ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления.
Часть №2

Лекция № 2

Фазовые траектории (портреты)

Томск, 2019

Если движение системы описывается координатами x и y посредством уравнений dx/dt=f1(x,y) и dy/dt=f(x,y), то для удобства исследования систем движение изображается в прямоугольной системе координат x и y называемых **фазовыми координатами**.

Время t в явном виде в изображение движения не входит.

Косвенно: $\forall$ знач. t_i соотв. определенное x_i и y_i.

При изменении t рабочая точка перемещается по **фазовой плоскости**, очерчивая **фазовую траекторию**.

Совокупность фазовых траекторий называется **фазовым портретом**.

Величины x и y называются **фазами движения**.

Наиболее часто встречается способ изображения, при котором используется основная координата x и скорость ее изменения y=dx/dt:

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = f(x, y)$$

Например, пусть переходный процесс описывается уравнением:

$$x^{*}(t) + a_1 x^{1}(t) + \mathrm{a}_2\, x(t) = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dy}{dt} = -a_1 y - a_2 x$$

Исключим время и разделим второе на первое:

$$\frac{dy}{dx} = -\mathrm{a}_1 - \mathrm{a}_2 \frac{x}{y}$$

Решение этого дифференциального уравнения $y=\varphi(x)$ с одной постоянной интегрирования определяет семейство интегр. кривых на фазовой плоскости (x,y), $\forall$ будет соответствовать одному значению постоянной С.

Вся совокупность кривых представляет собой все возможные траектории, а значит и все возможные виды переходных процессов при любых начальных условиях.

Нашему примеру соответствуют корни характеристического уравнения:

$$P_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^{\,2}}{4} - a_2}$$

Здесь возможны 6 случаев:

1) корни мнимые $a_1 = 0, a_2 \succ 0$, что соответствует границе устойчивости линейной системы, в этом случае незатухающие колебания.

$$x = A\sin(wt+\beta), \quad y = \frac{dx}{dt} = wA\cos(wt+\beta)$$

$$w = \sqrt{a_2} \qquad\qquad (*)$$

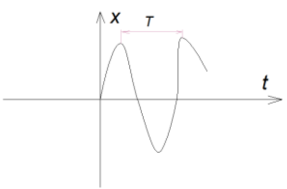
С постоянной амплитудой А и начальной фазой β, которые зависят от начальных условий.

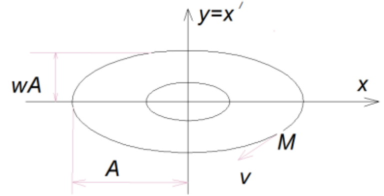
Для фазовой плоскости уравнения (*) представляют собой параметрические уравнения эллипса с полуосями А и Аw:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{(wA)^2} = 1$$

уравнение получаемое решением диф. уравнения при $a_1 = 0, \mathrm{a}_2 = w^2$, А- постоянная интегрирования.

Поэтому автоколебанием системы соответствует движение изображающей точки по замкнутой кривой.





2. Комплексные корни с отрицат. Re (соответствует устойчивости линейной системы).

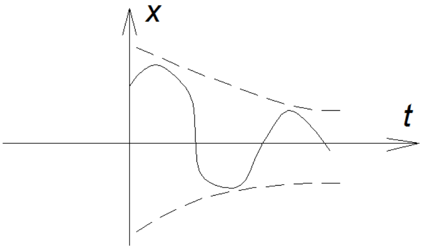
$$a_1^{\ 2} \prec 4a_2,\ a_1 \succ 0,\ a_2 \succ 0$$

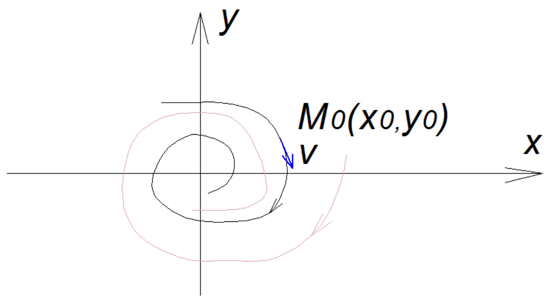
В этом случае получаем затухающие колебания.

$$x = Ae^{-Pt}\sin(wt+\beta),\ \ y = \frac{dx}{dt} = \gamma Ae^{-Pt}\cos(wt+\beta+\gamma)$$

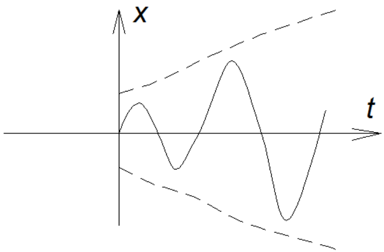
где $\text{P}=\dfrac{a_1}{2}$, $\text{w}=\sqrt{\text{a}_2-(\dfrac{a_1}{2})^2}$

