ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления и защит. Часть 1

Лекция 3

Элементарные звенья (пропорциональное, интегральное, дифференциальное, апериодическое, реальное дифференцирующее, запаздывания, колебательное). Соединения звеньев

Томск - 2019

Элементарные звенья

Рассматривая характеристики звеньев, независимо от их функционального назначения, физического принципа действия, мощности и скорости передаваемых сигналов, в ТАУ выделяют ***ряд типовых звеньев***, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями ***не выше второго порядка***.

Введение типовых звеньев удобно для представления сложного звена ***параллельным, последовательным или встречно-параллельным*** соединением ***типовых звеньев***.

Передаточная функция всех типовых звеньев представляет собой отношение:

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)}$$

Элементарные звенья

Пропорциональное звено

1. Уравнение звена: $$y(t) = kx(t)$$

где k – коэффициент передачи звена.

Примерами такого звена являются: усилитель постоянного тока, рычажный механизм, редукторная передача.

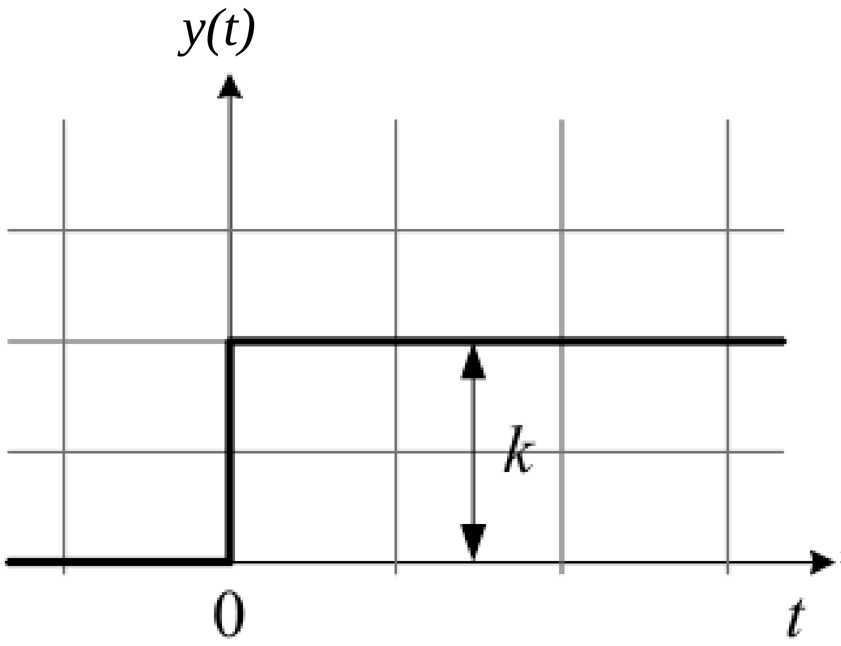
Пропорциональные звенья называются безынерционными.

2. Передаточная функция звена:

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} = k$$

3. Переходная характеристика:

$$y(t) = k1(t)$$



Элементарные звенья

4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

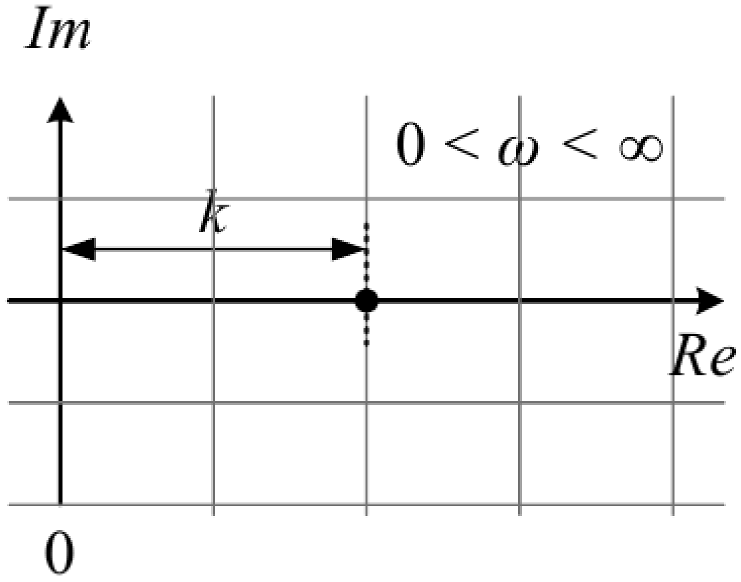
$$W(i\omega) = k$$

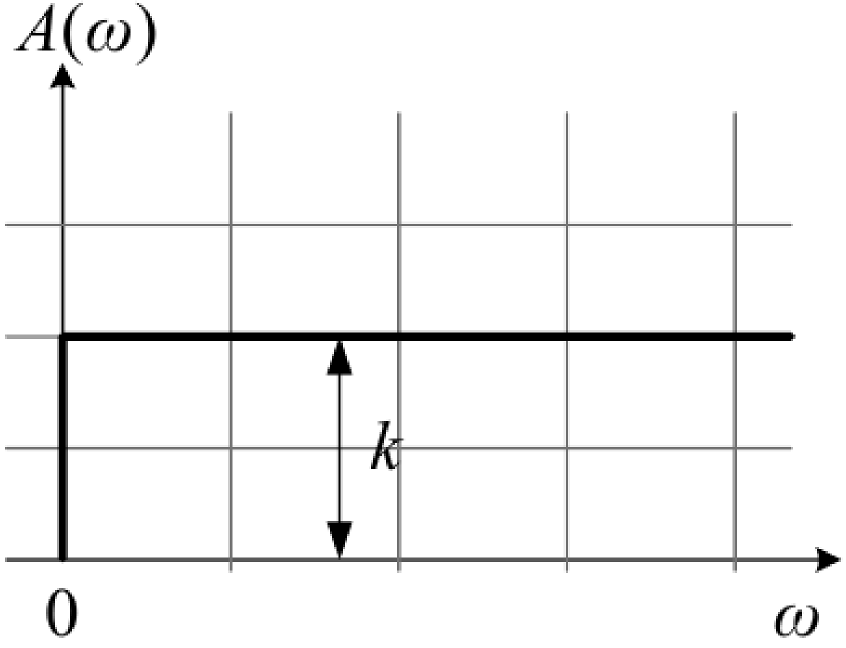
5. Амплитудно-частотная характеристика:

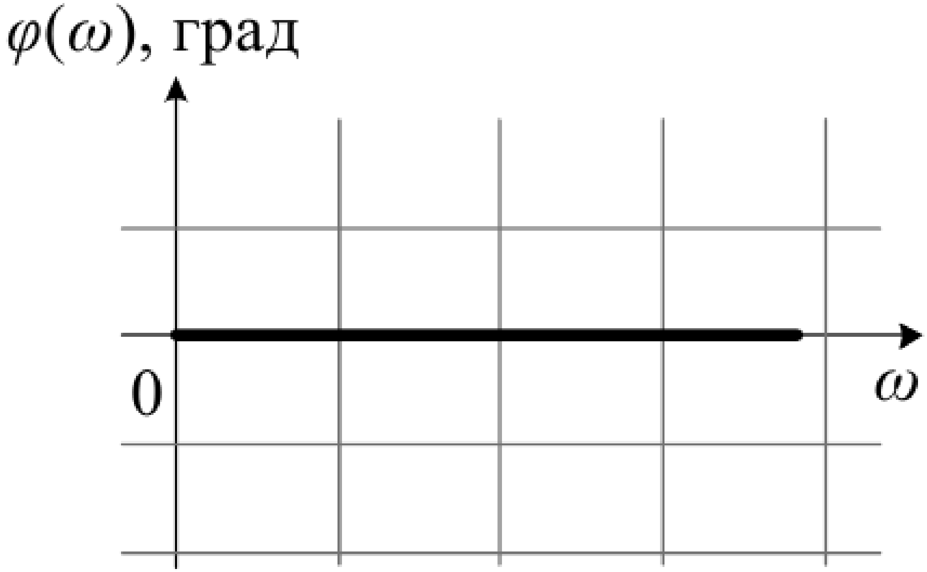
$$A(\omega) = |W(i\omega)| = k$$

6. Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = 0$$







Элементарные звенья

Интегрирующее звено

1. Уравнение звена:

$$y(t) = k_и \int_0^t x(t)dt + y_0;$$

$$y(t) = \frac{1}{T_и} \int_0^t x(t)dt + y_0;$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = k_и x(t)$$

Примеры реальных элементов: вращающийся вал; гидравлический резервуар; гидравлический усилитель и т. д.

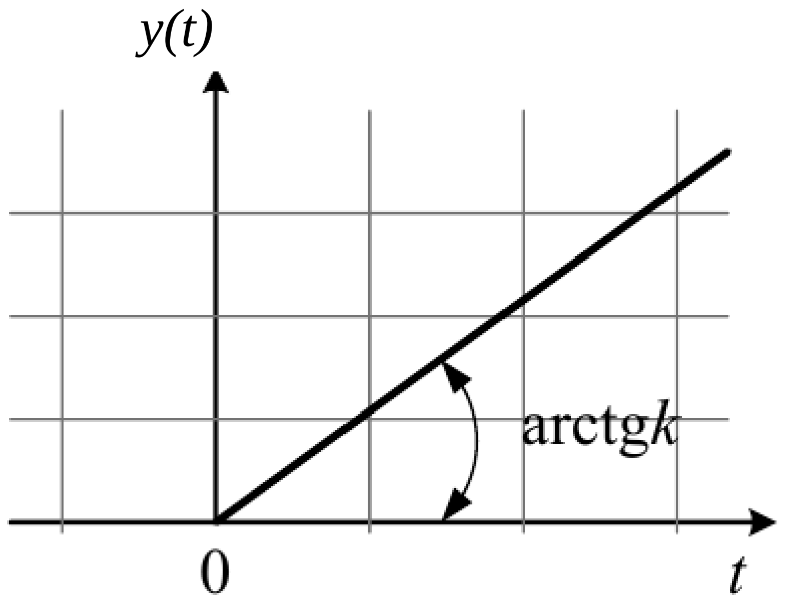
2. Передаточная функция звена:

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{k_и}{P}$$

Элементарные звенья

3. Переходная характеристика:

$$y(t) = k\int_0^t 1(t)dt = kt$$



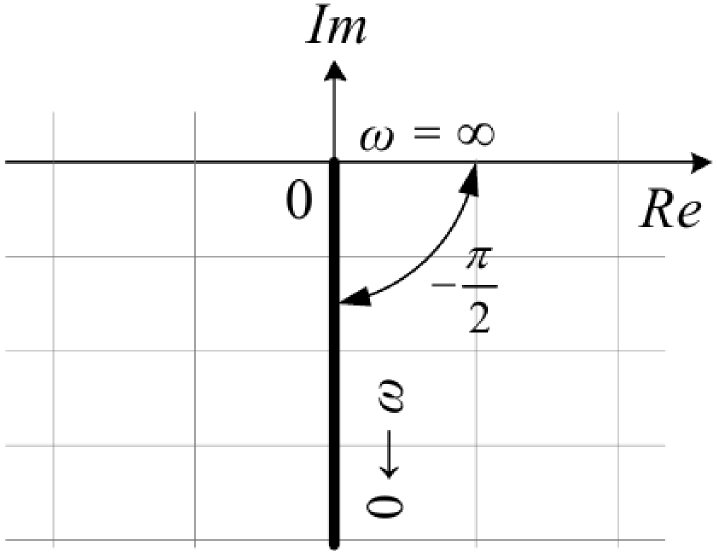
4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = \frac{k}{i\omega} = -i\frac{k}{\omega}$$

