



ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ



Теория автоматического управления.
Часть №2

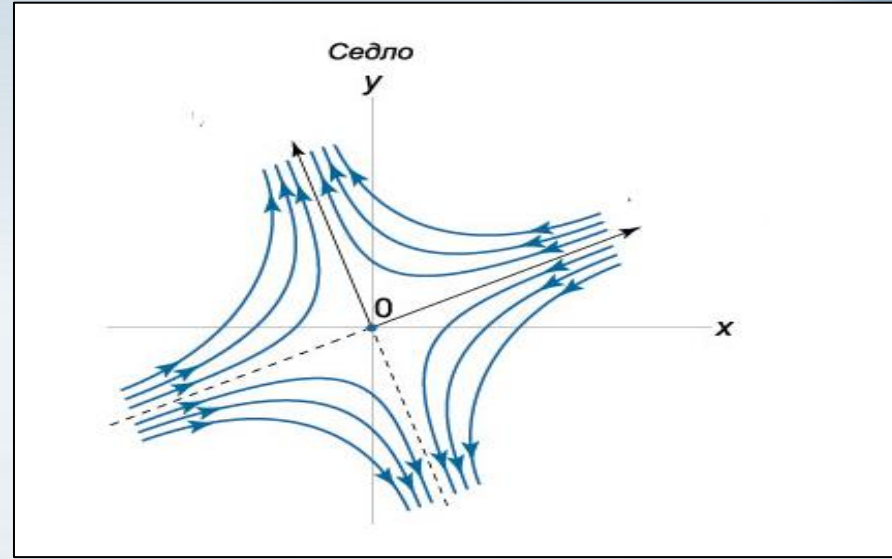
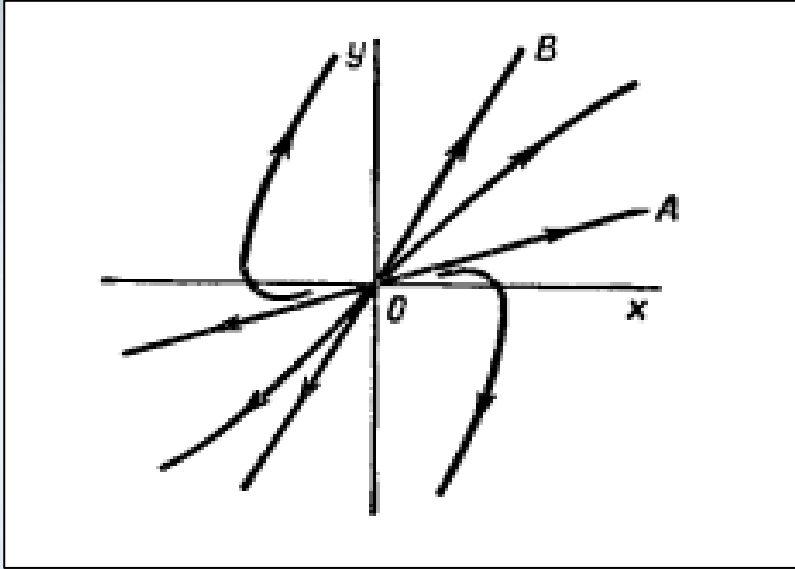


Лекция № 3

Фазовые траектории (портреты). Продолжение

Томск, 2019

5) корни вещественные $\text{Re} > 0$, $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 < 0$, $a_2 > 0$



б) корни вещественные и имеют разные знаки при $a_2 < 0$ (неуст. линейная система)

Процесс такой же как и в случае 4), только P_1 и P_2 имеют разные знаки, так как $a_2 < 0$ введем обозначение $P^2 = -a_2$. Для упрощения рассмотрим случай с $a_1 = 0$, тогда $\frac{dy}{dx} = P^2 \frac{x}{y}$. После интегрирования $\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{(PC)^2} = 1$ т.е. семейство гипербол (см. рис.)

Аналогичная картина и для $a_1 = 0$.

Особые точки

В точках, которые соответствуют установившемуся состоянию, получаем неопределённое выражение: $\frac{dy}{dx} = -a_1, -a_2, \frac{0}{0}$

Такие (.) называются особыми.

Особые точки в случаях:

