ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления и защит. Часть 1

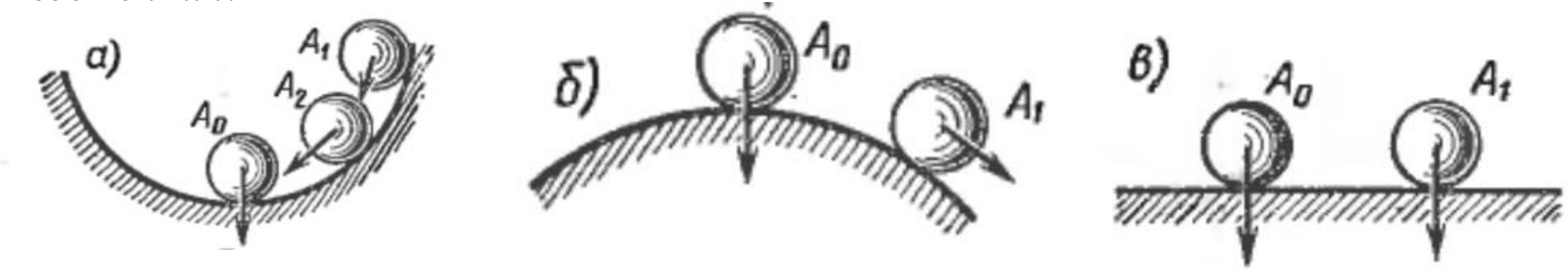
Лекция 4

Устойчивость линейных систем. Алгебраические критерии устойчивости (Рауса, Гурвица, Льенара-Шипара)

Томск - 2019

Устойчивость систем АСУ

Устойчивость – важнейшее свойство. Систему будем считать устойчивой, если после нанесения, а затем снятия внешнего воздействия она ***возвращается в исходное состояние***. Систему будем считать нейтральной, если после нанесения, а потом снятия внешнего воздействия она удаляется от исходного состояния на ***некоторую ограниченную величину***. Систему будем считать неустойчивой, если после нанесения, а затем снятия внешнего воздействия она ***неограниченно удаляется от исходного состояния***.



а – устойчивая система; б – неустойчивая система; в – нейтральная система

Устойчивость систем АСУ

Устойчивость – это свойство системы возвращаться ***в прежнее состояние равновесия*** после вывода ее из этого состояния и прекращения этого действия в системе. На рисунке 1 приведены примеры типовых переходных процессов ***в устойчивой системе***. На рисунке 2 приведены примеры типовых переходных процессов ***в неустойчивой системе***.