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = \frac{k}{\omega}e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$W(i\omega) = \mathrm{Re}(i\omega) + i\,\mathrm{Im}(i\omega)$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = 0;\;\; \mathrm{Im}(\omega) = -\frac{k}{\omega}$$



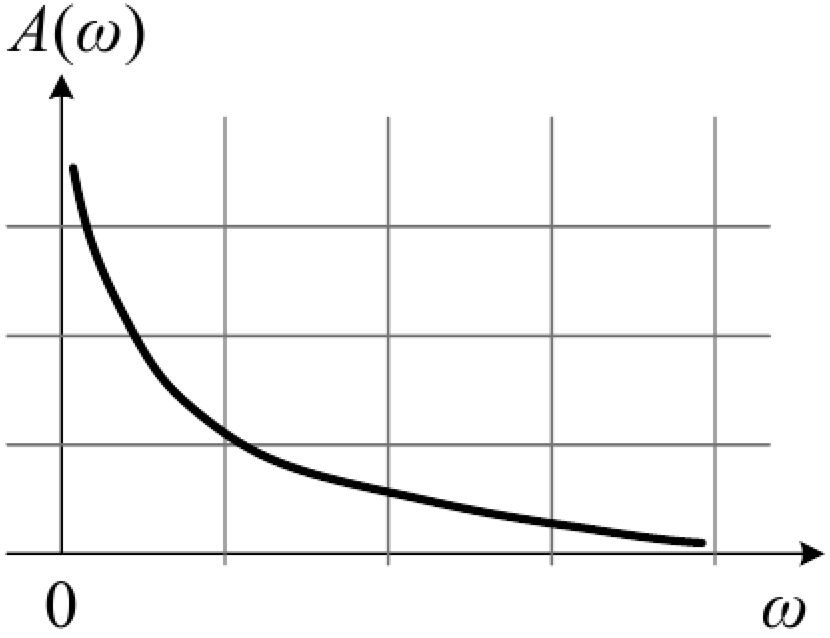
Элементарные звенья

5. Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = \left|W(i\omega)\right| = \left|\mathrm{Im}(i\omega)\right| = \frac{k}{\omega}$$

6. Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = arctg(-\infty) = -90^{\circ} = const$$



Элементарные звенья

Дифференцирующее звено

1. Уравнение звена:

$$y(t) = k\frac{dx(t)}{dt}$$

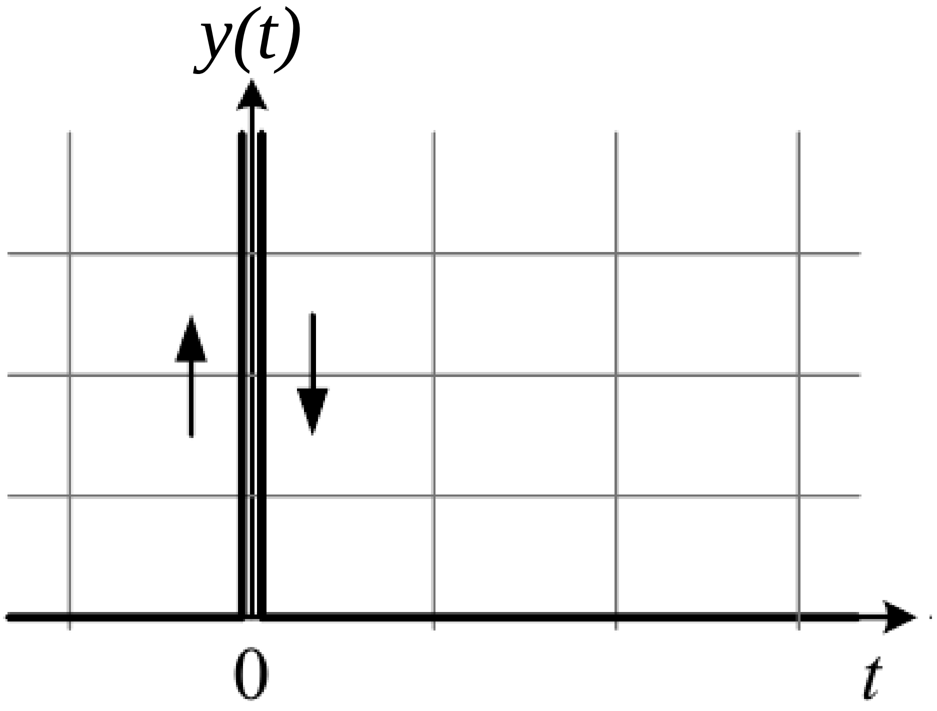
Примером таких звеньев может служить: электрический тахометр

2. Передаточная функция звена:

$$W(P) = kP$$

3. Переходная характеристика:

$$y(t) = k\frac{d\left[1(t)\right]}{dt} = k\delta(t)$$

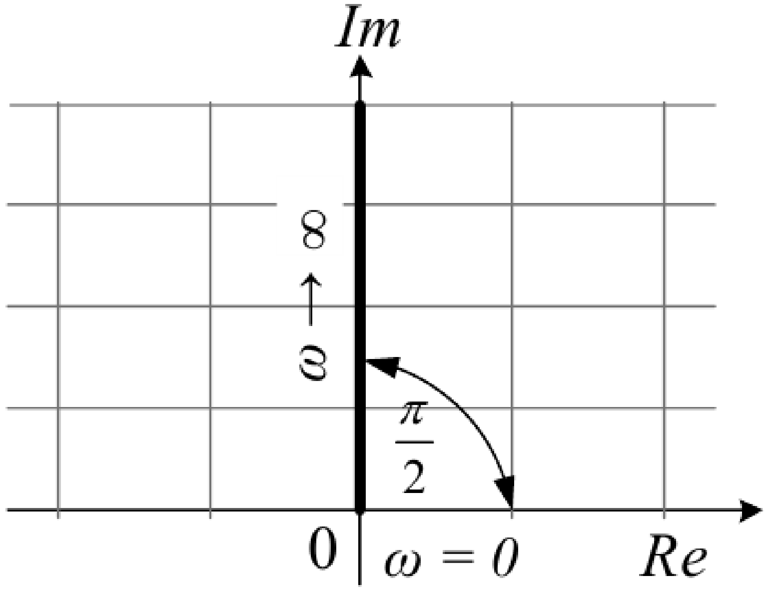


Элементарные звенья

4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = ik\omega$$

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)} = k\omega e^{i\frac{\pi}{2}}$$

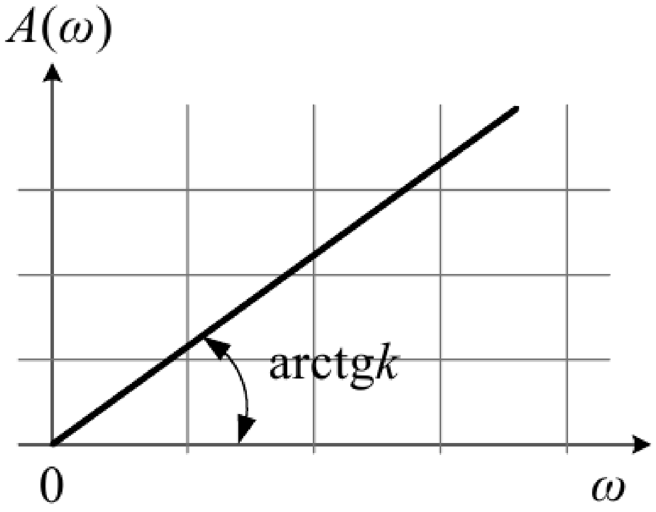


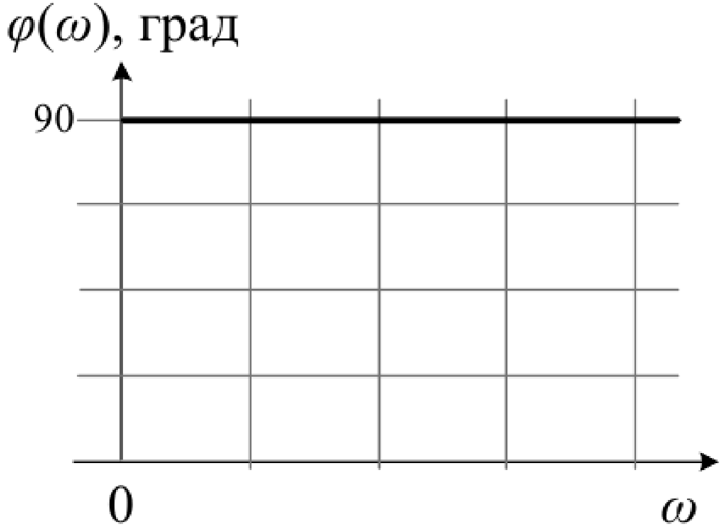
5. Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = \left|W(i\omega)\right| = k\omega$$

6. Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = arctg\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = arctg(\infty) = 90^{\circ} = const$$





Элементарные звенья

Звено запаздывания

1. Уравнение звена:

$$y(t) = x(t - \tau)$$

Примерами таких звеньев могут служить: технологические конвейерные установки, системы магнитной записи и воспроизведения.

Выходная величина звена воспроизводит входной сигнал с отставанием во времени на величину запаздывания *τ*.

2. Передаточная функция звена:

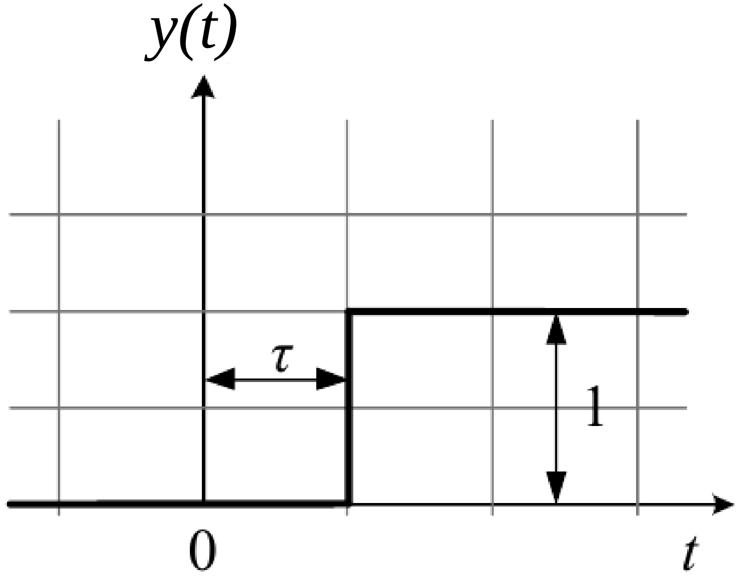
$$W(P) = ke^{-P\tau}$$

Если коэффициент звена запаздывания равен единице (k=1), то такое звено получило название – ***звено чистого запаздывания***.

