ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

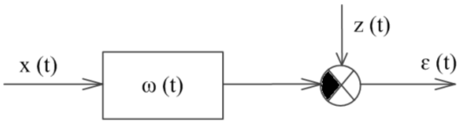
Теория автоматического управления.
Часть №2

Лекция № 6

Минимизация дисперсной ошибки. Порядок синтеза оптимальной системы. Предельная динамическая точность систем регулирования

Томск, 2019

Минимизация дисперсной ошибки



Задача определить *w(t)*

$$\varepsilon(t) = z(t) - \int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) X(t-\varphi) d\varphi$$

$$\delta_{\varepsilon}^{2} = f(w(t))$$

Возведем в квадрат ε(t)

$$\varepsilon^{2}(t) = z^{2}(t) - 2z(t)\int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) X(t-\varphi) d\varphi + \int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) X(t-\varphi) d\varphi - \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) X(t-\eta) d\eta$$

$$\delta_{\varepsilon}^{2} = \delta_{z}^{2} - 2\int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) F_{xz}(\varphi) d\varphi + \int_{-\infty}^{\infty} w(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} w(\eta) F_{xz}(t-\eta) d\eta d\varphi$$

$$\delta_{\varepsilon \min}^{2} = \delta_{z}^{2} - 2\int_{-\infty}^{\infty} w_{опт}(\varphi) F_{xz}(\varphi) d\varphi + \int_{-\infty}^{\infty} w_{опт}(\varphi) \int_{-\infty}^{\infty} w_{опт}(\eta) F_{xz}(t-\eta) d\eta d\varphi$$

$$w_{опт}(t) = 0 \quad при \quad t < 0$$

$$w_{опт}(t) = 0 \quad при \quad t < z_{0}$$

$$w(t) = w_{опт}(t) + ba(t)$$

$$b = const$$

$a(t) -$ *производная функция, удовлетворяющая условиям физической реализуемости*

$$\delta_{\varepsilon}^{2} = \delta_{z}^{2} - 2\int_{-\infty}^{\infty} [w(\varphi) + \mathrm{ba}(\varphi)] F_{xz}(\varphi) d\varphi + \int_{-\infty}^{\infty} [w_{опт}(\varphi) + ba(\varphi)] \int_{-\infty}^{\infty} [w_{опт}(\eta) + \mathrm{ba}(\varphi)] F_{xz}(t-\eta) d\eta d\varphi$$

Минимизация дисперсной ошибки

Раскрываем скобки

$$\delta_\varepsilon^2 = \delta_z^2 - 2\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{onm}(\varphi)F_{xz}(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi + \int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{onm}(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{onm}(\eta)F_{xz}(\varphi-\eta)d\eta d\varphi -$$

$$-2b\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\varphi)F_{xz}(\varphi)d\varphi + b\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{onm}(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\eta)F_{xz}(\varphi-\eta)\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\varphi +$$

$$+b\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{\infty} w_{onm}(\eta)F_{xz}(\varphi-\eta)d\eta d\varphi + 2b\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\varphi)a(\eta)d\eta d\varphi + \textit{остальное} = \downarrow$$

$$\_ = b\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\eta)\int\limits_{-\infty}^{\infty} w\ (\varphi)F_{xz}(\eta-\varphi)d\eta d\varphi = \ =$$

$$\delta_\varepsilon^2 = \delta_{\varepsilon\min}^2 - 2b\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\varphi)F_{xz}(\varphi) - \int\limits_{-\infty}^{\infty} w\ (\eta)F_{xz}(\varphi-\eta)d\varphi d\eta +$$

$$+b^2\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\varphi)\int\limits_{-\infty}^{\infty} a(\eta)\,\mathrm{F}_{xz}(\varphi-\eta)d\eta d\varphi$$

Минимизация дисперсной ошибки

Пусть $A = \delta^2_{\varepsilon \min}$

$C = {}_{-}$

$D = {}_{=}$

$\delta^2_{\varepsilon} = A - 2bC + b^2 D$

$$\frac{d\delta^2_{\varepsilon}}{dt} = 0 - \textit{условие оптимальности}$$

$$\frac{d\delta^2_{z}}{dt} = -2C + 2bD = 0$$

$b - \textit{стац. точка функции}$

$$b = \frac{C}{D} = 0 \Rightarrow C = 0$$

Величина дисперсной ошибки зависит от: $\delta^2_{\varepsilon \min} = \int\limits_0^{\tau_0} F^2_{mx}(t)dt$

- запаздывания;
- статистических характеристик;
- входных воздействий.