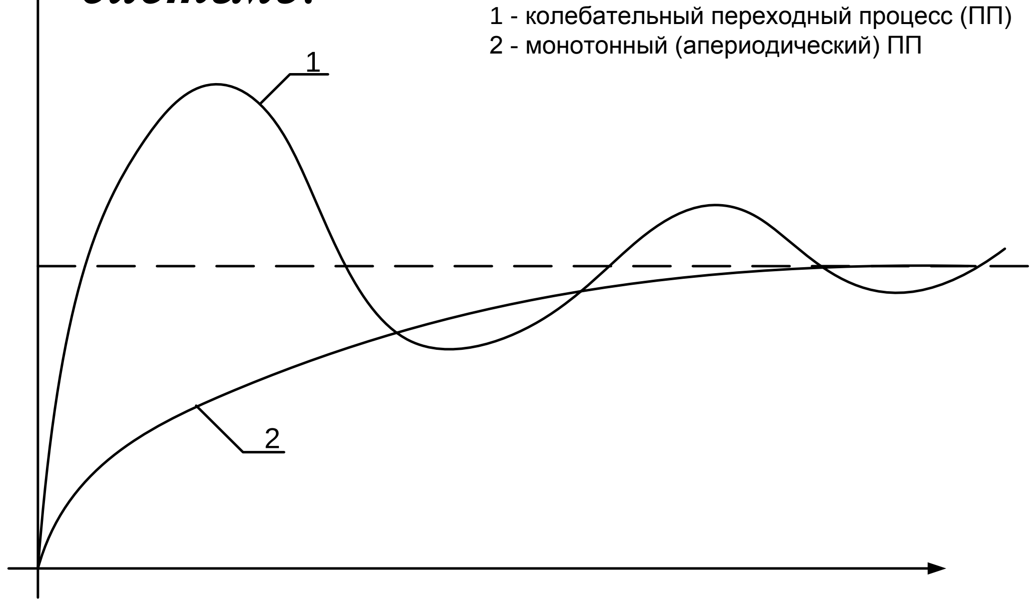


Рисунок 1 - Переходные процессы в устойчивой системе

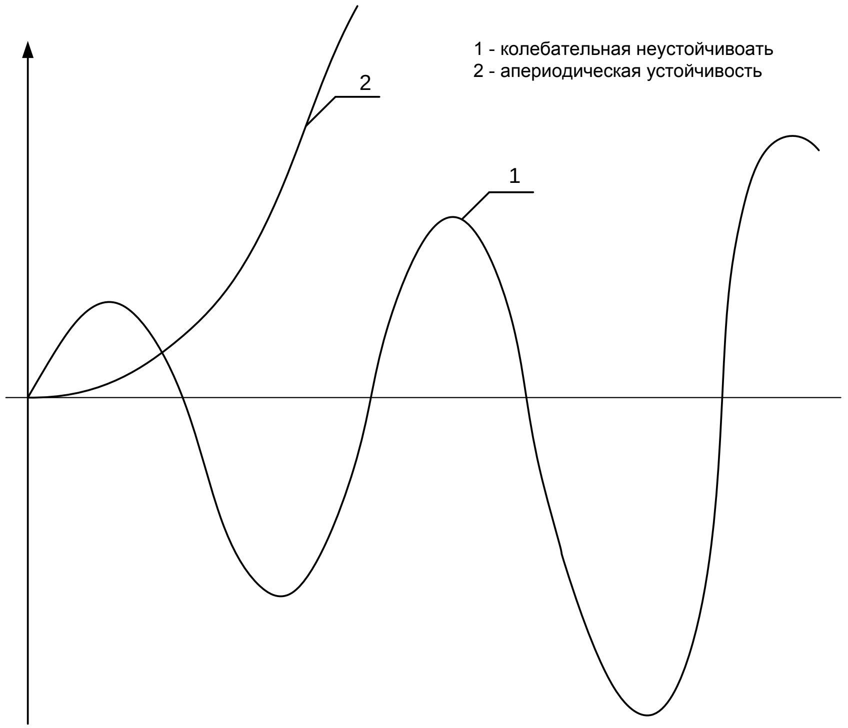


Рисунок 2 - Переходные процессы в неустойчивой системе

Условия асимптотической устойчивости системы

Пусть для исходной системы найдена передаточная функция в замкнутом состоянии.

$$W_з(\mathrm{p}) = \frac{\mathrm{B(p)}}{\mathrm{A(p)}} = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0} = \frac{Y(p)}{V(p)}, \qquad (1)$$

где $b_j = \mathrm{const}$, j= $\overline{0, m}$, $a_j = \mathrm{const}$, , i= $\overline{0, n}$

На основе (1) можно записать операторное уравнение

$$\begin{aligned} &a_n p^n Y(p) + a_{n-1} p^{n-1} Y(p) + \ldots + a_1 p\, Y(p) + a_0 Y(p) = \\ &= b_m p^m V(p) + b_{m-1} p^{m-1} V(p) + \ldots + b_1 p\, V(p) + b_0 V(p). \end{aligned} \qquad (2)$$

Условия асимптотической устойчивости системы

Используя свойства преобразования Лапласа можно записать линейное дифференциальное уравнение n-го порядка.

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_1 \dot{y} + a_0 = b_m v^{(m)} + b_{m-1} v^{(m-1)} + \ldots + b_1 \dot{v} + b_0 v$$

$$\left.\begin{aligned} & y_0 = y(t=0); \\ & {y_0}^{(k)} = y^k(t=0); \\ & k = \overline{1,(n-1)}. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Решение дифференциального уравнения (2) может быть представлено в виде:

$$y = y^b + y^{cb}, \qquad (4)$$

где

y^b – вынужденная (полезная) составляющая, определяется правой частью уравнения (2),

y^{cb} – свободная (переходная) составляющая, определяется решением однородного дифференциального уравнения, т.е. с правой частью.