Элементарные звенья

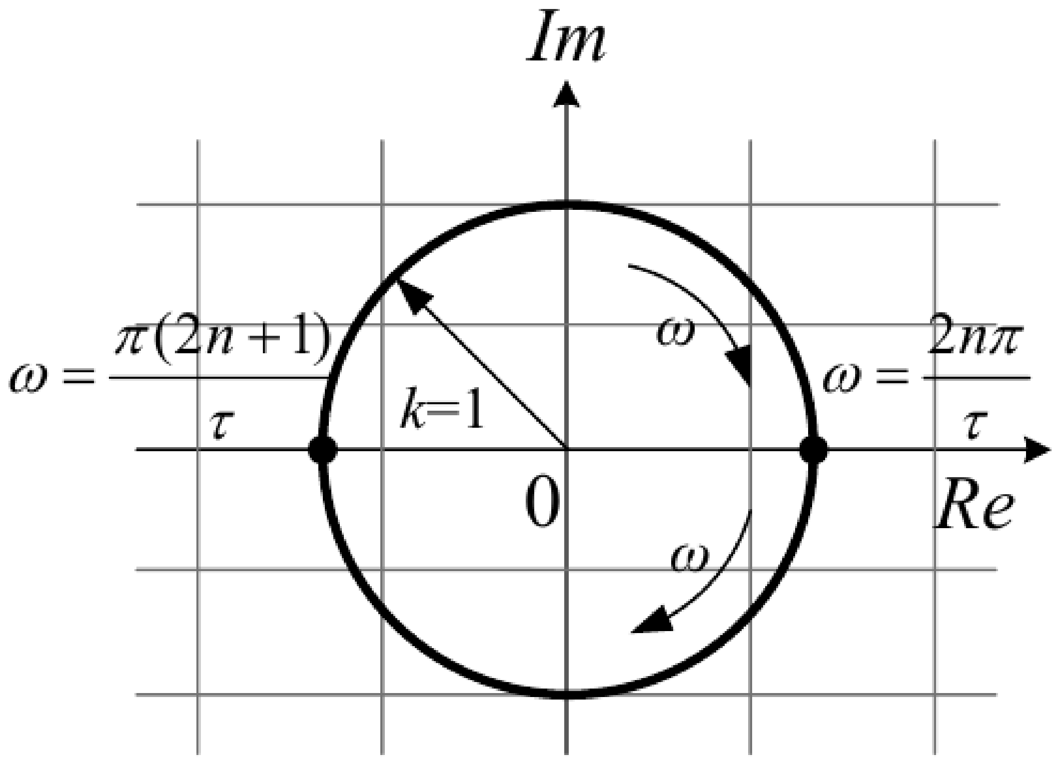
3. Переходная характеристика:

$$y(t) = 1(t-\tau)$$



4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = e^{-i\tau\omega} = \cos\omega\tau - i\sin\omega\tau$$



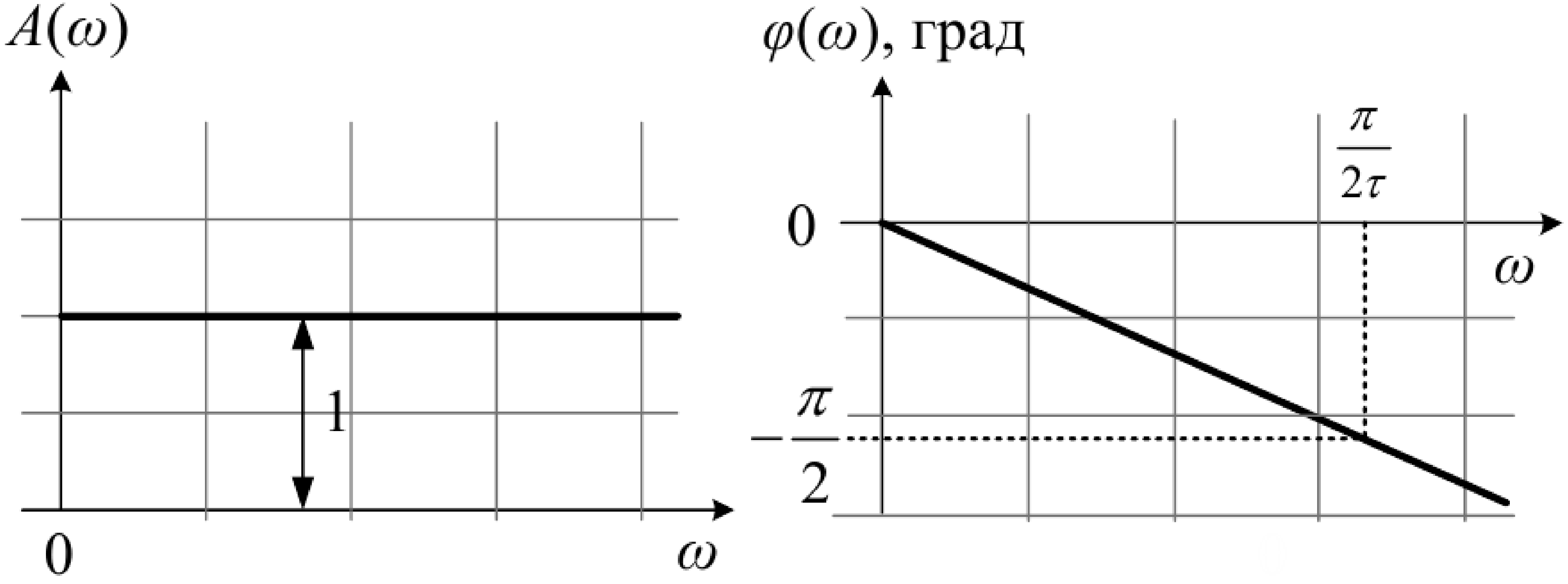
Элементарные звенья

5. Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = |W(i\omega)| = 1$$

6. Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = -\omega\tau$$



Элементарные звенья

Апериодическое звено

Одним из самых распространенных звеньев САУ является апериодическое звено 1-го порядка.

При линеаризации уравнений и соответствующем упрощении математического описания примерами инерционных звеньев могут служить многие объекты: генераторы, двигатели, исполнительные механизмы, термопары и т. д.

1. Уравнение звена:

$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=kx(t)$$

где T – постоянная времени; k – коэффициент передачи звена.

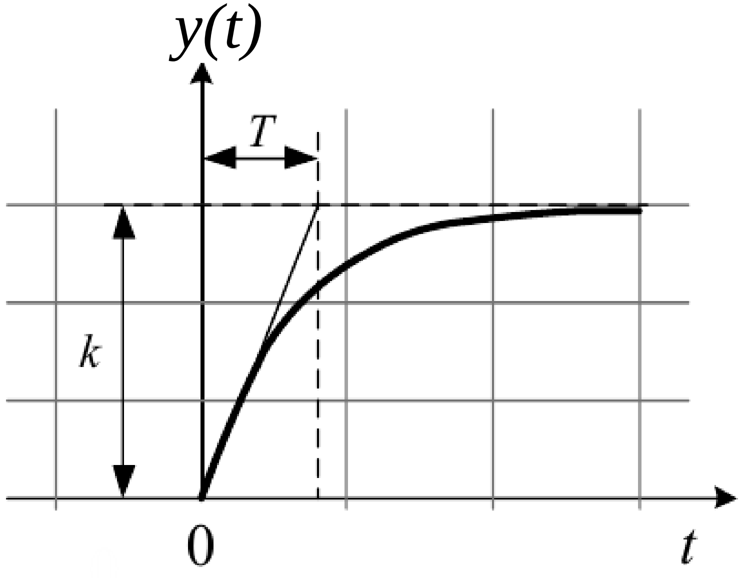
2. Передаточная функция звена:

$$W(P)=\frac{Y(P)}{X(P)}=\frac{k}{TP+1}$$

Элементарные звенья

3. Переходная характеристика:

$$y(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})1(t)$$

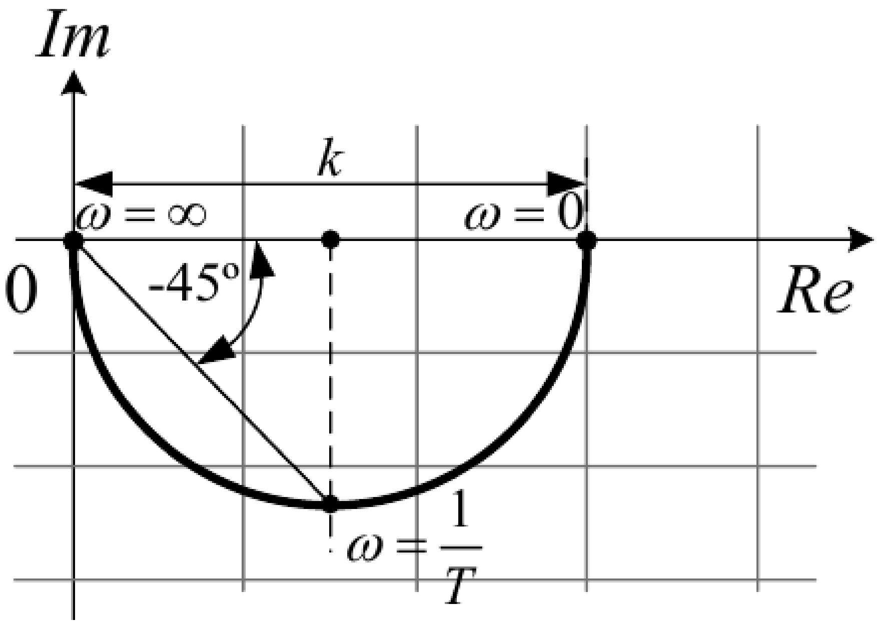


4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = \frac{k}{1 + iT\omega}$$

$$W(i\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega)$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = \frac{k}{1 + T^2\omega^2}; \quad \mathrm{Im}(\omega) = -\frac{kT\omega}{1 + T^2\omega^2}$$