Порядок синтеза оптимальной системы

1. По автокорреляционной функции $r_{xx}(\tau)$ определяется прямым преобразованием спектр мощности $G_{xx}(P) \Rightarrow$ определяем $G_{xz}(P)$по $r_{xz}(\tau)$

2. Находим спектр мощности $G_{mz}(P) = \dfrac{G_{xz}(P)}{G_{xx}^{*}(-P)}, G_{xz}(P) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} r_{xz}(\tau) e^{-P\tau} d\tau$

3. По спектру мощности $G_{mz}(P)$обратным преобразованием Лапласа определяем $r_{mz}(\tau)$

4. Определяется оптимальная весовая характеристика системы:

$$w_{1onm}(t) = \begin{cases} 0, \text{при } t < \tau_0, \\ r_{mz}(t), \text{при } t \geq \tau_0 \end{cases}$$

5. По $w_{1onm}(t)$ прямым преобразованием находится передаточная функция системы $W_{1onm}(P)$

6. Определяется оптимальная передаточная функция искомой системы:

$$W_{onm}(P) = \frac{W_{1onm}(P)}{W_{\Phi}(+P)} = \frac{W_{1onm}(P)}{G_{xx}(+P)}$$

Предельная динамическая точность

Предельная динамическая точность – **верхняя грань достижимой динамической точности** системы при применении наилучшего из физических основных регуляторов. Насколько **ценную информацию** получает регулятор о поступающих действующих возмущениях, настолько **полно и эффективно** регулятор использует полученную информацию. Условия:

1) Знание предельной динамической точности позволяет оценить, насколько обоснованными являются требования к системе регулирования.

2) Знание оптимального оператора регулятора, обеспечивающего предельную динамическую точность системы, позволяет оценить в каком направлении нужно изменять параметры и структуру реального регулятора, чтобы приблизить его свойства к свойствам оптимальности.

Предельная динамическая точность

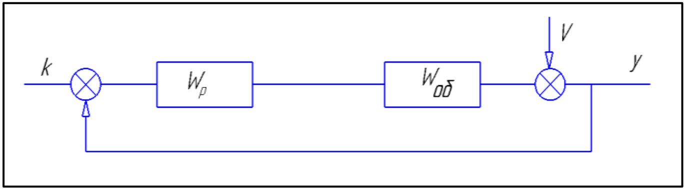
$$\tau = -\log_{10}\frac{\delta_\varepsilon^{np}}{\delta_0}$$ - количество ценной информации

Минимальное предельное значение СКО ошибки регулирования

δ_0 - СКО ошибки при отсутствии регулирования;

$\delta_\varepsilon^{np} > \delta_0$ - отрицательное количество дезинформации.

Система высокой предельной динамической точности



τ_0 - мало

Воздействия, действующие на систему, - низкочастотные

$$\Phi(P) = \frac{W_p W_{об}}{1 + W_p W_{об}}$$

$$\Phi(P) + \Phi(P) W_p W_{об} = W_p W_{об}$$

$$\Phi = W_p W_{об}(1 - \Phi)$$

$$W_p = \frac{\Phi}{W_{об}(1 - \Phi)}$$

$$W_p^{опт}(P) = \frac{\Phi^{опт}(P)}{W_{об}(\mathrm{P})(1 - \Phi^{опт}(\mathrm{P}))}$$

Выделим звено запаздывания

$$\boxed{W_p^{опт}(P) = \frac{\Phi_0^{опт}(P) \cdot e^{-P\tau_0}}{-\Phi_0^{опт}(P) \cdot e^{-P\tau_0} + 1} \cdot \frac{1}{W_{об}(P) \cdot e^{-P\tau_0}}}$$

Без учета запаздывания

$$\Phi_0^{опт}(P) \approx 1$$

$$e^{-P\tau_0} \approx 1 - \tau_0 e^{-P_0\tau_0}(P - P_0)$$

Система высокой предельной динамической точности

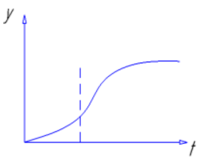
Делаем подстановку

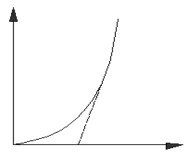
$$W_p^{опт}(P)=\frac{1}{\tau_0 P}\cdot\frac{1}{W_{об}(P)}$$

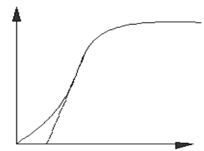
$$W_{об}(P)=k_{об}\cdot e^{-P\tau_0}$$

$$W_{об}(P)=\frac{k_{об}}{P}\cdot e^{-P\tau_0}$$

$$W_{об}(P)=\frac{k_{об}}{T_{об}P+1}\cdot e^{-P\tau_0}$$







$$W_p^{опт}(P)=\frac{1}{\tau_0 P}\cdot\frac{1}{k_{об}}=\frac{k_u}{P}$$

$$W_P^{опт}(P)=\frac{1}{\tau_0 P}\cdot\frac{1}{\frac{k_{об}}{P}}=k_p$$

$$W_p^{опт}(P)=\frac{1}{\tau_0 P}\cdot\frac{1}{\frac{k_{об}}{T_{об}P+1}}=\frac{T_{об}P+1}{k_{об}\tau_0 P}=k_p\frac{T_u P+T}{T_u P}$$