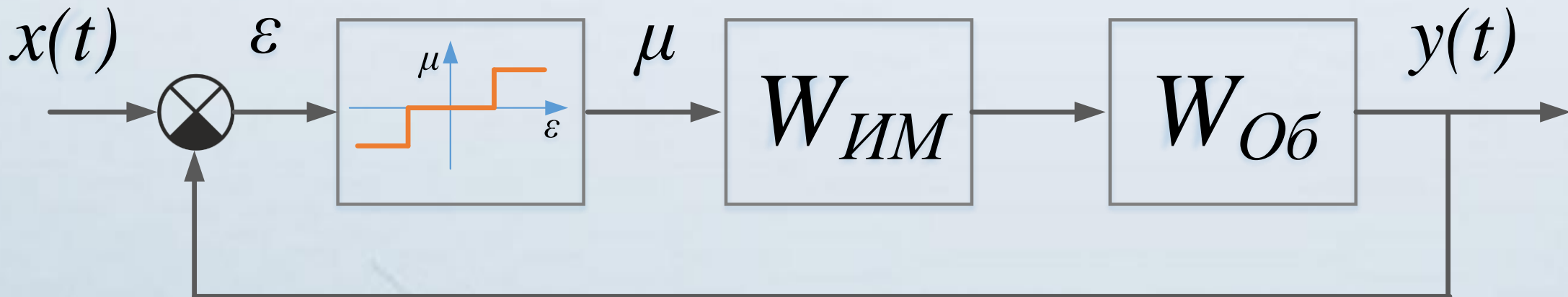
- 1) (.) типа «центр»
- 2) (.) типа «устойчивый фокус»
- 3) (.) типа «неустойчивый фокус»
- 4) (.) «устойчивый узел»
- 5) (.) «неустойчивый узел»
- 6) (.) типа «седло».

Метод исследования нелинейных систем

Метод «припасовывания» граничных значений

Может применяться в том случае, когда отдельные участки движения системы описывают поведением линейных систем. При этом конечное состояние системы на одном участке определяет начальные условия движения системы на следующем участке.

$$\begin{aligned} \mu &= c \text{ при } \varepsilon \geq a \\ \mu &= 0 \text{ при } |\varepsilon| < a \\ \mu &= -c \text{ при } \varepsilon \leq -a \end{aligned}$$





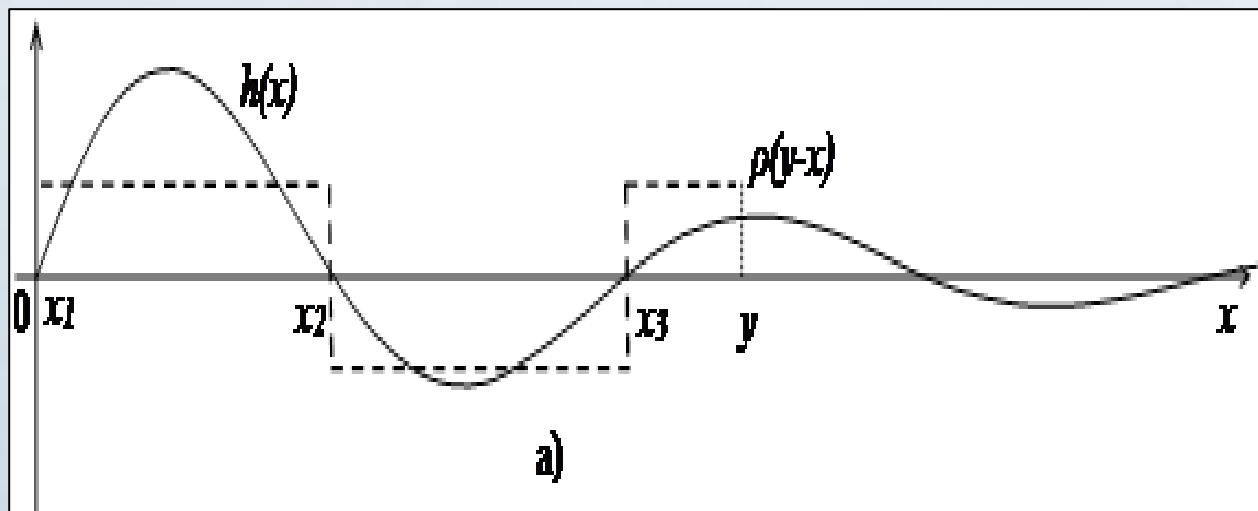
Пусть
$$W_{об} = \frac{k_{об}}{T_{об}P + 1} \quad W_{ум} = \frac{1}{T_{ум}P}$$

Тогда
$$W_{АЧ} = W_{ум} \cdot W_{об} = \frac{1}{T_{ум}P} \cdot \frac{k_{об}}{T_{об}P + 1} = \frac{k_{об}}{T_{ум}T_{об}P^2 + T_{ум}P}, \text{ отсюда}$$



Дифференциальное уравнение системы
$$T_{ум}T_{об}y'' + T_{ум}y' = \mu \cdot K_{об}$$

Уравнение движения системы учитывает различные значения μ :



1. $\varepsilon \geq a \quad T_{ум}T_{об}y'' + T_{ум}y' = c \cdot k_{об}$

2. $|\varepsilon| < a \quad T_{ум}T_{об}y'' + T_{ум}y' = 0$

3. $\varepsilon \leq -a \quad T_{ум}T_{об}y'' + T_{ум}y' = -c \cdot k_{об}$

$\varepsilon = S - y \Rightarrow 1. \varepsilon \geq a \Rightarrow S - y \geq a \Rightarrow y \leq S - a$

2. $|\varepsilon| < a \Rightarrow S - a < y < S + a$

3. $\varepsilon \leq -a \Rightarrow y \geq S + a$

Метод фазовой плоскости

Используется для анализа систем не выше второго порядка, т.к. ее состояние может быть описано двумя параметрами в двумерном пространстве (на фазовой плоскости).