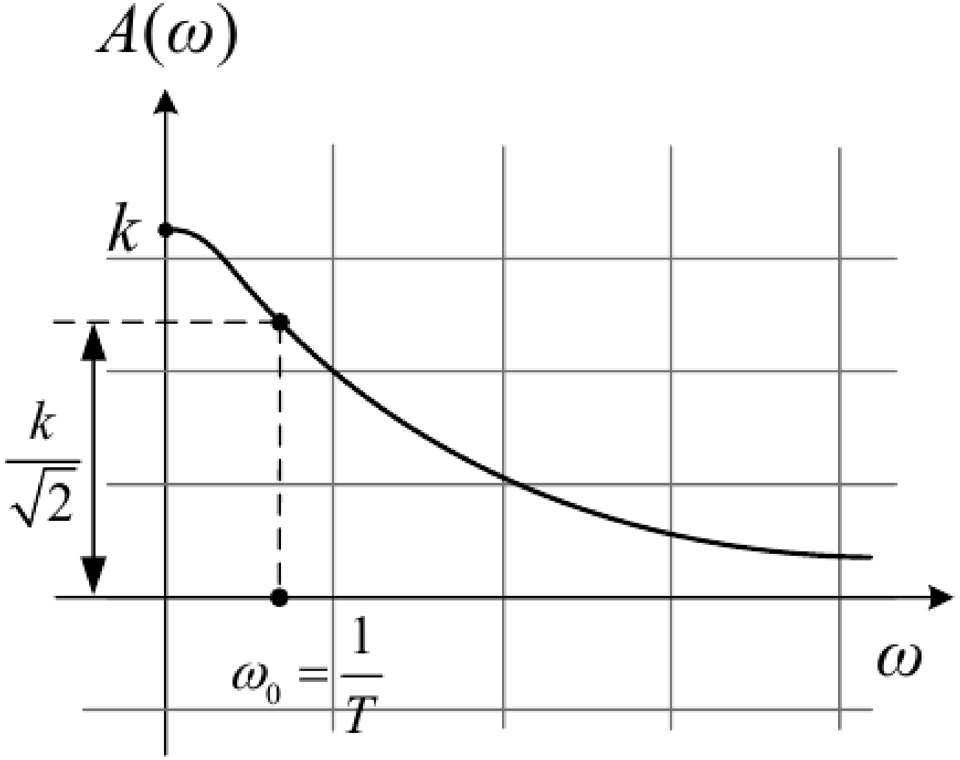
Элементарные звенья

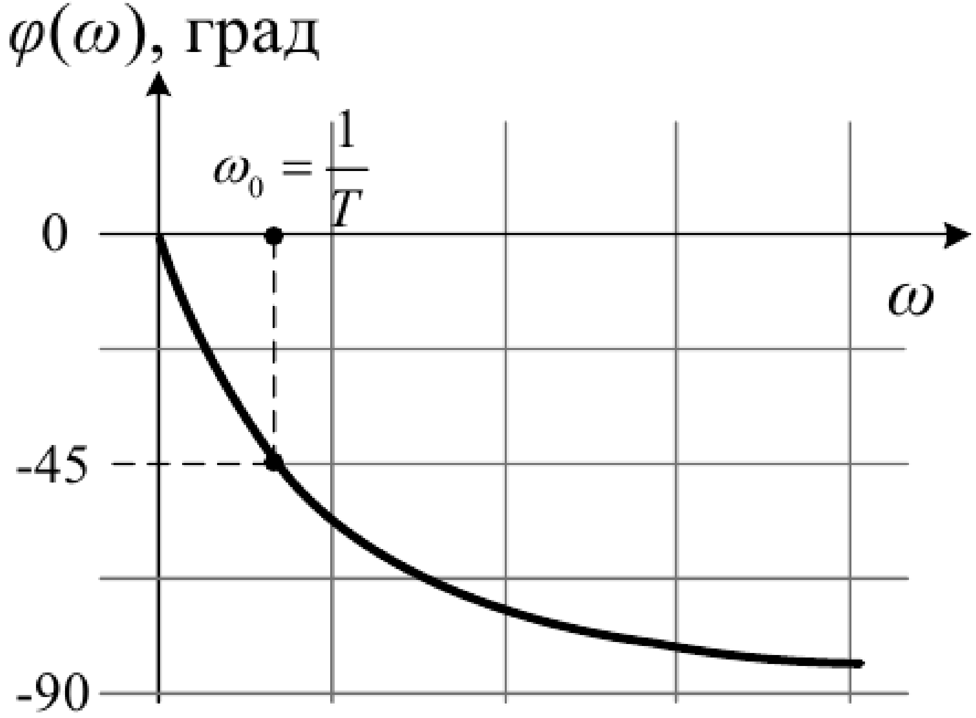
5. Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)} = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

6. Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)} = arctg(-\omega T) = -arctg(\omega T)$$





Элементарные звенья

Реальное дифференцирующее звено

1. Уравнение звена:

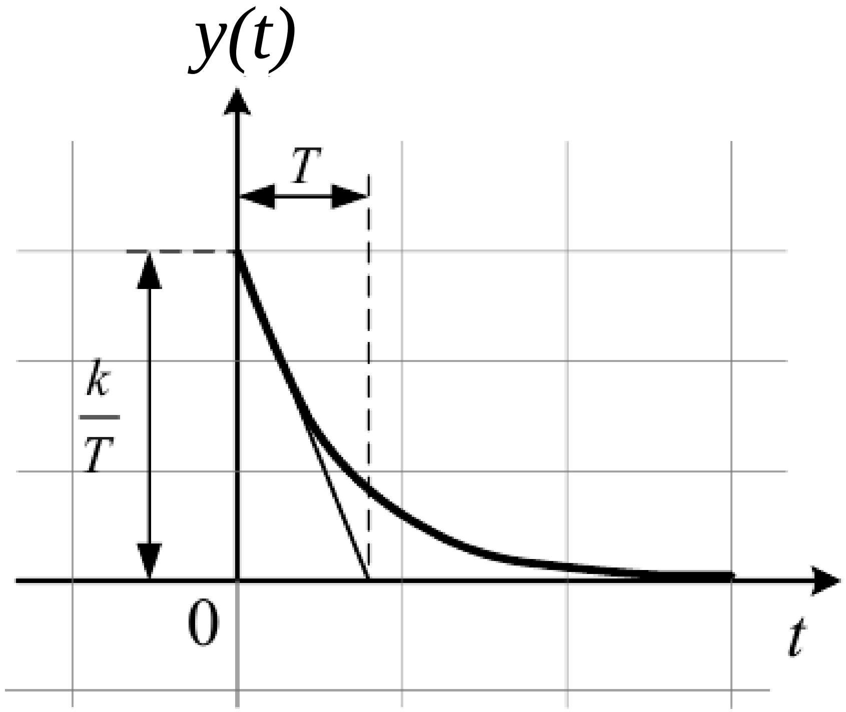
$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=k\frac{dx(t)}{dt}$$

2. Передаточная функция звена:

$$W(P)=\frac{kT_{Д}P}{T_{Д}P+1}$$

3. Переходная характеристика:

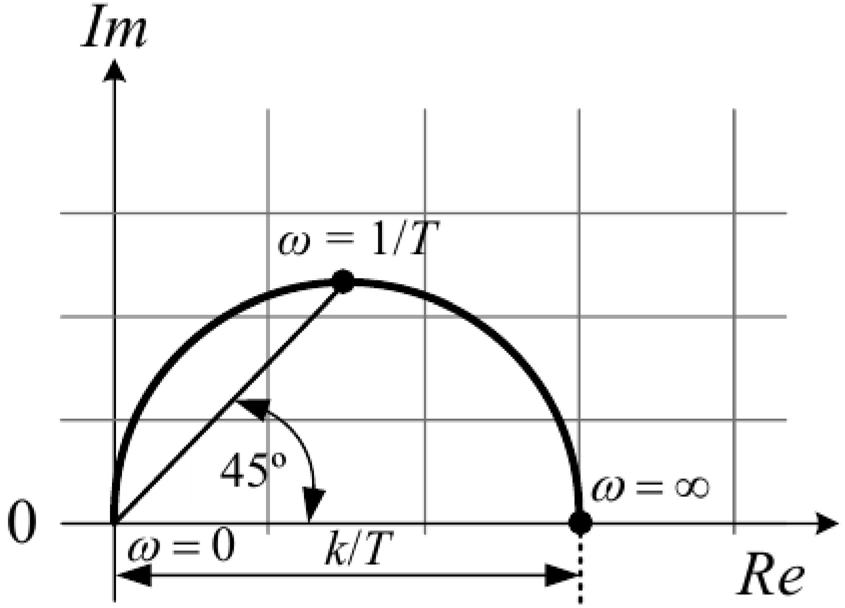
$$y(t)=\frac{k}{T}\delta(t)-\frac{k}{T^2}e^{-\frac{t}{T}}1(t)$$



Элементарные звенья

4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = \frac{ik\omega}{1 + iT\omega}$$

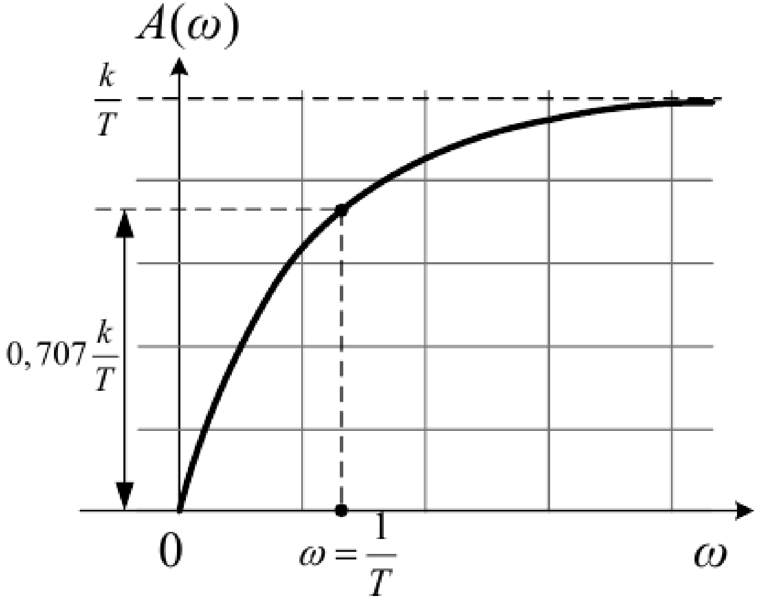


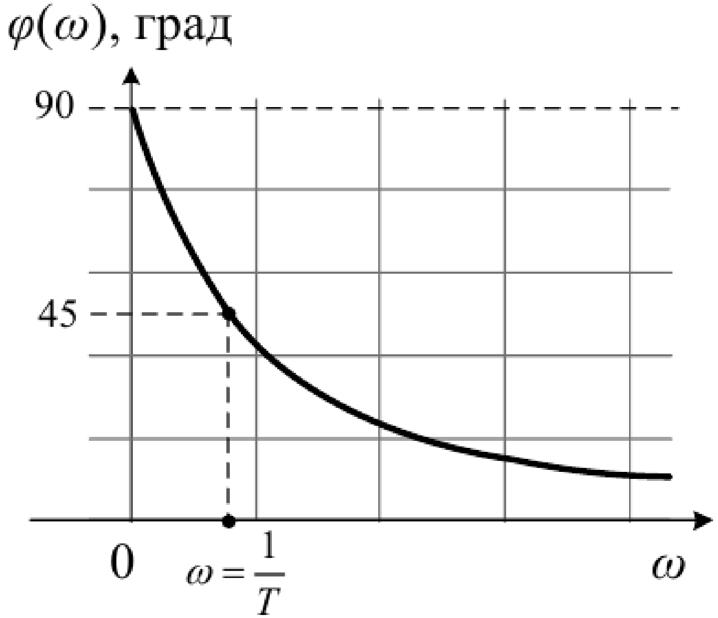
5. Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega) = \left|W(i\omega)\right| = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + (T\omega)^2}}$$

6. Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - arctg(T\omega)$$





Элементарные звенья

Звенья второго порядка

Уравнения динамики звена второго порядка имеют вид:

$$(T_2^2P^2 + T_1P + 1)y(t) = kx(t);$$

$$(T_2^2P^2 + 2\xi TP + 1)y(t) = kx(t)$$

Передаточные функции звеньев второго порядка:

$$W(P) = \frac{k}{(T_2^2P^2 + T_1P + 1)};$$

$$W(P) = \frac{k}{(T_2^2P^2 + 2\xi TP + 1)}.$$

где $T = T_2; \;\; \xi = \dfrac{T_1}{2T_2}$

Коэффициент ξ называют коэффициентом демпфирования.