И-регулятор

П – регулятор

ПИ – регулятор

$$k_u=\frac{1}{\tau_0 k_{об}}$$

$$k_p=\frac{1}{\tau_0 k_{об}}$$

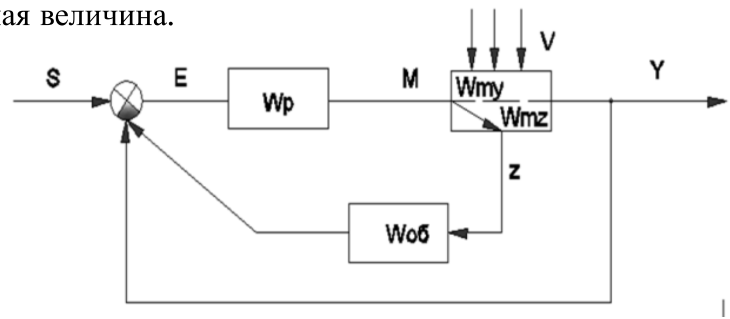
$$T_u=T_{об}$$

$$W_p^{опт}(P)=\frac{T_{об}P+1}{T_{об}P}\cdot\frac{T_{об}}{k_{об}\tau_0}$$

$$k_p=\frac{T_{об}}{k_{об}\tau_0}\quad;\quad T_u=T_{об}$$

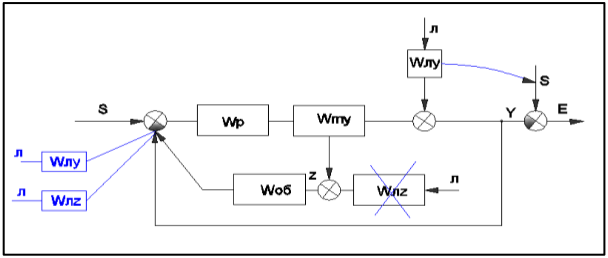
Способы повышения средней динамической точности

1) Представление регулятору более своевременной и цельной информации о поступающих в систему возмущениях.
2) Когда в составе возмущений имеется детерминированная составляющая (например, график тепловой нагрузки станции), тогда заранее можно рассчитать управляющее воздействие и падать на вход регулятора.
3) Когда в составе объекта можно найти такие вспомогательные параметры, которые реагируют на возмущение с меньшим запаздыванием, чем основная регулируемая величина.



Элемент системы или контур называют информативным, если его ввод в систему повышает предельную динамическую точность, в противном случае элемент или контур называют лишь корректирующим.

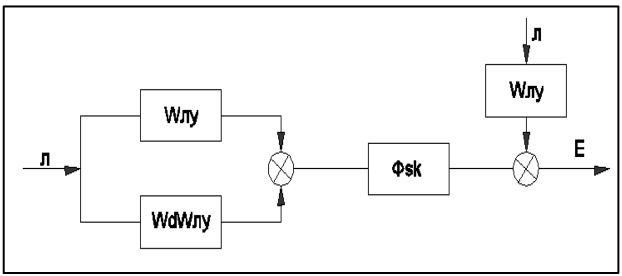
Свойства двухконтурной системы регулирования и порядок ее синтеза



$$\Phi_{\lambda\varepsilon}(P) = ?$$

$$\lambda - \text{вход} \quad \text{системы}$$

$$\varepsilon - \text{выход}$$



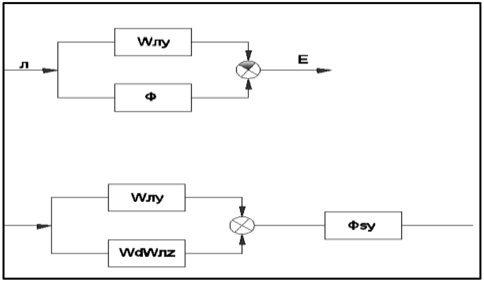
$$\Phi_{к} = \frac{W_p W_{my}}{1 + W_p W_{mz}}$$

$$\Phi_{sy} = \frac{\Phi_1}{1+\Phi_1} = \frac{\dfrac{W_p W_{my}}{1 + W_p W_{mz} W_d}}{1 + \dfrac{W_p W_{my}}{1 + W_p W_{mz} W_k}} =$$