Для систем в общем виде: $c = const$

$x''(t) + f_1(x, y) \cdot y + f_2(x, y) \cdot x = c$ т.к. при переходе к фазовым координатам время в явном виде исключается, то $y = \frac{dx}{dt}$, тогда $x'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot y$,

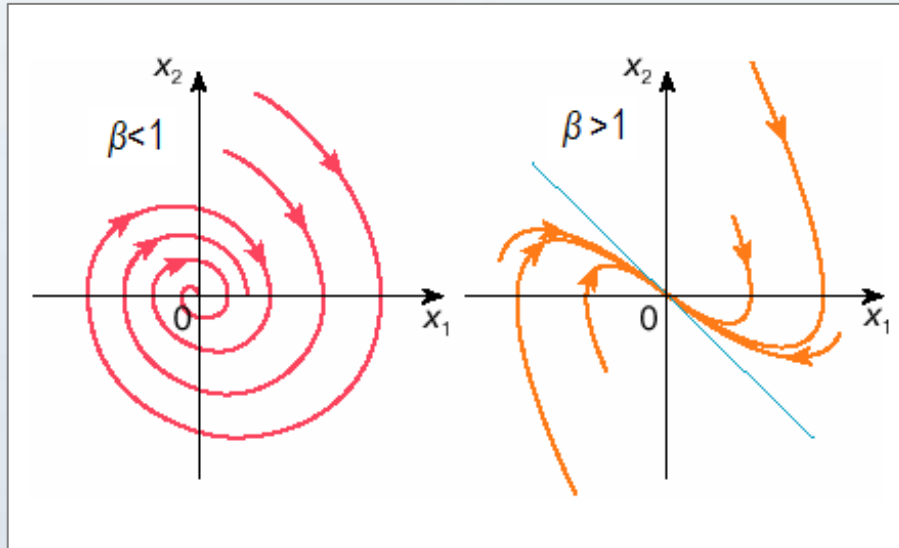
уравнение системы имеет вид:

$$\frac{dy}{dx} \cdot y + f_1(x, y) \cdot y + f_2(x, y) \cdot x = c$$

$$\frac{dy}{dx} = -f_1(x, y) - f_2(x, y) \frac{x}{y} + \frac{c}{y} \quad (\text{в общем виде уравнение движения системы в фаз.плоск.})$$

Где x, y – фазовые координаты системы

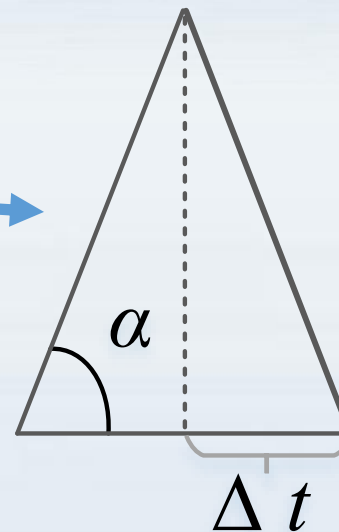
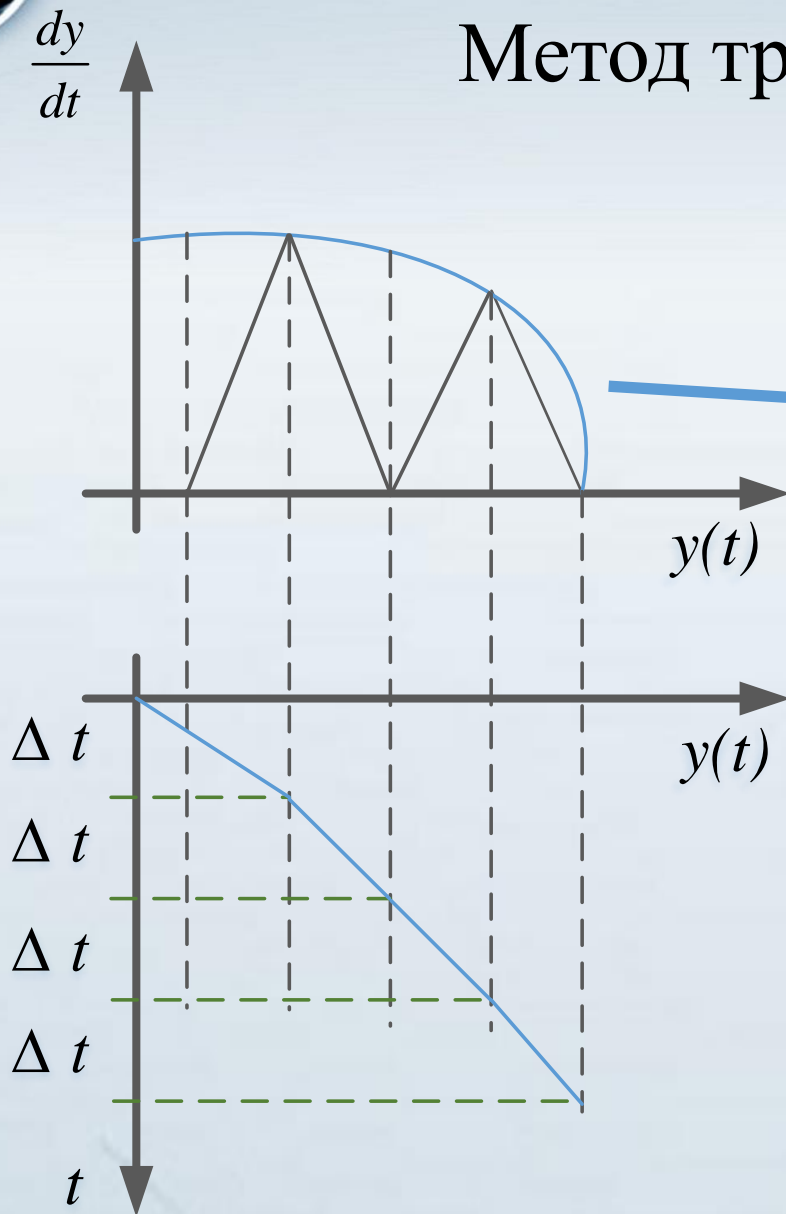
Далее строится *фазовый портрет системы*, по которому определяется устойчивость системы:



Метод используется тогда, когда линеаризация приводит к неудовлетворяющим ошибкам или когда она ограничена в применимости по времени.

Построение переходных процессов по фазовой траектории

Метод треугольника



$$\Delta y = v \cdot ctg \alpha$$

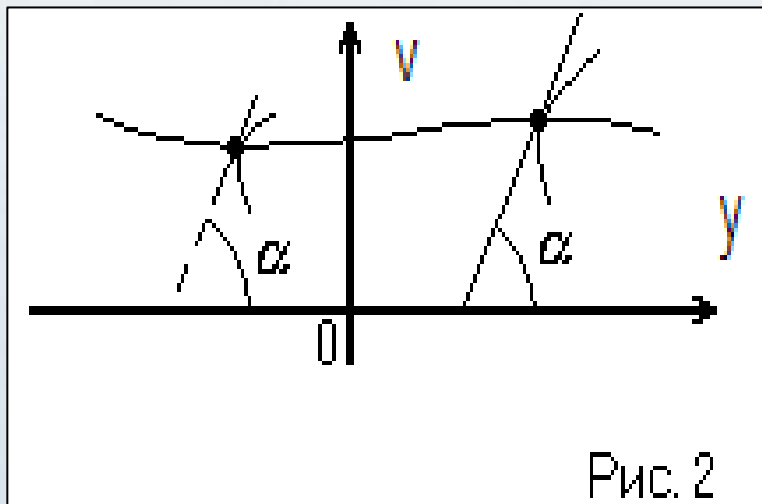
$$\Delta y = \frac{dy}{dt} ctg \alpha$$

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta t} ctg \alpha$$

$$\Delta t = ctg \alpha$$

Метод Изоклин. Метод равных направлений

Кривая, соединяющая все точки фазовой плоскости, в которых касательные ко всем фазовым траекториям имеют одинаковый угол α с осью абсцисс, называется изоклиной.



$$\frac{dv}{dy} = -f_1(y, v) - f_2(y, v) \frac{y}{v} + \frac{c}{v}$$

$$\frac{dv}{dy} = m = \operatorname{tg} \alpha \quad m = \operatorname{const}$$

$$-f_1(y, v) - f_2(y, v) \frac{y}{v} + \frac{c}{v} = m$$

Пример: $y'' + 2y' + 5y = 3$

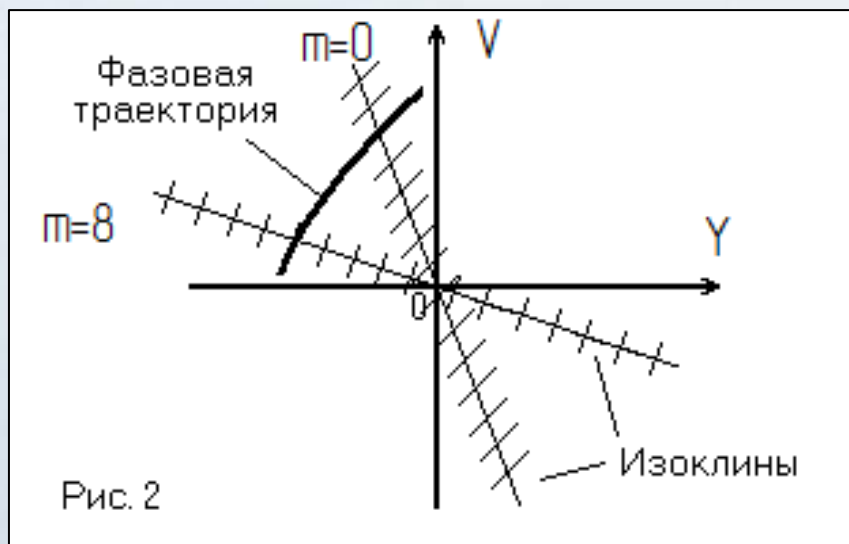
$$m = -2 - 5 \frac{y}{v} + \frac{3}{v}$$

$$mv = -2v - 5y + 3$$

$$v(m + 2) = -5y + 3$$

$$-5y + 3 = 0 \quad \Rightarrow y = 0.6$$

Изоклины в данном случае – прямые линии, проходящие через начало координат. Для облегчения построения фазовых траекторий изоклины предварительно наносятся на чертёж с чёрточками, обозначающими наклон касательных.