Элементарные звенья

В зависимости от вида корней характеристических уравнений

$$T_2^2\lambda^2 + T_1\lambda + 1 = 0 \text{ или } T_2^2\lambda^2 + 2\xi T\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-T_1 \pm \sqrt{T_1^2 - 4T_2^2}}{2T_2^2}; \quad \lambda_{1,2} = \frac{-2T \pm \sqrt{4\xi T^2 - 4T^2}}{2T^2}$$

Различают 3 типа звеньев:

1. Апериодическое звено 2-го порядка $[T_1 \geq 2T_2;\ (\xi > 1)]$ – корни различные вещественные отрицательные (либо 2 кратных отрицательных корня).

2. Колебательное звено $[T_1 < 2T_2;\ (\xi < 1)]$ – корни комплексно-сопряженные с отрицательной вещественной частью.

3. Консервативное звено $[T_1 = 0;\ (\xi = 0)]$ – $\lambda_{1,2} = 0 \pm i\frac{1}{T_2}$ два комплексно-сопряженных корня с нулевой вещественной частью.

Элементарные звенья

Апериодическое звено

Примерами колебательного звена могут служить: упругая механическая система с существенным влиянием массы, электрический колебательный контур и т. д.

1. Уравнение звена:

$$(T_2^2 P^2 + 2\xi TP + 1)y(t) = kx(t)$$

где ξ – параметр затухания, лежащий в пределах $0<\xi<1$

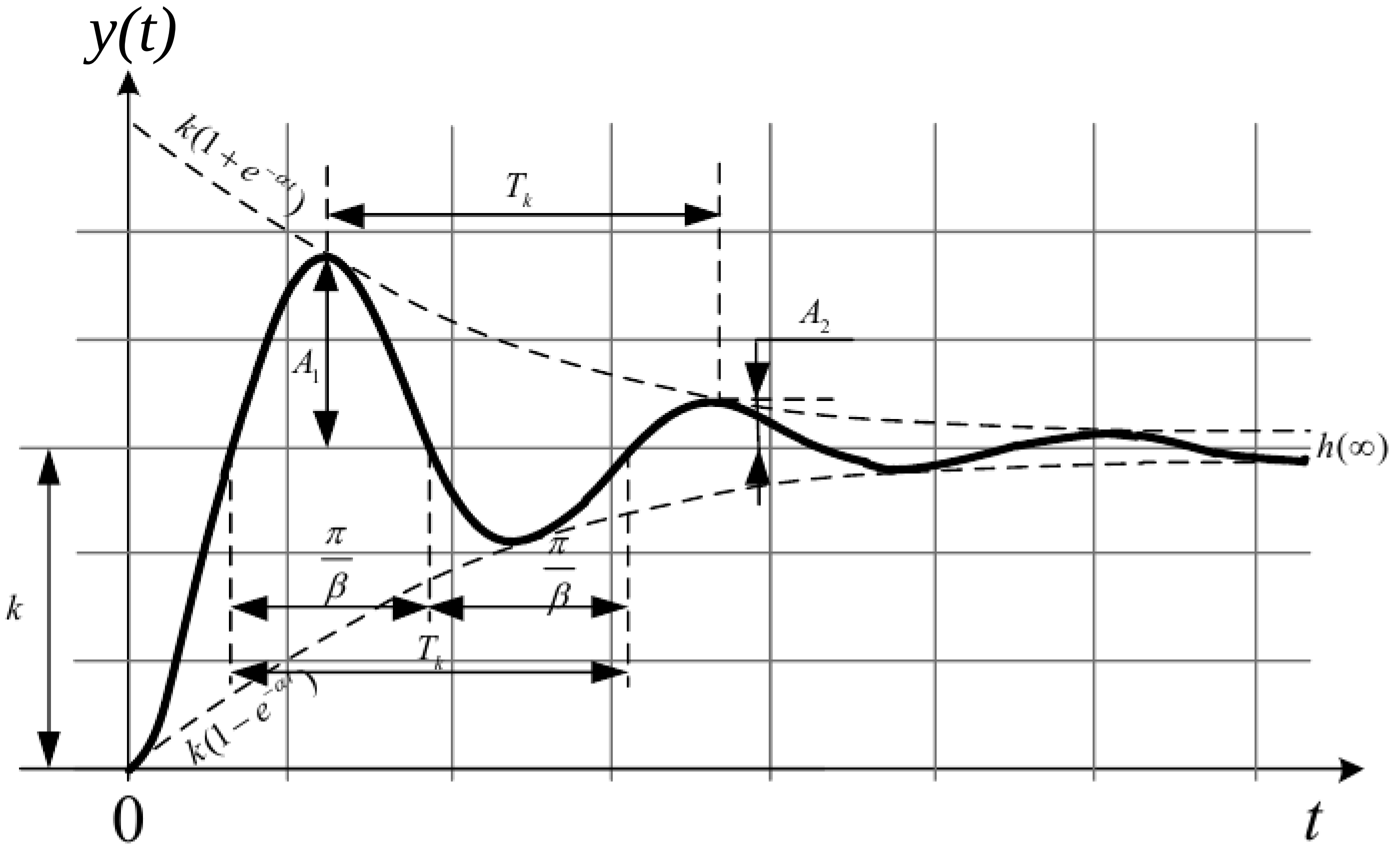
2. Передаточная функция звена:

$$W(P) = \frac{k}{(T_2^2 P^2 + 2\xi TP + 1)}.$$

Элементарные звенья

3. Переходная характеристика:

$$y(t) = k\left[1 - e^{-\alpha t}\left(\cos\beta t + \frac{\alpha}{\beta}\sin\beta t\right)\right]1(t)$$



Элементарные звенья

По графику экспериментальной $y(t)$ определяются k, A_1, A_2 и $T_к$ и вычисляют все параметры звена:

$$\beta = \omega_1 = \frac{2\pi}{T}; \ \ \alpha T_k = \ln\frac{A_1}{A_2}; \ \ \omega_0 = \sqrt{\beta^2 + \alpha^2} = \frac{1}{T}; \ \ \xi = \alpha T$$

где $T_к$ – период колебаний; A_1 и A_2 – амплитуды двух соседних колебаний относительно установившегося значения.

Оценку колебательности временной характеристики колебательного звена обычно производят по величине её степени затухания, которая равна отношению разности двух соседних амплитуд колебаний, направленных в одну сторону, к первой из них.

$$\psi = \frac{A_1 - A_2}{A_1} = 1 - \frac{A_2}{A_1}$$

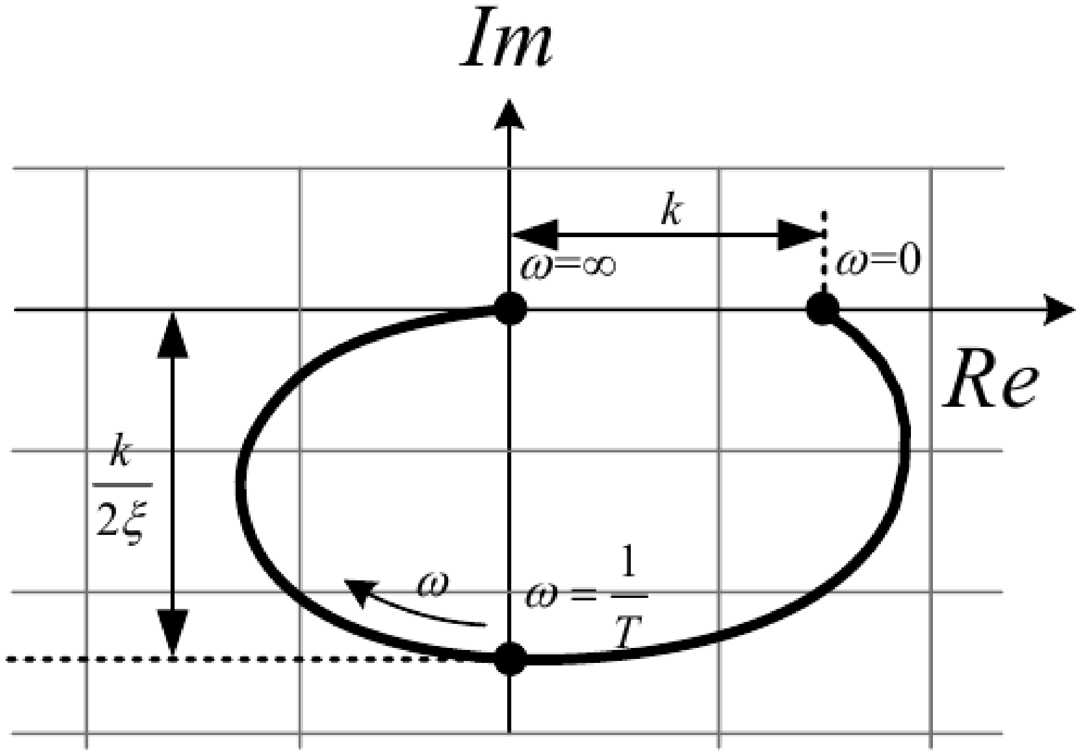
Элементарные звенья

4. Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(i\omega) = \frac{k}{(1-T^2\omega^2)+i2\xi T\omega};$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = \frac{-k(1-T^2\omega^2)}{1+2T^2\omega^2(2\xi^2-1)+T^4\omega^4};$$

$$\mathrm{Im}(\omega) = \frac{-2k\xi T\omega}{1+2T^2\omega^2(2\xi^2-1)+T^4\omega^4}$$



С уменьшением ξ петля, очерченная годографом, увеличивается и при ξ=0 характеристика вырождается в две полупрямые

