ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления.
Часть №2

Лекция № 4

Случайные процессы в нелинейных системах

Томск, 2019

Детерминированные и стохастические системы

При анализе автоматических систем, когда на вход подается заранее известный сигнал в виде единичного скачка или единичного импульса, то её состояние в любой момент времени можно определить однозначно. Такие ***системы с предсказуемым поведением регулируемой величины*** называются **детерминированные**. Они обладают полной определенностью поведения, то есть ведут себя всегда одинаково в одинаковых условиях.

Типичный пример детерминированной системы — автоматическая телефонная станция. Система типа АТС работает по жесткой, наперед заданной программе.

Детерминированные и стохастические системы

Но есть такие автоматические системы, для которых характерна некоторая неопределенность поведения; ***работая в совершенно одинаковых условиях они ведут себя не адекватно.*** Возникает разброс регулируемой величины при одном и том же входном сигнале. ***Состояние таких систем может быть определено с некоторой вероятностью.*** Такие системы называются **стохастические**.

Классическим примером может послужить система, управляющая воздушным движением в районе аэропорта. Такая система, состоящая из множества не только машин, но и людей, перерабатывает информацию, поступающую из многих и многих источников: радиолокационных станций, метеобюро, самолетов, наземных служб.

Если в простейших системах регулирования случайные сигналы возмущения малы и не оказывают существенного влияния, ***то в сложных системах эти случайные возмущения могут полностью определять весь процесс работы системы управления.***

Основные характеристики случайного процесса

Случайная функция, изменяющаяся во времени, называется ***случайным процессом.***

Конкретный вид случайного процесса называется ***реализацией случайного процесса.*** Совокупность всех возможных реализаций образуют ***ансамбль случайного процесса.*** *Вероятностный метод исследования* случайных процессов не ставит задачу изучения каждой реализации; его задача в изучении свойств всего множества случайных процессов в целом *с помощью усреднения свойств ансамбля*. При фиксированном значении времени получаем сечение ансамбля случайных процессов и ***усредненное значение по множеству***. При рассмотрении одного случайного процесса при $t \to \infty$ определяем ***усредненное значение по времени.***

Случайные процессы считаются эргодическими, если среднее значение по множеству соответствует среднему значению по времени.

Случайные процессы подразделяются на стационарные и нестационарные.

В стационарном случайном процессе его вероятностные характеристики не изменяются во времени.

В нестационарном случайном процессе его вероятностные характеристики изменяются с течением времени.

Детерминированные и стохастические системы

Можно считать, что ***стационарный случайный процесс – это установившийся, а нестационарный – это динамический процесс***. *В дальнейшем будем рассматривать* ***стационарные процессы.*** Вероятность возникновения случайного процесса (события) по Колмогорову определяется ***совокупностью аксиом***:

- каждому событию x из n возможных соответствует неотрицательное действительное число P(x), называемое вероятностью;
- вероятность *достоверного* события равна *единице*; вероятность *невозможного* события равна *нулю*;
- вероятность *случайного* события $0 \le P(x) \le 1$;
- вероятность *несовместимых* событий, образующих полную группу, равна единице, т.е. $P(x_1)+P(x_2)+\ldots+P(x_n) = 1$.

Детерминированные и стохастические системы

Количественными характеристиками (оценками) случайных процессов являются: математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция.

Математическое ожидание $\tilde{x}$ – усредненная величина, относительно которой располагаются возможные реализации случайного процесса.

$$\tilde{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)P(x) \cdot dx$$

Где x(t) - реализация случайного процесса;

P(x) - вероятность данной случайной реализации.

В результате получили *усредненное значение по множеству* или *статистическое среднее значение*. В свою очередь, *среднее значение по времени* определяется:

$$\bar{x} = \lim_{T\to\infty} \left(\frac{1}{2T}\right) \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

Для эргодического стационарного случайного процесса всякое среднее по множеству равно среднему по времени и эти величины постоянные, не зависят от времени t, значит $\tilde{x} = \bar{x}$. В дальнейшем математическое ожидание будем обозначать m_x. Если математическое ожидание равно нулю, то такой случайный процесс называется *центрированным* (m_x=0).

Детерминированные и стохастические системы

Дисперсия (D_x) является *мерой отклонения случайной величины* $x(t)$ *от математического ожидания* m_x.

$$D_x = lim \frac{1}{2T} \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - m_x)^2 dt$$

Таким образом, математическое ожидание и дисперсия определяют некоторый «коридор», в котором с определенной вероятностью располагается случайный процесс. Дисперсия имеет размерность квадрата случайной величины.

Кроме дисперсии для оценки отклонения случайной величины используют *среднеквадратичное отклонение* (СКО) σ_x.

$$\sigma_x = \sqrt{D_x}$$

Детерминированные и стохастические системы

Какова статистическая зависимость в случайном процессе между двумя произвольно выбранными сечениями по времени? Это определяется с помощью *корреляционной функции*.