$$v = -\frac{5y}{m+2} + \frac{3}{m+2}$$

(уравнение прямой)

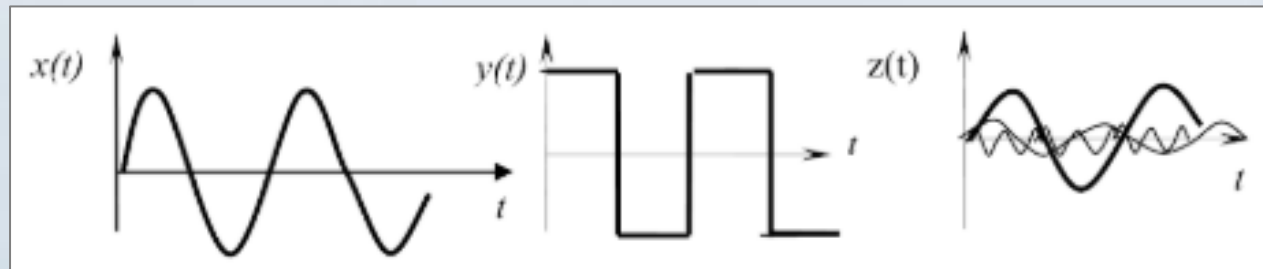
Метод гармонической линеаризации

Метод гармонической линеаризации – это метод исследования автоколебаний. Он позволяет определять условия существования и параметры возможных автоколебаний в нелинейных системах. Входной сигнал:

$$x(t) = A \cdot \sin \omega t$$

Метод гармонической линеаризации будет являться справедливым, если выполняется гипотеза о низкочастотности линейной части системы (линейная часть гасит все высшие гармоники, порождаемые нелинейным элементом).

На выходе системы рассматривается только первая гармоника:





Для нелинейных элементов, имеющих нечетно симметричную статическую характеристику

$$b_1(A) = 0 \quad f(x) = -f(-x)$$

относительно y_0 для однозначно нечетно симметричной нелинейности $y_0=0$

$$y(t) = y_0 + A(a_1 \sin \omega t + b_1 \cos \omega t)$$

$$a_1(A) = \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \sin \omega t dt$$

$$b_1(A) = \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) \cos \omega t dt$$

$$y_0 = \frac{\omega}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \omega t) dt$$

$$\varphi = \omega t$$

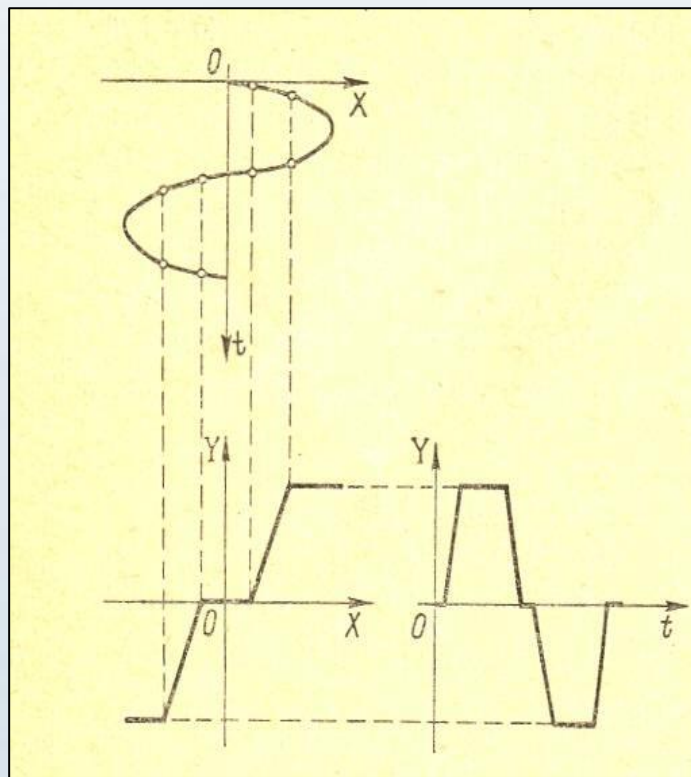
$$a_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$b_1(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$y_0 = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \varphi) d\varphi$$

$$\cos \varphi d\varphi = \frac{1}{A} d(A \sin \varphi)$$

$$b_1(A) = \frac{1}{\pi A^2} \int_0^{2\pi} f(A \sin \varphi) \cdot d(A \sin \varphi) = \frac{1}{\pi A^2} \int_{-A}^{+A} f(x) dx$$