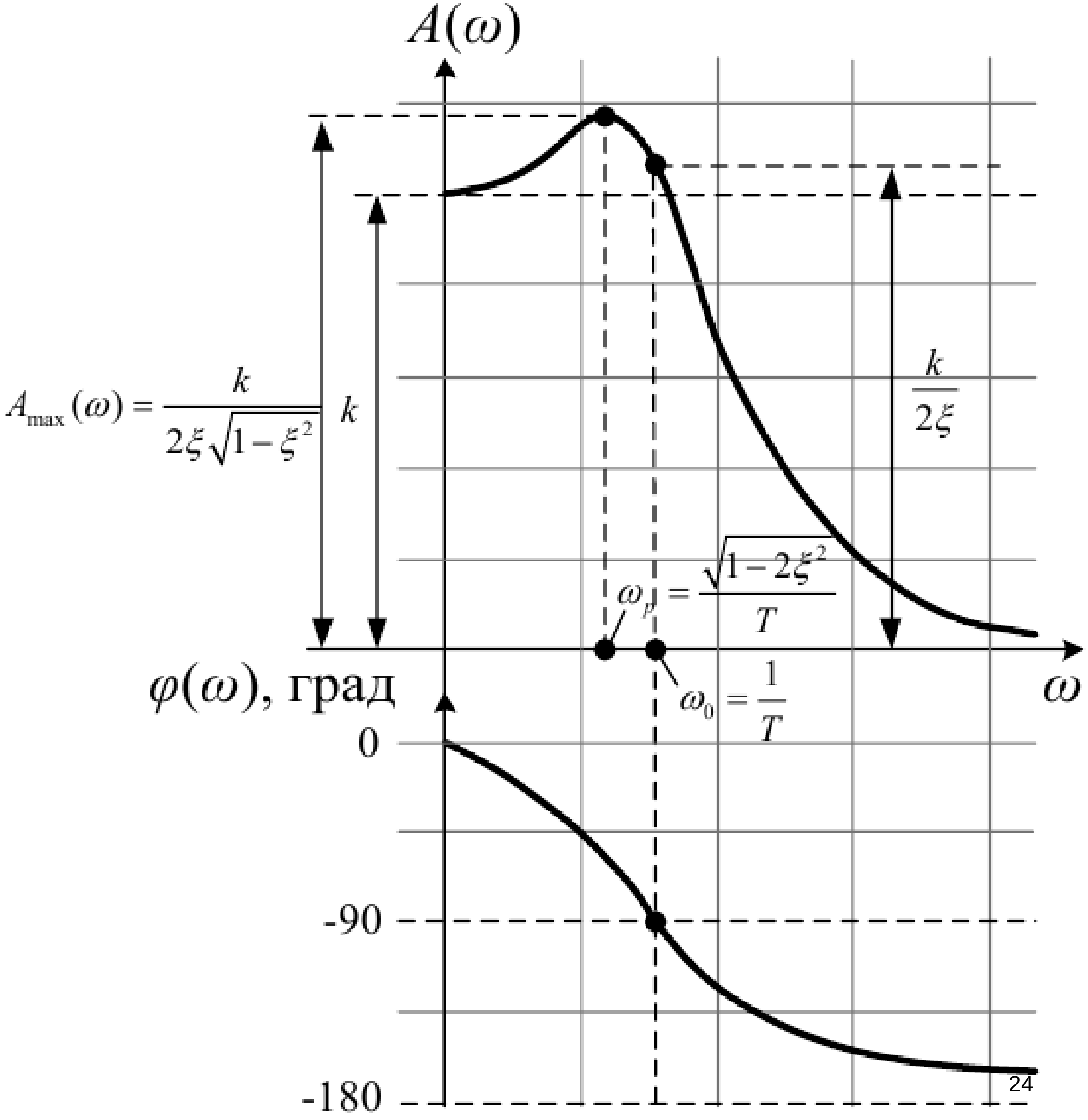
Элементарные звенья

5. Амплитудно-частотная характеристика:

$$A(\omega)=\left|W(i\omega)\right|=\frac{k}{\sqrt{4\xi^2T^2\omega^2+(1-T^2\omega^2)^2}}$$

6. Фазочастотная характеристика:

$$\varphi(\omega)=-arctg\left[\frac{2\xi T\omega}{1-T^2\omega^2}\right]$$



Структурная схема

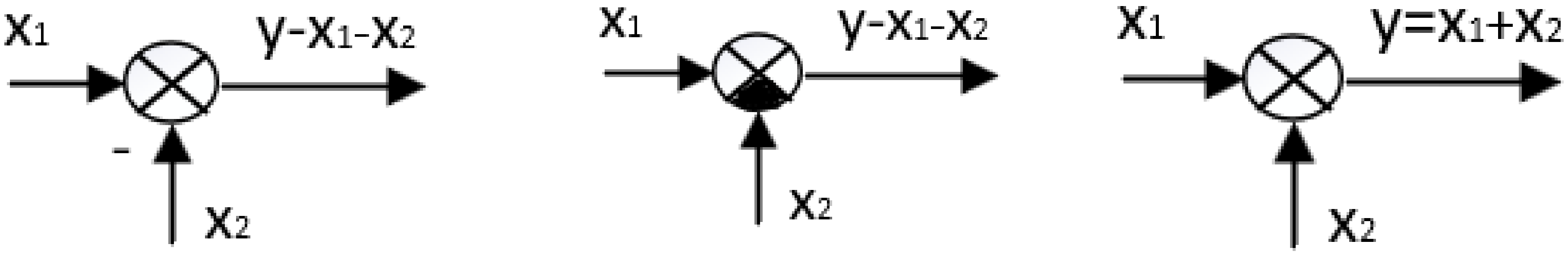
Структурной схемой в теории автоматического управления называют графическое изображение математической модели автоматической системы управления в виде соединений звеньев.

Звено на структурной схеме условно обозначают в виде прямоугольника с указанием входных и выходных величин, а также передаточной функцией внутри него.

Входные и выходные величины записывают в виде изображений, если передаточные функции задают в форме изображений. Если же передаточные функции задают в операторной форме или звенья описывают дифференциальными уравнениями, то входные и выходные переменные записывают в виде оригинала.

Структурная схема

Сравнивающие (Рис. 1,а,б) и суммирующие (Рис.1,в) звенья изображают в виде круга, разделенного на секторы. В сравнивающем звене сектор, на который подается «вычитаемое», затемняют (Рис. 1,б) или перед соответствующим входом ставят знак минус (рис.1,а).



а б в

Рисунок 1

Структурную схему широко используют на практике при исследовании и проектировании автоматических систем управления, так как она дает наглядное представление о связях между звеньями, о прохождении и преобразовании сигналов в системе.

Структурная схема

При математическом описании автоматическую систему обычно изображают в виде блок-схемы и для каждого «блока» (элемента) записывают уравнения, исходя из физических законов, которым подчиняются процессы в нем. Структурную схему можно составить на основании этой блок-схемы и полученных уравнений или только на основании последних. И дальнейшие преобразования, необходимые для получения уравнений и передаточных функций системы, проще и нагляднее производить по структурной схеме.

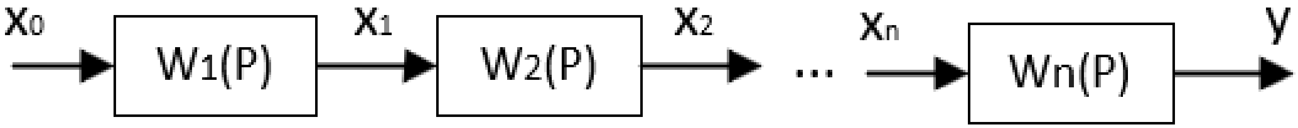
Звено на структурной схеме не обязательно изображает модель какого-либо отдельного элемента. Оно может быть моделью элемента, соединения элементов или вообще любой части системы.

Соединения звеньев:

- Последовательное
- Параллельное
- С обратной связью

Последовательное соединение звеньев

При последовательном соединении выходная величина каждого предшествующего звена является входным воздействием последующего звена.



Определим передаточную функцию соединения

$$W(P)=\frac{Y(P)}{X(P)}; \qquad W_n(P)=\frac{Y(P)}{X_{n-1}(P)};$$

$$Y(P)=W_n(P)\cdot X_{n-1}(P);$$

$$X_{n-1}(P)=W_{n-1}(P)\cdot X_{n-2}(P);$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$X_2(P)=W_2(P)\cdot X_1(P);$$

$$X_1(P)=W_1(P)\cdot X(P);$$

$$Y(P)=W_1(P)\cdot W_2(P)\dots W_n(P)\cdot X(P);$$

$$W(P)=W_1(P)\cdot W_2(P)\dots W_n(P);$$

$$P=i\omega$$

$$W(i\omega)=A_1(\omega)\cdot e^{i\varphi_1(\omega)}\cdot A_2(\omega)\cdot e^{i\varphi_2(\omega)}\dots A_n(\omega)\cdot e^{i\varphi_n(\omega)};$$

$$A(\omega)=A_1(\omega)\cdot A_2(\omega)\dots A_n(\omega);$$

$$\varphi(\omega)=\varphi_1(\omega)+\varphi_2(\omega)+\dots+\varphi_n(\omega).$$

Параллельное соединение звеньев

При параллельном соединении на вход всех звеньев подается один и тот же сигнал, а выходные величины складываются.

Определим передаточную функцию соединения

$$y = x_1 + x_2 + \ldots + x_n;$$

$$Y(P) = X_1(P) + X_2(P) + \ldots + X_n(P);$$

$$X_1(P) = W_1(P) \cdot X(P);$$

$$X_2(P) = W_2(P) \cdot X(P);$$

$$X_n(P) = W_n(P) \cdot X(P);$$

$$Y(P) = [W_1(P) + W_2(P) + \ldots + W_n(P)] \cdot X(P);$$

$$\boxed{W(P) = W_1(P) + W_2(P) + \ldots + W_n(P);}$$

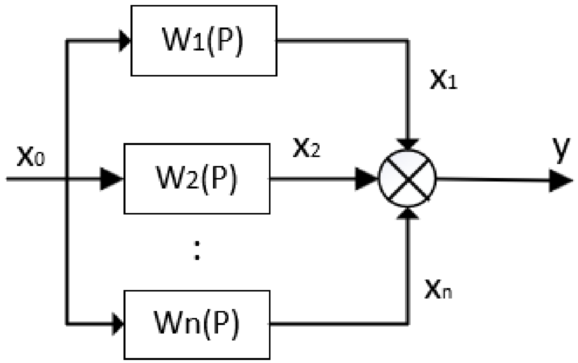
$$P = i\omega$$

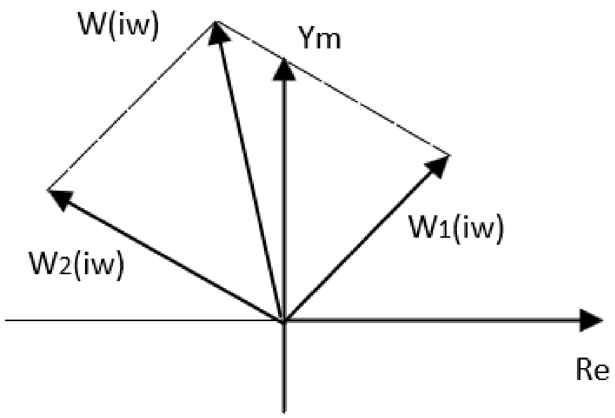
$$W(i\omega) = W_1(i\omega) + W_2(i\omega) + \ldots W_n(i\omega);$$

$$W(i\omega) = Re + i\Upsilon m = Re_1 + i\Upsilon m_1 + Re_2 + i\Upsilon m_2 + \ldots + Re_n + i\Upsilon m_n;$$

$$Re(\omega) = Re_1(\omega) + Re_2(\omega) + \ldots + Re_n(\omega);$$

$$\Upsilon m(\omega) = \Upsilon m_1(\omega) + \Upsilon m_2(\omega) + \ldots + \Upsilon m_n(\omega);$$

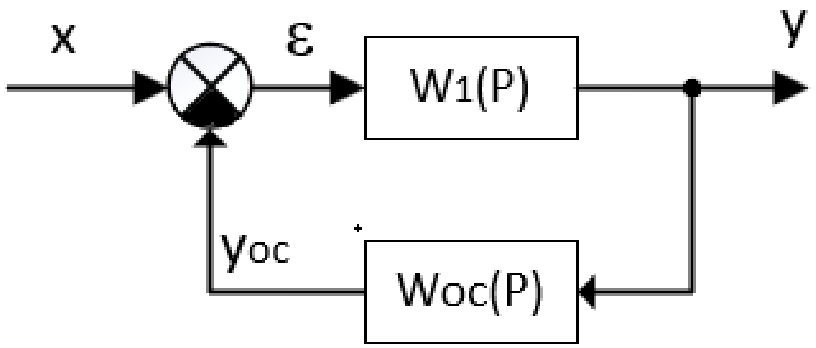




Встречно-параллельное соединение (соединение с обратной связью)

Принято считать, что ***звено охвачено обратной связью***, если его выходной сигнал через какое-либо другое звено подается на вход. При этом если сигнал y1 обратной связи вычитается из входного воздействия y0, т.е. ε1=y0-y1, то обратную связь называют ***отрицательной***. Если сигнал y1 обратной связи складывается с входным воздействием y0, т.е. ε1=y0+y1, то обратную связь называют ***положительной***.

