ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления и защит. Часть 1

Лекция 6

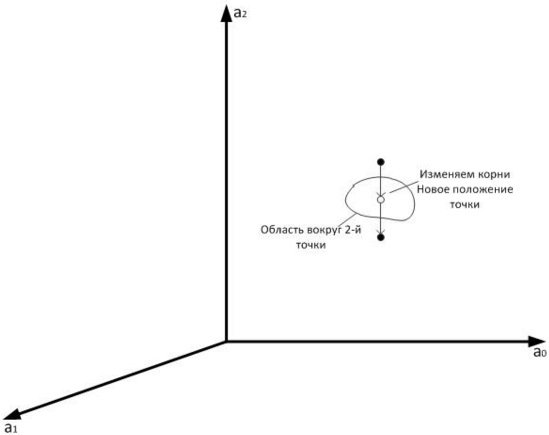
Построение областей устойчивости в пространстве параметров систем. Д-разбиение. Понятие запаса устойчивости.

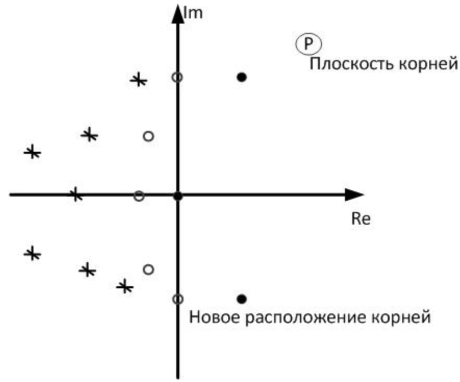
Томск - 2019

Основные понятия

Наиболее общий подход был разработан Неймарком.
Пусть характеристический полином системы имеет вид:

$$D(P) = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + aP + a_0$$





Если изменить коэффициенты, то изменится и расположение корней. При выбранном изменении получили, что система находится на границе устойчивости (корни на мнимой оси). Важно определить момент, когда корни находятся на Im. Неймарк предложил разбивать область корней на подобласти.

Например, 2 корня на мнимой оси → в правую часть → D(z).

В дальнейшем все корни переходят в правую часть D(z). Когда в правой части нет корней D(0) – область устойчивости. Если корни на мнимой оси, то область будет между D(n) и D(0).

Определим условия, при которых корни переходят в правую часть.

Строим область вокруг 2-й точки. Характеристический полином представим в виде:

$$D(P) = a_n(P - P_1)(P - P_2)\ldots(P - P_n)$$

$$P = iw$$

$$D(iw) = a_n(iw - P_1)(iw - P_2)\ldots(iw - P_n)$$

Если хотя бы один корень P_k попадает на мнимую ось, то

$$(iw - P_k) = 0 \Rightarrow D(iw) = a_n(iw - P_1)\ldots(iw - P_n) = 0.$$

Тогда предположим $(iw - P_k) = 0 \Rightarrow P_k = iw \Rightarrow P_k -$ на мнимой оси.

Поэтому условием нахождения корня на мнимой оси является $D(iw)=0$, решая которое относительно неизвестных коэффициентов (параметров системы), находятся границы Д-разбиений.

Д-разбиение по одному комплексному параметру

Т.е. нужно найти D(0).

Пусть характеристический полином системы имеет вид:

$$D(P) = \alpha A(P) + B(P)$$

α – искомый параметр системы.

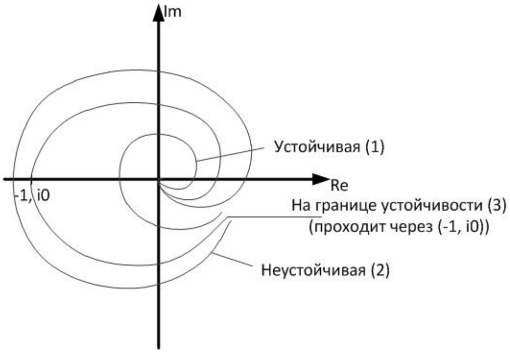
$A(P), B(P)$ – полиномы, не зависимые от α.

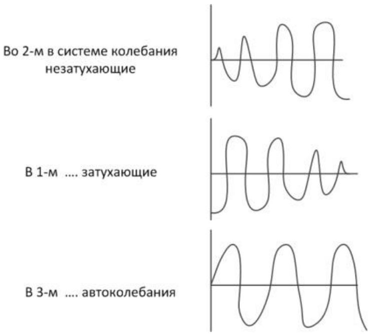
Нужно построить области Д-разбиений.

$$D(iw) = 0, \text{т.е. } \alpha \cdot A(iw) + B(iw) = 0 \Rightarrow \alpha = -\frac{B(iw)}{A(iw)} = \mathrm{Re}(iw) + i\,\mathrm{Im}(w)$$

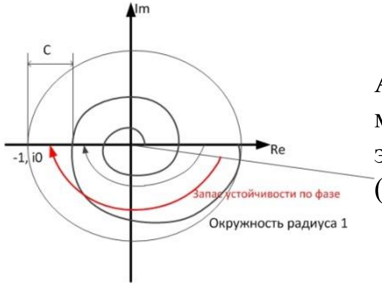
Значит α - комплексный параметр. Задаваясь частотой от w=0 до ∞ в плоскости Д, строятся границы Д-разбиения.