Получим:

$$y(t) = A(a_1 \sin wt + b_1 \cos wt)$$

$$y(t) = A \cdot A_n \sin(wt + \varphi_n)$$

$$A_n(A) = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$$

$$\varphi_n(A) = \text{arctg} \frac{b_1}{a_1}$$

$$\frac{A \cdot A_n}{A} = A_n(A)$$

$$W_n(iA) = A_n(A) \cdot e^{i\varphi_n(A)}$$

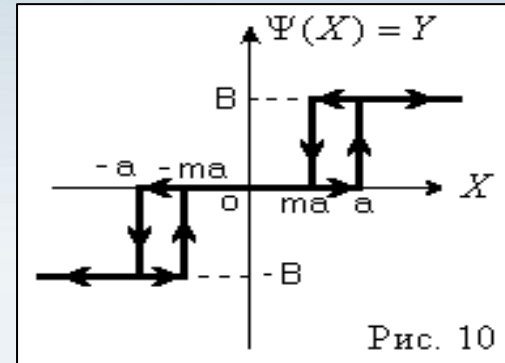
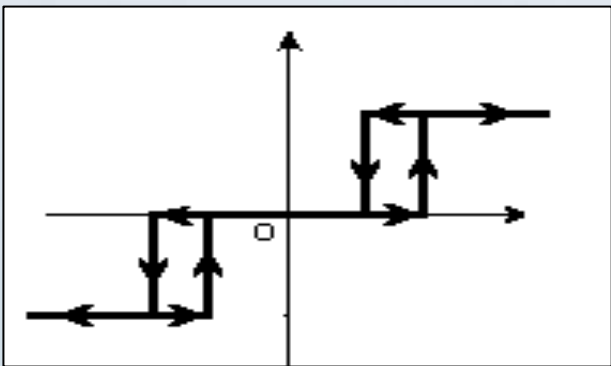


Рис. 10

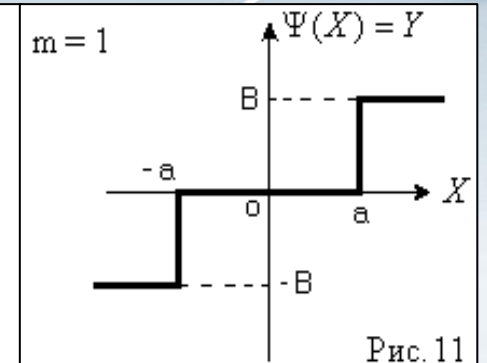


Рис. 11

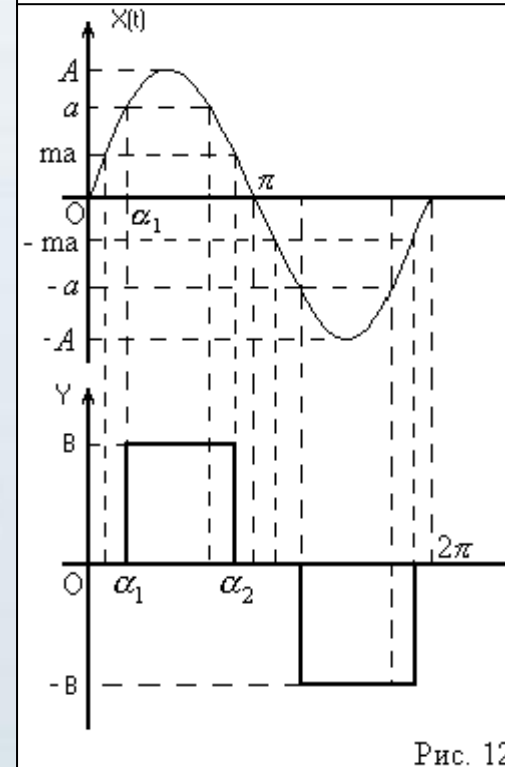


Рис. 12

Определяем выходной сигнал нелинейного элемента



Если амплитуда входного сигнала будет меньше $A < a$

$$W_n(iA) = 0 \quad \text{при} \quad A < a$$

$$a_1(A) = \frac{2c}{\pi A} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \sin \varphi \, d\varphi = \frac{2c}{\pi A} (\cos \beta_1 - \cos \beta_2)$$

$$b_1(A) = \frac{2c}{\pi A} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \cos \varphi \, d\varphi = \frac{2c}{\pi A} (\sin \beta_2 - \sin \beta_1)$$