Условия асимптотической устойчивости системы

Известно, что:

$$y_{cb} = \sum_{k=1}^{n} c_k c^{p_k t}. \tag{7}$$

Следовательно:

$$y_{cb} = \sum_{k=1}^{n} c_k c^{p_k t} \to 0,$$

$$p_k < 0,$$

$$k = \overline{1, n}.$$

Пусть:

$$p_k = -\alpha_k,$$

$$\alpha_k > 0. \tag{8}$$

Условия асимптотической устойчивости системы

При выполнении условия (8) система асимптотически устойчива (см. рисунок 3).

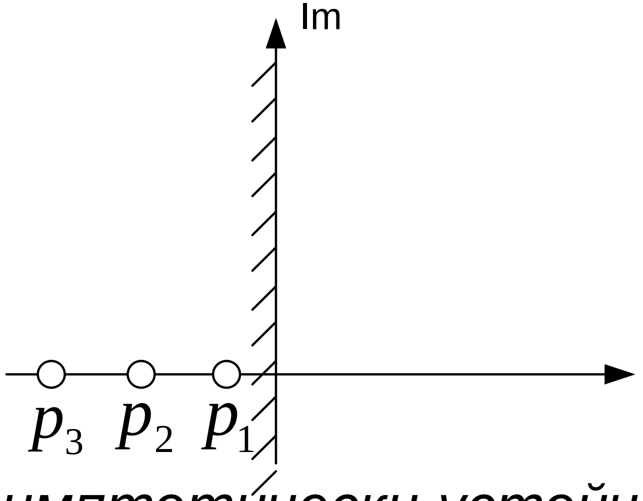


Рисунок 3 – Асимптотически устойчивые системы

Пусть характеристическое уравнение (7.5) имеет **s** действительных корней и ***n-s*** корней комплексно-сопряженных:

$$p_k = -\beta_k,$$

$$k = \overline{1, S};$$

$$p_k = -\alpha_k \pm j\omega_i,$$

причем, ***n-s*** всегда **четно**.

$$i = \overline{1, \frac{n-s}{2}};$$

Условия асимптотической устойчивости системы

Тогда можно записать:

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{S} C_k e^{-bkt} + \sum_{i=1}^{\frac{n-s}{2}} C_k e^{-\alpha_i t}\cdot\sin(\omega_i t+\varphi_i)\right)\to 0. \qquad (9)$$

Формула (9) выполняется при условии:

$$\beta_k > 0, k=\overline{1,s},$$
$$\alpha_k > 0, i=\overline{1,\frac{n-s}{2}}. \qquad (10)$$

Пусть рассматривается система четвертого порядка ***(n=4)*** и пусть характеристическое уравнение имеет следующие корни:

$$p_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\omega_1,$$
$$p_3 = -\beta_1,$$
$$p_4 = -\beta_2;$$

$$\alpha_1 > 0,$$
$$\beta_k > 0,$$
$$k=1,2;$$

$$\beta_2 > \beta_1 > \alpha_1.$$

Условия асимптотической устойчивости системы

Тогда с учетом (10) расположение корней на комплексной плоскости имеет вид представленный на рисунке 4.

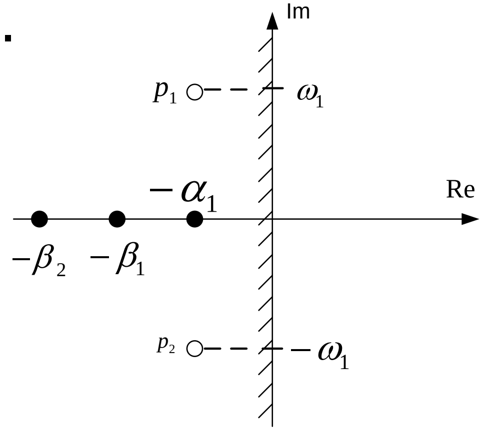


Рисунок 4 – Расположение корней на комплексной плоскости

Таким образом, на основе (10) можно сделать вывод: ***линейная система асимптотически устойчива если все корни асимптотические уравнения располагается в левой части комплексной плоскости корней.*** Если хотя бы один действительный корень или пара комплексно-сопряженных корней располагаются на мнимой оси, то такая ***система находится на границе устойчивости***.

Если хотя бы один корень находится в правой полуплоскости, то в соответствии с (9) и (10), ***система является неустойчивой***.