Понятие запаса устойчивости.
Запас устойчивости по модулю и фазе.





Чем дальше вправо от (-1,*i*0), тем система более устойчива.
Степень устойчивости можно оценить, как запас устойчивости по модулю и по фазе.



Если изменяется коэффициент передачи, то масштаб АФЧХ изменяется и график расширяется и в некоторой момент точка совпадают с (-1;i0). А степень удаленности этой точки от (-1;i0) – запас устойчивости по модулю (С). (С) определяется при фазовом сдвиге 180º.

Понятие запаса устойчивости.
Запас устойчивости по модулю и фазе.

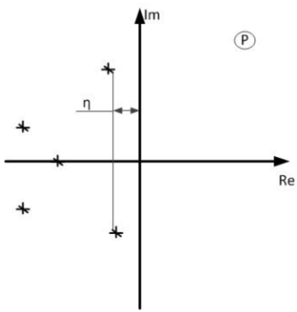
Изменяется постоянная времени системы, например, время запаздывания τ. Это дает фазовый сдвиг $\varphi=-w\tau \rightarrow \tau\uparrow$ и $\varphi\uparrow$.

Если изменяется постоянная времени τ, то $\varphi=-\operatorname{arctg} Tw \uparrow$.

Если изменяется τ, то каждый вектор поворачивается, то при некотором повороте АФЧХ совпадает с (-1;i0).

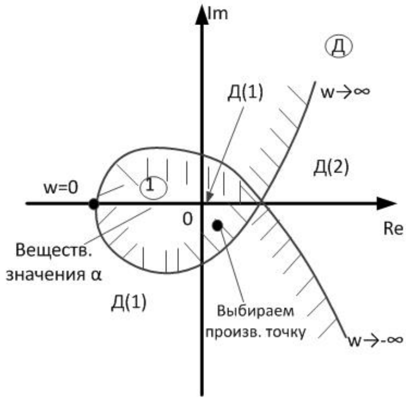
Окружность радиуса 1 даст точку пересечения с АФЧХ разомкнутой системы. Проведем луч из начала координат через эту точку. Угол от этого луча до отрицательной Re – запас устойчивости по фазе.

Параметры системы, при которых АФЧХ разомкнутой системы проходит через (-1;i0), называются критическими. Запас устойчивости можно оценивать по степени удаленности корней характеристического уравнения системы от мнимой оси.



Все корни левые - устойчивая система.

η - степень удаленности – степень устойчивости → является мерой запаса устойчивости, чем дальше, тем устойчивее.

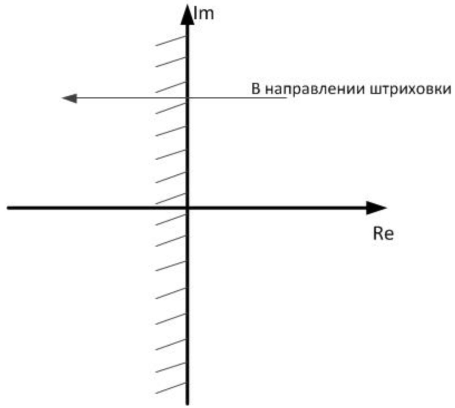


Если выбрать α на кривой, то хотя бы один корень характеристического уравнения будет находиться на мнимой оси.

Для определения направления перемещения корней через мнимую ось в комплексной плоскости используется правило штриховки.

Оно заключается: при движении вдоль кривой Д-разбиения в сторону возрастания частот w↑ кривая штриховки слева.

Если пересекать кривую Д-разбиения в направлении штриховки, один корень характеристического уравнения переходит из правой полуплоскости корней в левую.



Для того чтобы определить область устойчивости Д(0) необходимо с помощью любого критерия определить устойчива ли система в области, претендующей на устойчивость.

В нашем случае претендующей является (1). Выбираем точку. Если в этой точке система устойчива, то Д(0). Если пересечь по штриховке Д(1). Где 2 штриховки, то Д(2).

Выбираем в области Д(0) вещественное значение α (т.е. в каких пределах можно менять α, то система устойчива). Если область не является устойчивой, то никаким изменением α нельзя ее сделать устойчивой.

Д-разбиение в плоскости двух параметров

Пусть характеристический полином системы имеет вид:

$$D(P) = \alpha_1 A(P) + a_2 B(P) + C(P)$$

α_1, a_2 параметры, по которым осуществляется Д-разбиение.