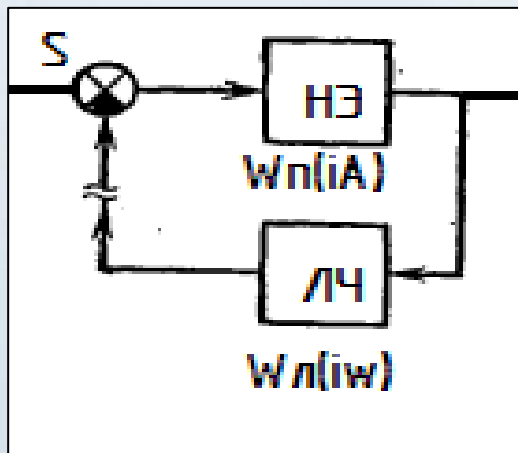
$$\beta_2 = \pi - \arcsin \frac{n \cdot a}{A}$$

$$A \sin \beta_1 = a$$

$$\beta_1 = \arcsin \frac{a}{A}$$

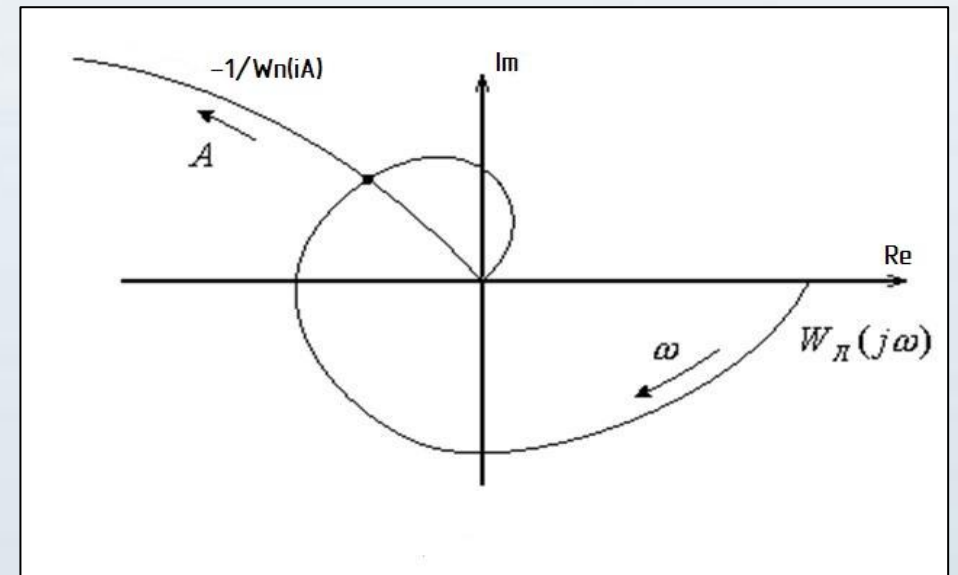
Метод гармонического баланса Гольдфарба

Линейная часть обладает свойствами низкочастотного фильтра, т.е. для такого нелинейного элемента справедлив метод гармонической нелинеаризации. Тогда характеристику мы можем представить на границе устойчивости автоколебаний.



$$W_n(iA) \cdot W_n(iw) = -1 \quad \text{условия прохождения}$$

$$W_n(iw) = -\frac{1}{W_n(iA)}$$





Метод:

Правило устойчивости/неустойчивости автоколебаний. Автоколебания в системе будут устойчивыми, если от точки пересечения ветвь характеристики $\frac{1}{W_n(iA)}$ при $A \rightarrow \infty$ не охватывается графиком АФЧХ линейной части.

Критерий абсолютной устойчивости Попова.

Абсолютная устойчивость - асимптотическая устойчивость системы в целом, т.е. в большем и малом отклонении устойчивость зависит не только от внутренних свойств, но и от величины и характера внешних воздействий.

Абсолютная устойчивость - отклонение от начальных условий.

Разработан для случая, когда линейная часть системы устойчива и нелинейность принадлежит к классу $0 \div k$. То есть для нелинейного элемента выполняется условие

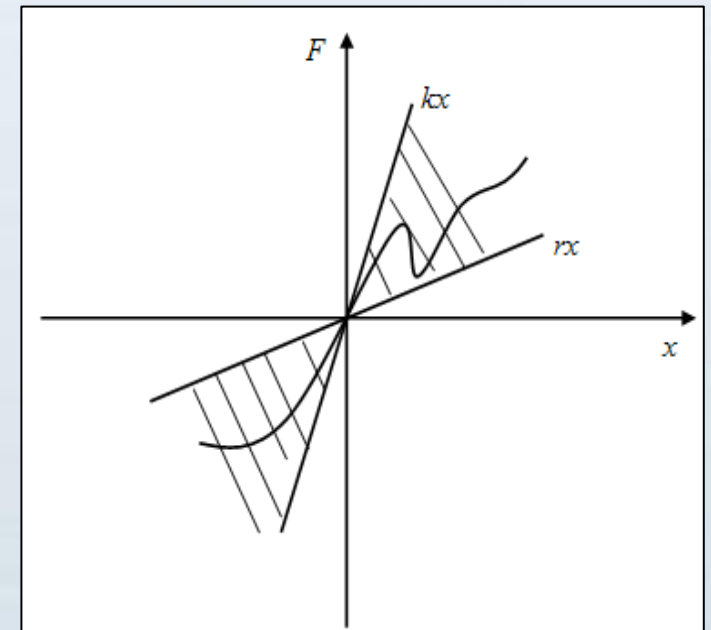
$$\frac{f(x)}{x} \leq k \quad x \neq 0.$$

Прямая имеет тангенс угла k .