Необходимые условия устойчивости системы

Пусть для структурной схемы рассматриваемой системы найдена передаточная функция в замкнутом состоянии:

$$W_з(\mathrm{p}) = \frac{b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}. \qquad (11)$$

$$A_з(\mathrm{p}) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0. \qquad (12)$$

Характеристическое уравнение:

$$A_з(\mathrm{p}) = 0 \quad \text{или} \quad a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (13)$$

Пусть характерное уравнение (13) имеет корни $p_i, \; i = \overline{1, n}.$

Известно, что характерный полином (12) можно разложить на множители:

$$A_з(\mathrm{p}) = a_n (p - p_1)(p - p_2)\ldots(p - p_n). \qquad (14)$$

Необходимые условия устойчивости системы

Пусть характерное уравнение (13) имеет действительные отрицательные корни:

$$p_k = -\beta_k; \;\; k = \overline{1,n}; \;\; \beta_k > 0. \tag{15}$$

Тогда (14) с учетом (15) можно записать в виде:

$$A_з(\mathrm{p}) = a_n(p+\beta_1)(p+\beta_2)...(p+\beta_n). \tag{16}$$

Поскольку все сомножители в формуле (16) являются положительными, следовательно, и коэффициенты характеристического уравнения (13) также являются положительными.

Утверждение 2: Необходимым условием устойчивости является ***положительность корней всех коэффициентов характеристического уравнения***.

Пусть уравнение (2.13) имеет два комплексных корня и n-2 действительных корня:

$$p_{1,2} = -\alpha_1 \pm j\omega_1, \;\; \alpha_1 > 0. \tag{17}$$

$$n-2, \;\; p_k = -\beta_k, \;\; k = \overline{1,n}-2. \tag{18}$$

Необходимые условия устойчивости системы

На основе (17) и (18) можно записать:

$$A_з(\mathrm{p}) = a_n(p+\alpha_1 - j\omega_1)(p+\alpha_1 + j\omega_1)(p-\beta_1)...(p+\beta_{n-2}) = \qquad (19)$$

$$= (a_n(p+\alpha_1)^2 + \omega_1^2)(p+\beta_1)...(p+\beta_{n-2}).$$

Таким образом, и в данном случае коэффициенты характеристического уравнения ***также оказываются положительным***, что и требовалось доказать.

Если хотя бы один коэффициент характеристического уравнения не является положительным, то в соответствии с доказанным утверждением ***рассматриваемая система не является устойчивой***.

Критерий устойчивости линейных систем

Находить корни характеристического уравнения высоких степеней затруднительно или невозможно, а численные методы не дают общего решения, поэтому используют косвенные методы анализа устойчивости систем.

<u>**Критерием устойчивости**</u> называют правила, позволяющие сделать вывод об устойчивости системы ***без определения корней характеристического уравнения.***

Критерии устойчивости, как косвенные методы, делятся на две группы:
- ***алгебраические***;
- ***частотные***.

Критерий Рауса

Формулировка критерия устойчивости в виде таблицы

Таблица Рауса

ri	$\Downarrow i \Longrightarrow k$	1	2	3	4
-	1	$c_{1,1} = a_0$	$c_{2,1} = a_2$	$c_{3,1} = a_4$	...
-	2	$c_{1,2} = a_1$	$c_{2,2} = a_3$	$c_{3,2} = a_5$	...
$r_3 = \frac{c_{1,1}}{c_{1,2}}$	3	$c_{1,3} = c_{2,1} - r_3 \cdot c_{2,2}$	$c_{2,3} = c_{3,1} - r_3 \cdot c_{3,2}$	$c_{3,3} = c_{4,1} - r_3 \cdot c_{4,2}$	...
$r_4 = \frac{c_{1,2}}{c_{1,3}}$	4	$c_{1,4} = c_{2,2} - r_4 \cdot c_{2,3}$	$c_{2,4} = c_{3,2} - r_4 \cdot c_{3,3}$	$c_{3,4} = c_{4,2} - r_4 \cdot c_{4,3}$	...
...	...	...	...	...	...

Формулировка критерия Рауса:

Для устойчивости линейной стационарной системы необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса $C_{1,1}, C_{1,2}, C_{1,3}, \ldots$ были одного знака. Если это не выполняется, то система неустойчива.