Определим передаточную функцию соединения



ООС – отрицательная обратная связь

ПОС – положительная обратная связь

$$Y(P) = W_1(P)\cdot E(P);$$
$$E(P) = X(P) - Y_{oc}(P);$$
$$Y_{oc}(P) = W_{oc}(P)\cdot Y(P);$$
$$E(P) = X(P) - W_{oc}(P)\cdot Y(P);$$
$$Y(P) = W_1(P)\cdot X(P) - W_1(P)\cdot W_{oc}(P)\cdot Y(P);$$
$$Y(P)\cdot(1 + W_1(P)\cdot W_{oc}(P)) = W_1(P)\cdot X(P);$$

ООС

$$W(P) = \frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{W_1(P)}{1 + W_1(P)\cdot W_{oc}(P)}$$

Передаточная функция разомкнутой связи (р.с.)

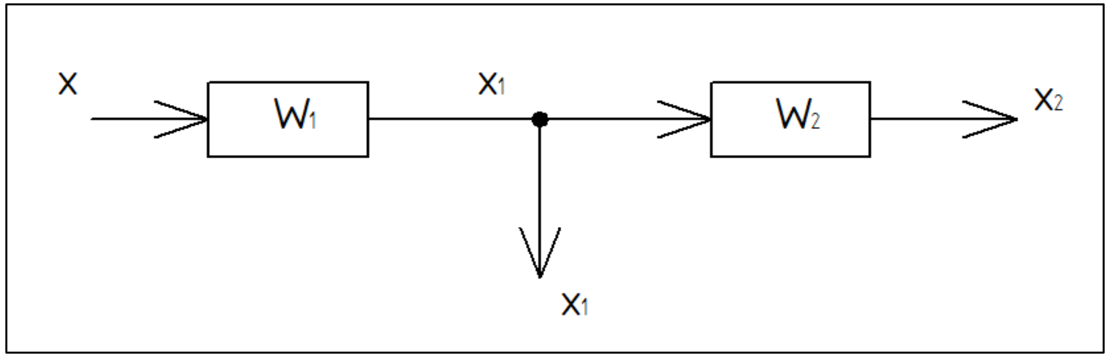
$$W_1(P)\cdot W_2(P) = W_{p.c.}(P)$$

ПОС

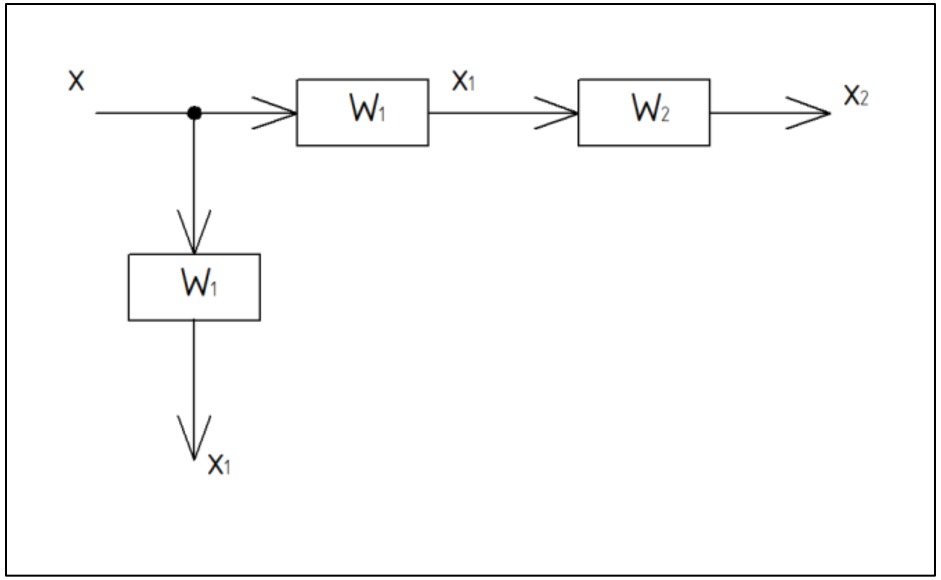
$$W(P) = \frac{W_1(P)}{1 - W_1(P)\cdot W_{oc}(P)}$$

Преобразование структурных схем

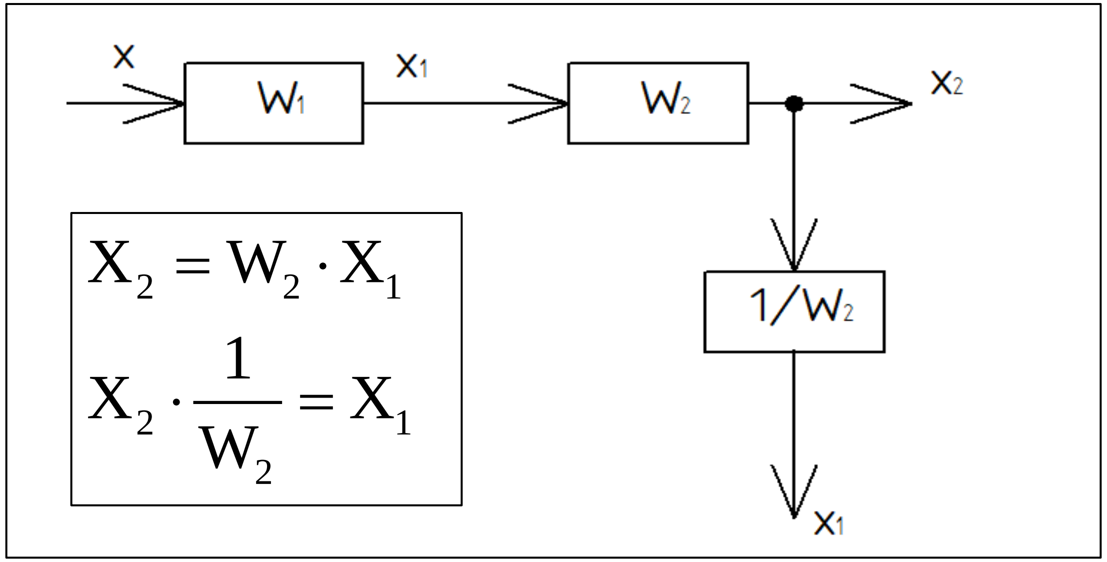
<u>Перенос узла ветвления</u>



Перенос узла ветвления на вход:



Перенос узла ветвления на выход:

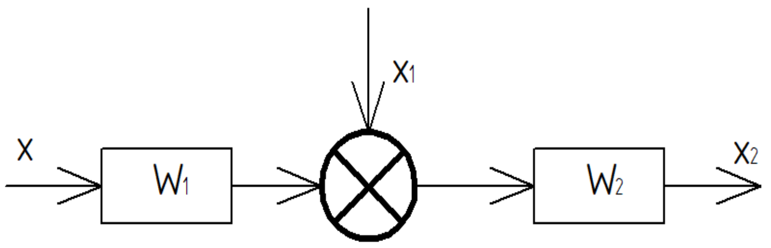


$$X_2 = W_2 \cdot X_1$$

$$X_2 \cdot \frac{1}{W_2} = X_1$$

Преобразование структурных схем

Перенос сумматора

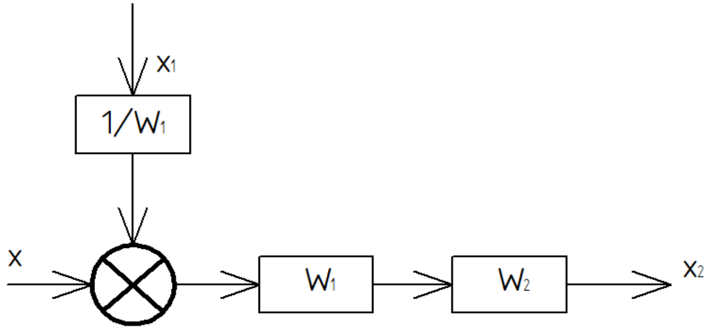


Для исходной схемы:

$$X_2 = W_2 \cdot W_1 \cdot X + W_2 \cdot X_1$$

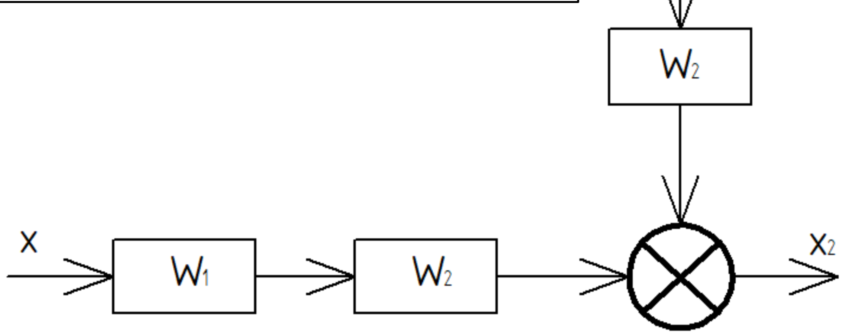
Перенос сумматора на вход:

$$X_2 = W_1 \cdot W_2 \cdot X + \frac{1}{W_1} \cdot W_1 \cdot W_2 \cdot X_1$$

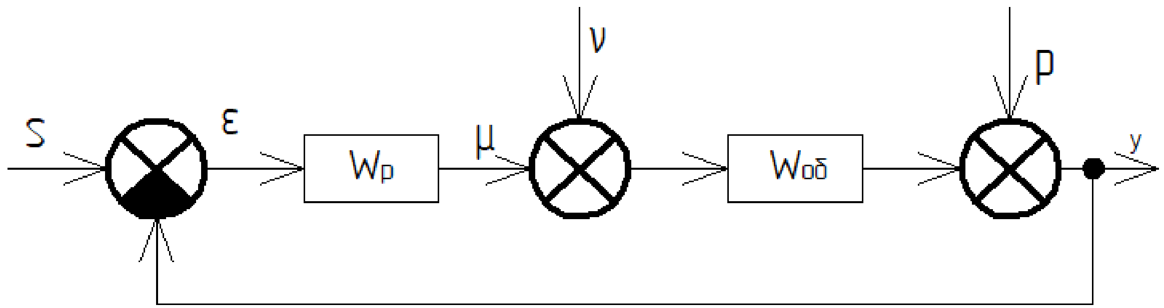


Перенос сумматора на выход:

$$X_2 = W_2 \cdot W_1 \cdot X + W_2 \cdot X_1$$



Преобразование структурных схем



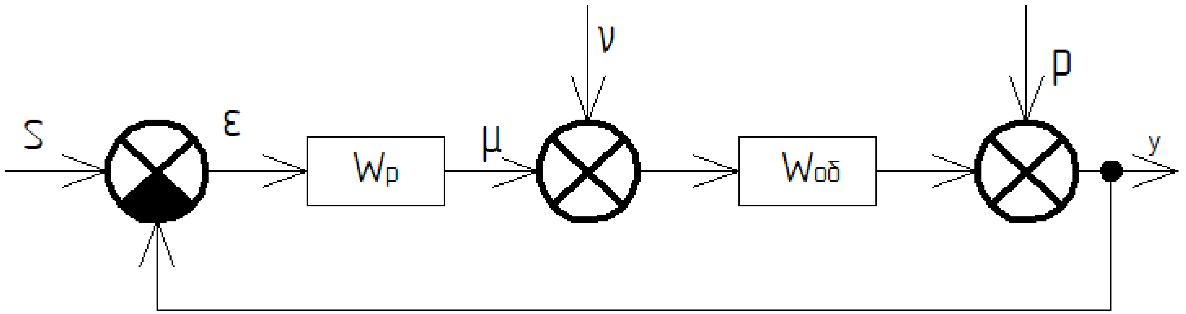
<u>Рассмотрим преобразование структурной схемы по каналам:</u>

