)}{P} = \lim_{P \rightarrow 0} W_{x\varepsilon}(P) \quad \text{- передаточная функция по каналу ошибки}$$



## Коэффициенты ошибок

---

Точность САУ в установившемся режиме, при относительно медленно изменяющихся воздействиях, может быть оценена с помощью коэффициентов ошибок. Изображение ошибки определяется выражением:

$$E(P) = W_{x\varepsilon}(P) \cdot X(P)$$

Разложим передаточную функцию системы по ошибке в степенной ряд в окрестности точки  $P=0$ .

$$E(P) = [W_{x\varepsilon}(0) + \frac{dW_{x\varepsilon}(P)}{dP} \cdot (P-0) + \frac{1}{2!} \frac{d^2W_{x\varepsilon}(P)}{dP^2} \cdot (P-0)^2 + \dots] X(P)$$

$$E(P) = [C_0 + C_1P + C_2P^2 + \dots] X(P)$$

Перейдем от изображения к оригиналу:

$$\varepsilon(t) = C_0x(t) + C_1 \frac{dx}{dt} + C_2 \frac{d^2x}{dt^2} + \dots$$

Поэтому:

$$\varepsilon(t) = C_0 \cdot 1(t) = C_0$$



## Коэффициенты ошибок

---

Данное выражение определяет зависимость ошибки регулирования от различных составляющих входного воздействия, коэффициенты  $C_i$  получили название коэффициентов ошибок:

$C_0$  – коэффициент ошибки по положению;

$C_1$  – коэффициент ошибки по скорости;

$C_2$  – коэффициент ошибки по ускорению и т.д.

Коэффициент  $C_0$  определяет статическую ошибку системы при воздействии в виде единичной ступенчатой функции.

Если  $C_0=0$ , то система **астатическая**.

Если  $C_0$  не равно 0, то система **статическая** (имеющая статическую ошибку).

Повышение порядка астатизма повышает точность системы в установившемся режиме. Но повышение порядка астатизма снижает запасы устойчивости, т.к. введение интегрирующих звеньев увеличивает фазовое запаздывание (снижает частоту). **Поэтому на практике порядок астатизма выше второго не применяют, а чаще всего ограничиваются астатизмом первого порядка, используя для повышения точности другие способы.**