$$= \frac{W_p W_{my}}{1 + W_p W_{mz} W_d + W_p W_{my}}$$

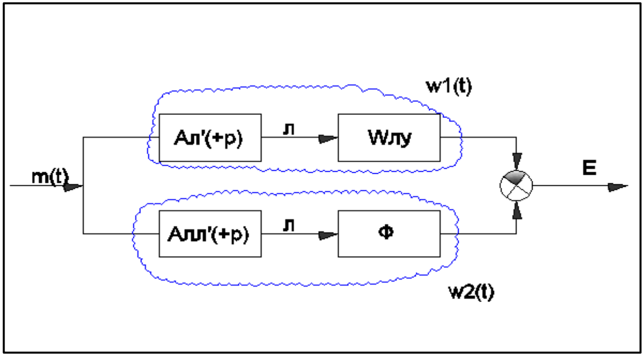
$$\Phi_{sy} = \frac{W_p W_{my}}{1 + W_p (W_{mz} W_d + W_{my})}$$

Свойства двухконтурной системы регулирования и порядок ее синтеза



$$\Phi = \frac{(W_{\lambda y} + W_d W_{\lambda z}) \cdot W_p W_{my}}{1 + W_p (W_{my} + W_d W_m)}$$

Дополним структурную схему системы фильтром, на вход который подается белый шум, а на выходе формируется случайный процесс λ с заданной характеристикой.

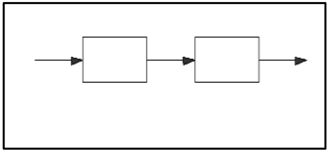


$$\delta_y^2 = \int_0^\infty w^2(t)dt$$

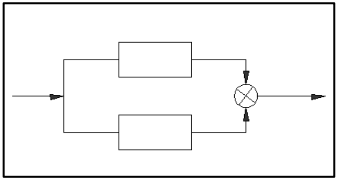
$$\delta_\varepsilon^2 = \int_0^\infty (w_2(t) - w_1(t))^2 dt$$

Запаздывание начало $w_1(t)$ $\tau_{\lambda y}$

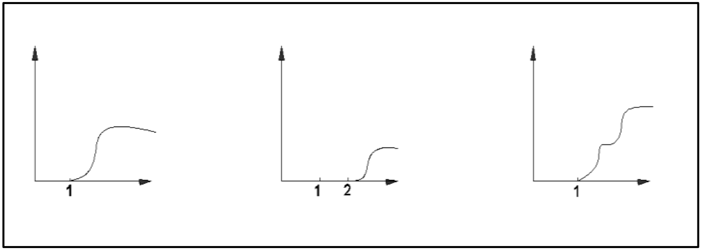
Свойства двухконтурной системы регулирования и порядок ее синтеза



$$e^{-p\tau_1} \cdot e^{-p\tau_2} = e^{-(\tau_1+\tau_2)p}$$



$$\tau_1 < \tau_2$$



1. $\tau_{\lambda z} < \tau_{\lambda y}$

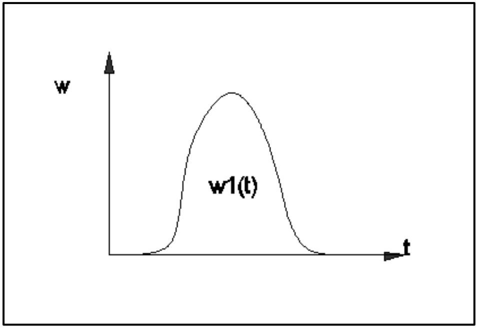
2. $\tau_{\lambda z} > \tau_{\lambda y}$

Свойства 2-х контурной системы регулирования и порядок ее синтеза

$\tau_{\lambda y} + \tau_{my}$

$\tau_{\lambda z} + \tau_{my}$ – *наименьшее запаздывание*

$$w_z^{onm}(t) = \begin{cases} 0 \quad при \quad t < \tau_{\lambda z} + \tau_{my} \\ w_1(t) \quad при \quad t > \tau_{\lambda z} + \tau_{my} \end{cases}$$



$\delta^2_{\varepsilon \min} = \int\limits_{\tau_{\lambda z}}^{\tau_{\lambda z}+\tau_{my}} w_1^2(t)dt$ - минимальное значение дисперсной двухконтурной ошибки регулирования

Найдем дисперсную ошибку регулирования в случае одноконтурной системы. Запаздывание в верхней части остается прежним.

$\tau_{\lambda z} + \tau_{my}$

$\delta^2_{\varepsilon \min} = \int\limits_{\tau_{\lambda z}}^{\tau_{\lambda z}+\tau_{my}} w_1^2(t)dt$ - одноконтурная

$\tau_{\lambda y} > \tau_{\lambda z} + \tau_{my}$ - условие полной инвариантности системы по отношению к λ