<u>Wsy, Wνy, Wsε, Wνε.</u>

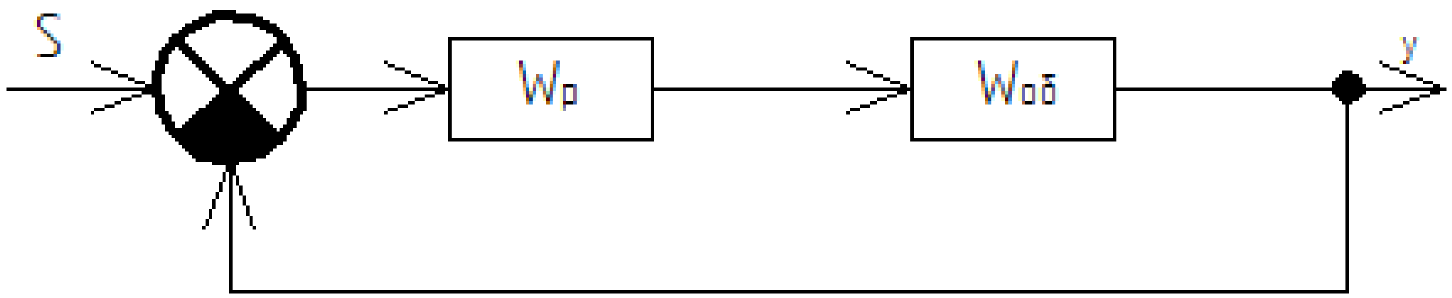
Если по какому-либо каналу идет функция, то все остальные воздействия полагаются равными нулю.

Преобразование структурных схем

Исходная схема



Рассмотрим преобразование структурной схемы по каналу: Wsy

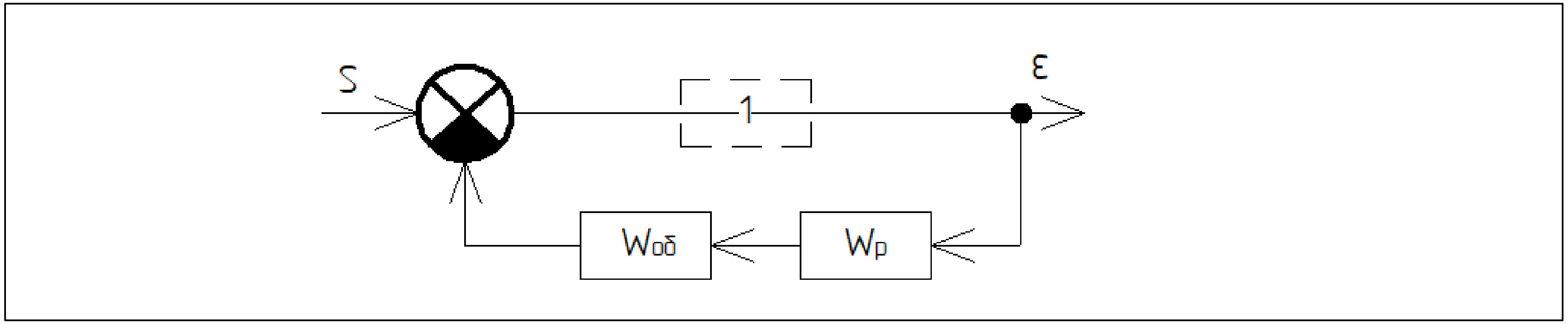


$$W_{Sy} = \frac{W_р \cdot W_{об}}{1 + W_р \cdot W_{об}}$$

Остальные воздействия исходной схемы равны 0

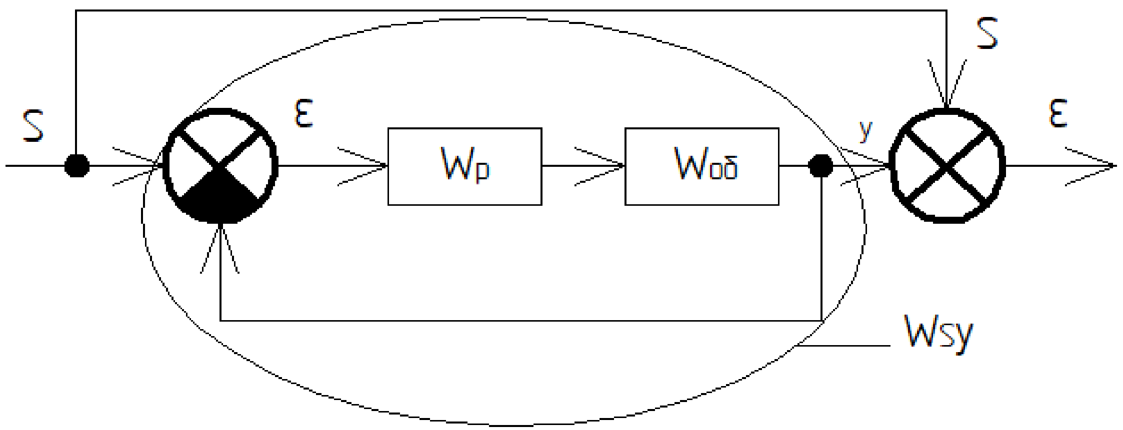
Преобразование структурных схем

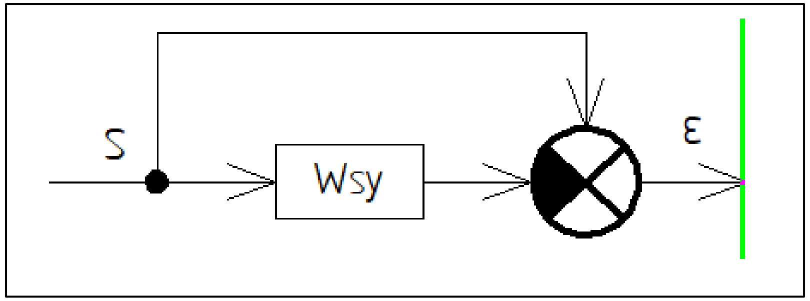
Рассмотрим преобразование структурной схемы по каналу: Wsε



$$W_{S\varepsilon} = \frac{1}{1 + W_p \cdot W_{об}}$$

Вариант 2

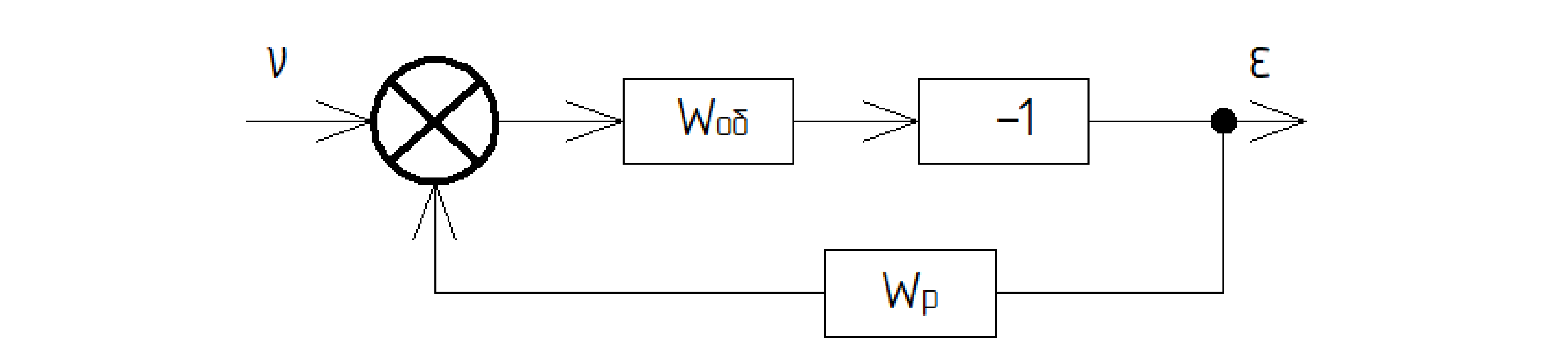




$$W_{S\varepsilon} = 1 - W_{Sy} = 1 - \frac{W_p \cdot W_{об}}{1 + W_p \cdot W_{об}} = \frac{1}{1 + W_p \cdot W_{об}}$$

Преобразование структурных схем

Рассмотрим преобразование структурной схемы по каналу: Wνε

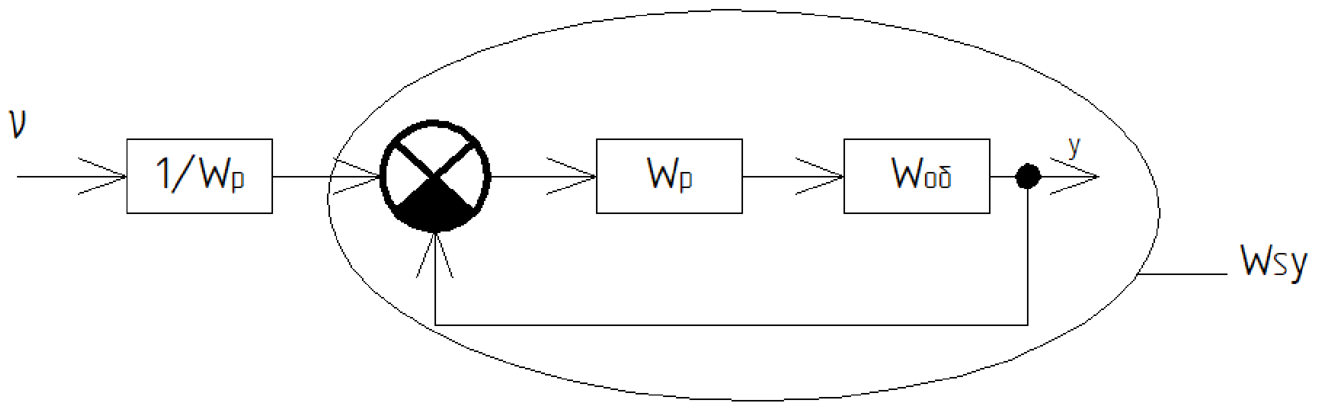


Передаточная функция:

$$W_{\nu\varepsilon} = \frac{-W_{об}}{1-(-1)\cdot W_{р}\cdot W_{об}} = \frac{-W_{об}}{1+W_{р}\cdot W_{об}}$$

Преобразование структурных схем

Рассмотрим преобразование структурной схемы по каналу: Wνy



Передаточная функция:

$$W_{\nu y} = \frac{1}{W_р} \cdot \frac{W_р \cdot W_{об}}{1 + W_р \cdot W_{об}} = \frac{W_{об}}{1 + W_р \cdot W_{об}}$$