A(P), B(P), C(P) – полиномы, не зависящие α_1, a_2

Требуется определить области Д-разбиения.

Д(iw)=0

$$\alpha_1 A(iw) + a_2 B(iw) + C(iw) = 0$$

Комплексное число =0, если его Re=0 и Im=0. Разбиваем это число на 2 части.

$$*\begin{cases} \alpha_1 A_1(w) + a_2 B_1(w) + C_1(w) = 0 \\ \alpha_1 A_2(w) + a_2 B_2(w) + C_2(w) = 0 \end{cases}$$

A_1, B_1, C_1 – соответственно вещественные части A(iw), B(iw), C(iw)

A_2, B_2, C_2 – ...мнимые части...

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{\Delta_1}{\Delta}, \\ \alpha_2 &= \frac{\Delta_2}{\Delta} \end{aligned}\right\} \text{с помощью критерия Крамера}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -C_1(w) & B_1(w) \\ -C_2(w) & B_2(w) \end{vmatrix}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} A_1(w) & -C_1(w) \\ A_2(w) & -C_2(w) \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A_1(w) & B_1(w) \\ A_2(w) & B_2(w) \end{vmatrix}$$

A_1, B_1, C_1 – нечетные функции от w, т.к. это вещественные части.

A_2, B_2, C_2 – четные функции от w, т.к. это мнимые части.

Пример:

$$5P^3+8P^2+3P+1=0,$$

$$P=iw,$$

$$-5w^3\cdot i-8w^2+3w\cdot i+1=0,$$

$$\underbrace{(1-8w^2)}_{\text{Re}}+i\underbrace{(3w-5w^3)}_{\text{Im}}=0$$

$$\alpha_1=\frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$\alpha_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}$$

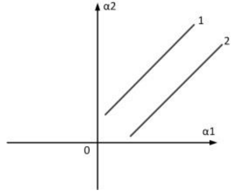
Т.е. кривая Д-разбиения обходится дважды: w от 0 до ∞ и по тому же пути как четная функция.

Случаи:

1)$\Delta_1\neq 0,\ \Delta_2\neq 0,\ \Delta\neq 0\Rightarrow$ система (*)

дает единственное решение.

$2)\Delta_1 \neq 0,\ \Delta_2 \neq 0,\ \Delta = 0$

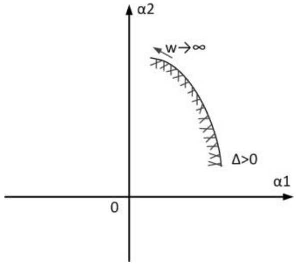


$3)\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = 0,\ \Delta = 0$

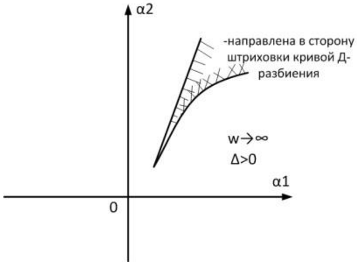
Т.к. кривая Д-разбиения обходится дважды, то она штрихуется двойной штриховкой по правилу: при движении в сторону ↑w слева, если Δ>0, и справа если Δ<0; особые прямые, которые наиболее часто получаются при w=0 или w=∞ штрихуются одинарной штриховкой. В точке сопряжения с кривой Д-разбиения штриховка направлена в сторону штриховки кривой Д-разбиения.

Например:

1)



2)



Особые прямые образуются если $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_n = 0 \end{cases}$ и когда α_1, α_2 входят в эти коэфф-ты.

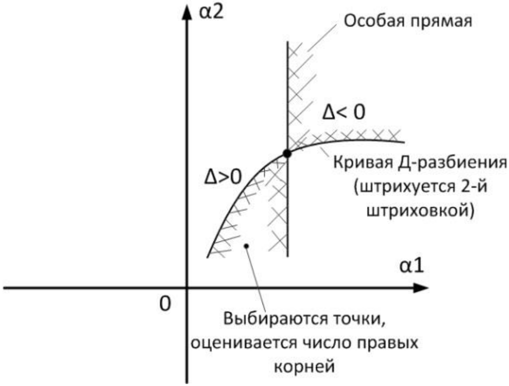
Если поменять местами α1, α2 – в расположении осей, то можно ошибиться в штриховке.

Если коэффициенты α_n и α_0 входят в искомые параметры, то кривая Д-разбиения определяется: $\alpha_n = 0, w = 0;\ \alpha_0 = 0, w = \infty.$

Если они не входят, то особых прямых не существует. Особый случай – это прямая существует при $w = w_k \neq 0.$

2 варианта:

1)



2) Если от точки пересечения знак Δ не меняется, то особая прямая исключается из рассмотрения.