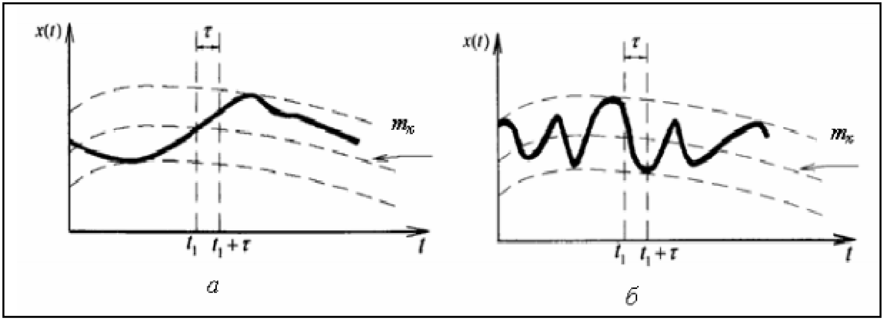
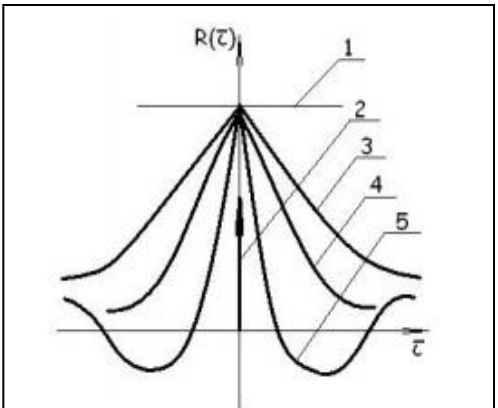


Рисунок 1 – Реализация двух случайных процессов с одинаковым математическим ожиданием и дисперсией

Детерминированные и стохастические системы

Корреляционная (автокорреляционная) функция R(τ) является количественной оценкой взаимосвязи между предыдущим и последующим значением случайного процесса через интервал времени τ.

$$R(\tau)=[x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T}[x(t)-m_x][x(t+\tau)-m_x]dt$$



Для более наглядного анализа вероятностной взаимосвязи случайного процесса при увеличении времени сдвига τ, то есть при 1τ, 2τ, 3τ,… nτ строится график зависимости корреляционной функции от τ или график R(t). Если случайный процесс является фактически постоянной величиной на всем протяжении времени t, то и корреляционная функция является постоянной величиной при любом значении τ или R(τ)= a^2 (прямая 1). Если в исследуемом процессе нет никакой связи между предыдущим и последующим его значением, то фактически нет взаимосвязи в изменения корреляционной функции. Она при любом значении $\tau \neq 0$ равна нулю и называется δ-функцией (прямая 2).

Детерминированные и стохастические системы

Такой процесс называется белый шум или абсолютно случайный процесс. Это свойство определяет его особую роль как простейшей модели случайного процесса. Значение $R(\tau) = C^2 \cdot \delta(\tau)$ принимается, если о случайном процессе ничего не известно.

Где C^2 – интенсивность случайного процесса.

Покажем основные свойства корреляционных функций, которые будут использованы при расчете автоматических систем:

1) начальное значение корреляционной функции при $\tau = 0$ максимальное и равно квадрату СКО

$$R(0) = D_x = \sigma^2;$$

2) с увеличением τ взаимосвязь между x(t) и x(t+τ) ослабевает и $R_x(\tau)$ уменьшается

$$\left|R_x(\tau)\right| \le D_x;$$

3) в стационарном случайном процессе $R(\tau)$ симметричная относительно оси ординат

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau);$$

Детерминированные и стохастические системы

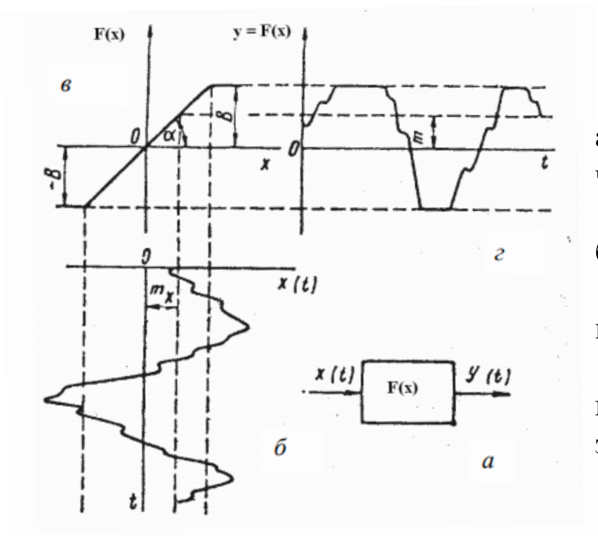
4) при рассмотрении двух случайных процессов x(t) и y(t) и для оценки статистической связи между ними (корреляции между ними) применяется *взаимная корреляционная функция*

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\,dt.$$

Взаимная корреляционная функция обладает теми же свойствами, что и корреляционная (точнее, автокорреляционная) функция. Если эти два случайных процесса друг с другом никак не связаны (статистически независимы), то $R_{xy}(\tau) = 0$.