Критерий гласит: нелинейная система является абсолютно устойчивой, если для всех $\omega = 0 \div \infty$

выполняется условие:

$$\operatorname{Re} \left[(1 + iq\omega) \cdot W_{ac}(i\omega) \right] + \frac{1}{k} > 0$$



Интерпретация и порядок применения критерия.

$W(iw) = \operatorname{Re}_{лч} + i \operatorname{Im}_{лч} (w)$ представим в выражение

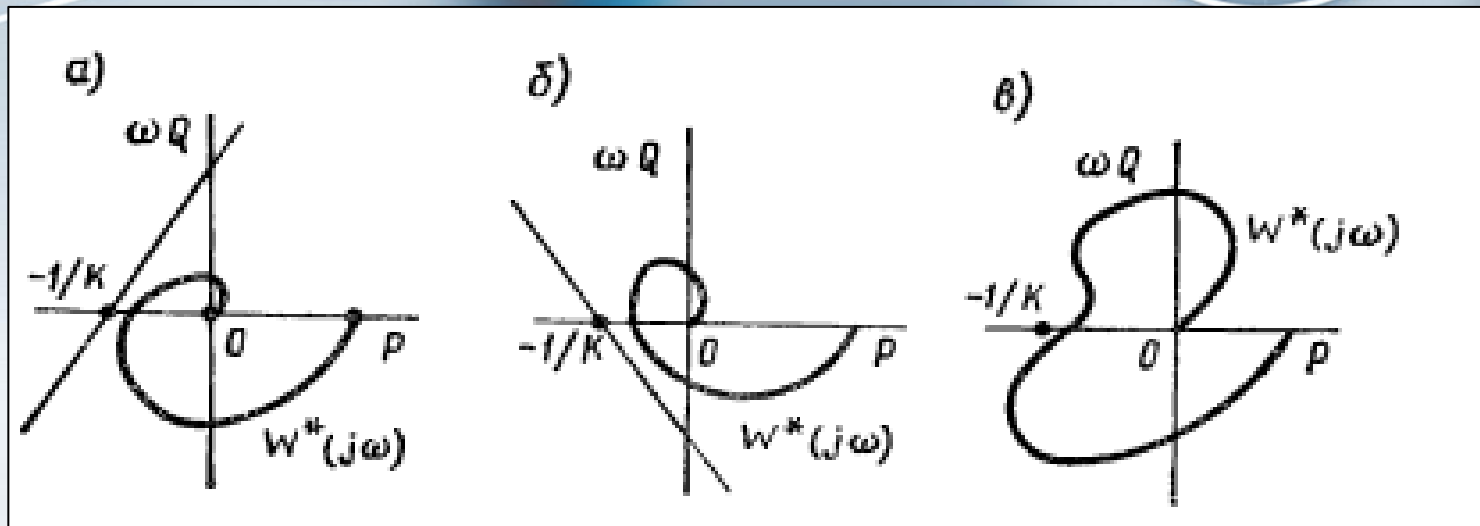
$$\operatorname{Re} \left[(1 + iqw) (\operatorname{Re}_{лч} (w) + i \operatorname{Im}_{лч} (w)) \right] = \operatorname{Re} \left[\operatorname{Re}_{лч} + i \operatorname{Im}_{лч} + iqw \operatorname{Re}_{лч} - qw \operatorname{Im} \right]$$

$$\operatorname{Re}_{лч} (w) - qw \operatorname{Im}_{лч} (w) + \frac{1}{k} > 0$$

Выделили Re из полученного выражения. Получим:

$$\operatorname{Re}_{лч} (w) + qw \operatorname{Im}_{лч} (w) + \frac{1}{k} = 0$$

$$\operatorname{Re}_{лч} (w) - qw \operatorname{Im}_{лч} (w) = -\frac{1}{k}$$



Геометрическая интерпретация критерия абсолютной устойчивости: Нелинейная система будет являться абсолютно устойчивой, если найдется такая прямая, проходящая через точку $(-\frac{1}{k}; 0)$ при которой АФЧХ преобразованной линейной части будет находится правее этой прямой. На рисунке *в* система не является абсолютно устойчивой, в то время как на рисунках *а* и *б* системы абсолютно устойчивы.

Системы с дополнительными информационными каналами.

Статика – в установившихся. Динамика – в переходной.

Динамическая точность системы регулирования зависит не только от совершенства регулятора, но и от того насколько ценным является поступающая на регулятор информация о возмущающих воздействиях.

Предельная динамическая точность – такая динамическая точность, которая может быть достигнута при применении наилучшего из физически осуществленных регуляторов.

Повысить предельную динамическую точность можно только за счет предоставления более ценной информации (своевременной).

Пути представления надежной информации:

- 1) Подача на вход регулятора в качестве задания упреждающего (заранее) воздействия по отношению к возмущению.
- 2) Возможен тогда, когда в составе объекта управления можно найти такую вспомогательную регулирования величину, которая реагирует на возмущения с меньшим запаздыванием, чем основная регулирующая величина.

И возмущения могут служить в качестве такой величины, если они поддаются контролю. Системы с дополнительными информационными каналами, в качестве примера – система регулирования перегретого пара на выходе из котельного агрегата.