Алгебраический критерий Гурвица

Пусть найдено характеристическое уравнение (5).
Из коэффициентов (5) состоится главный определитель Гурвица n-го порядка.

$$\Delta n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_n & a_{n-2} & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Система устойчива, если при An>0 все определители Гурвица являются положительными.

$$\left.\begin{array}{l} 0, n > 0, \\ \Delta_1 = a_{n-1} > 0, \\ \Delta_2 = a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3} > 0, \\ \dots \\ \Delta_n = a_0 \Delta_{n-1} > 0. \end{array}\right\} \qquad (20)$$

Алгебраический критерий Гурвица

Этапы анализа устойчивости по критерию Гурвица:

1)Если дана структурная схема исходной системы, то после соответствующих структурных преобразований можно найти Wз(p)- передаточная функция системы в замкнутом состоянии.
2)Приравнивая Wз к 0 записывают характеристическое уравнение системы.
3)После обозначения коэффициентов характеристического уравнения составляется главный определитель Гурвица Δn
4)Если условие (20) выполняется, то такая система является устойчивой.
5)Если все определители Гурвица положительны, а $\Delta_n = 0$, то такая система находится на границе устойчивости.

$$a_n = a_0 \Delta_{n-1} = 0.$$

Приведем два случая:
1)При $a_0 = 0$ и $\Delta_{n-1} > 0$ в системе появляется нулевой корень (p=0), что соответствует апериодичной границе устойчивости.
2)При $\Delta_{n-1} = 0$, $a_0 > 0$ - соответствует колебательной границе устойчивости.

Алгебраический критерий Гурвица

При использовании критерия Гурвица передаточная функция замкнутой системы имеет вид:

$$W_з(p) = \frac{B(p)}{A(p)}.$$

1) Пусть исходная система представляется пропорциональным инерционным звеном первого порядка вида:

$$W_з(p) = \frac{K}{Tp+1} = \frac{b_0}{a_1 p + a_0}.$$

Система устойчива, если:

$$- a_1 > 0,$$

$$- \Delta_1 = d_0 > 0.$$

Алгебраический критерий Гурвица

Пусть исходная система - пропорциональное звено второго порядка с ПФ.

$$W_з(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 2dTp + 1} = \frac{b_0}{a_2 p^2 + a_1 p + a_0},$$

где $b_0 = k, \; a_2 = T^2, \; a_1 = 2dT, \; a_0 = 1.$

Характеристическое уравнение имеет вид: $a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$

Система устойчива, если:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

$- a_2 > 0$

$- \Delta_1 = a_1 > 0$

$- \Delta_2 = a_0 \, \Delta_1 = a_0 \, a_1 > 0$

Т.е. $a_1 > 0$, то и должно быть $a_0 > 0.$

Окончательно можно записать:

$$a_2 > 0,$$
$$a_1 > 0,$$
$$a_0 > 0.$$

Алгебраический критерий Гурвица

Таким образом, для систем первого и второго порядков положительность коэффициентов ХУ – необходимое и достаточное условие устойчивости.

3) Дана система 3-го порядка с ПФ в ЗС вида:

$$W_з(p) = \frac{b_0}{a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

Характеристическое уравнение системы в замкнутом состоянии имеет вид:

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Главный определитель Гурвица:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}$$

Система устойчива, если:

$$\begin{aligned} & a_3 > 0, \\ & \Delta_1 = a_2 > 0, \\ & \Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ & \Delta_3 = a_0 \Delta_2 > 0\ \ ,\textit{следовательно},\ \ a_0 > 0. \end{aligned}$$

Алгебраический критерий Гурвица

Поскольку $a_0 > 0$, то $a_1 > 0$.

Окончательно можно записать

$$
\begin{aligned}
&a_0 > 0,\\
&a_1 > 0,\\
&a_2 > 0,\\
&a_3 > 0,\\
&\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0.
\end{aligned}
$$

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$$

Таким образом, для устойчивости системы третьего порядка в дополнение к необходимым условиям устойчивости (положительность коэффициентов характеристического уравнения) должно быть и выполнение указанных соотношений.

Критерий Льенара-Шипара

Формулировка

При выполнении необходимого условия устойчивости для устойчивых систем необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица с нечетными (четными) номерами были положительны.