Особенности расчета случайного процесса в нелинейной системе

Если случайный сигнал проходит нелинейное звено, то расчет такой системы существенно усложняется. На рисунке показано прохождение случайного сигнала через нелинейный элемент с насыщением F(x).



а - прохождение случайного сигнала через нелинейный элемент;

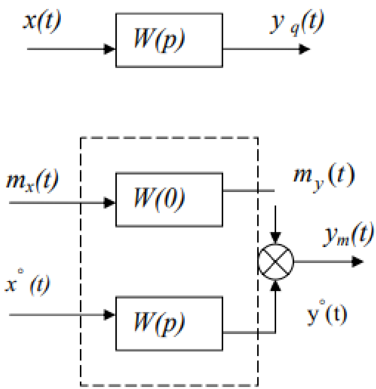
б - случайный входной сигнал;

в - нелинейный элемент с насыщением;

г - выходной сигнал после нелинейного элемента

Детерминированные и стохастические системы

Рассмотрим вначале структурную схему линейной системы управления, на вход который подается случайный сигнал:



$y_q(t)$ - действительный выходной сигнал

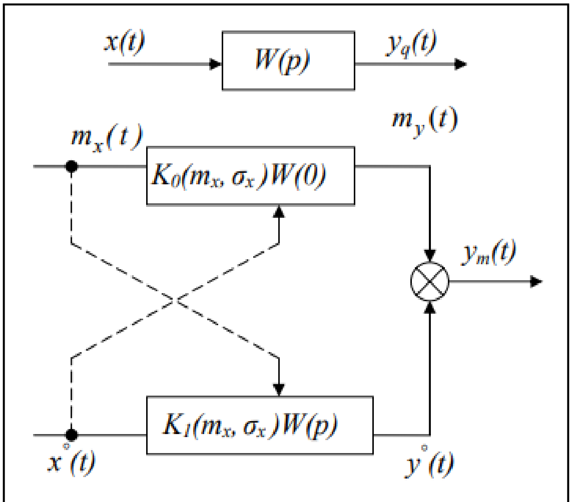
$y_m(t)$ -теоретически рассчитанный выходной сигнал

$$x(t) = m_x(t) + x^0(t)$$

где m_x - математическое ожидание входного сигнала; x^0 (t)- помехи и шумы входного сигнала, которые характеризуются дисперсией (D_x).

В этой линейной системе, используя принцип суперпозиции, можно отдельно и независимо друг от друга определить математическое ожидание выходного сигнала $m_y(t)$ и дисперсию случайной выходной величины $y^0(t)$.

Если такой же случайный сигнал будет подан на нелинейную систему управления (рисунок), то математическое ожидание на выходе системы зависит ***от изменения дисперсии, а изменение дисперсии зависит от изменения математического ожидания.*** Эти две характеристики случайного процесса становится взаимно связанны. Обозначим через K_0 (m_x, σ_x) эту взаимозависимость математического ожидания от дисперсии входного сигнала D_x. При расчете удобнее вместо дисперсии D_x использовать среднеквадратичное отклонение σ_x.



Соответственно обозначим через K_1 (m_x, σ_x) взаимосвязь среднеквадратичного отклонения от математического ожидания. Тогда:

$$y_m(t) = m_y + y^{\circ}(t) = K_0 m_x + K_1 x^{\circ}(t)$$

Для нахождения этих коэффициентов K_0 и K_1 при расчете прохождения сигнала через нелинейное звено используется ***метод статистической линеаризации нелинейного элемента.***

Метод статистической линеаризации основан на замене нелинейного элемента статистически эквивалентным линеаризованным элементом.

Детерминированные и стохастические системы

При ***гармонической линеаризации*** нелинейная характеристика элемента заменялась линейной, при которой в этой линейной зависимости постоянная составляющая и первая гармоника совпадала с постоянной составляющей и первой гармоникой данной нелинейной характеристики. ***Это осуществлялось с помощью разложения нелинейной характеристики в ряд Фурье, и учитывались только два первых члена ряда.*** Остальные гармоники, которые возникали на выходе данного нелинейного элемента, не учитывались. Соответственно, не учитывались остальные члены ряда Фурье. Таким образом, коэффициент гармонической линеаризации $q_1(A)$ и $q_2(A)$ зависит ***от амплитуды входного сигнала и от вида нелинейной характеристики.***

Детерминированные и стохастические системы

При ***статистической линеаризации*** нелинейная характеристика элемента тоже заменяется на линейную, но по другим показателям. При этом среднее значение (или математическое ожидание) и дисперсия в полученной линейной характеристике совпадает со средним значением и дисперсией данной нелинейной характеристики. Таким образом, ***учитывается только два первых вероятностных момента случайного процесса (среднее значение и дисперсия), а остальные параметры случайного процесса не учитываются.*** Таким образом, коэффициенты статистической линеаризации K_0 (m_x, σ_x), и K_1 (m_x, σ_x) зависят ***от закона распределения случайного процесса и от вида нелинейной характеристики.***