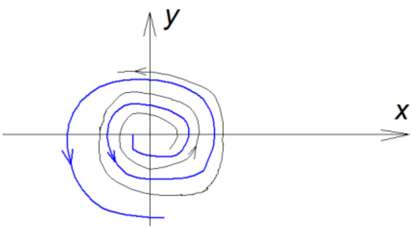
$$\gamma = \sqrt{a_2},\ \delta = arctg\,\frac{P}{w}$$





3. Комплексные корни с Re>0 (неустойчивая линейная система).

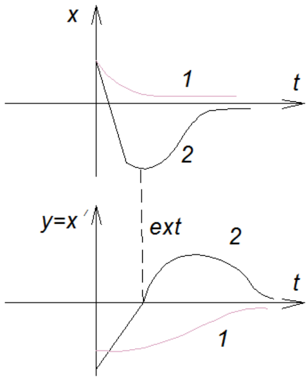


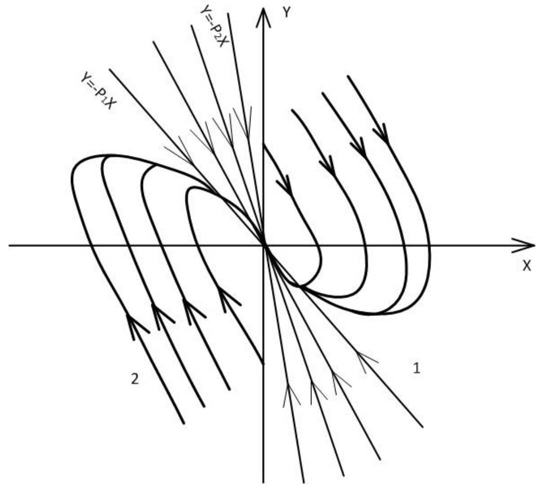


4. Корни вещественные отрицательные $a_1^{\,2} \succ 4\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_1 \succ 0, \mathrm{a}_2 \succ 0$ (устойчивая линейная система).

$$x = C_1 e^{-Pt} + C_2 e^{-Pt}, \quad y = \frac{dx}{dt} = -P_1 C_1 e^{-Pt} - P_2 C_2 e^{-Pt}$$

где $\mathrm{P}_{1,2} = \dfrac{a_1}{2} \pm \sqrt{(\dfrac{a_1}{4})^2 \text{-} \mathrm{a}_2}$





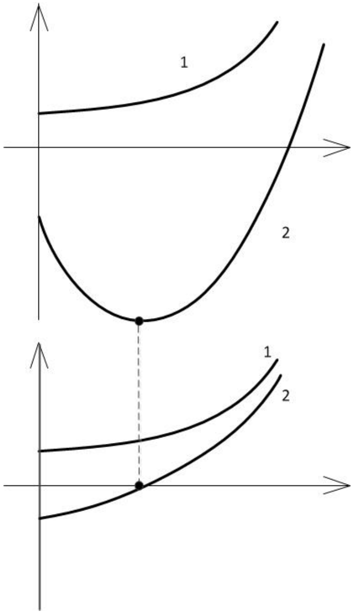
Т.к. для 1) $x>0$ и $y<0$

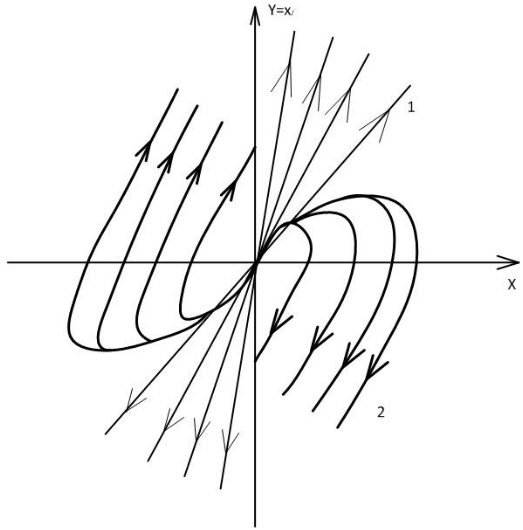
2) Знаки x и y меняется по одному разу.

Для установившейся системы траектории стремятся к началу координат.

5. Корни вещественные $\mathrm{Re} \succ 0, a_1^{\ 2} \succ 4a_2,\ a_1 \prec 0,\ a_2 \succ 0$

аналогично сл. 4:

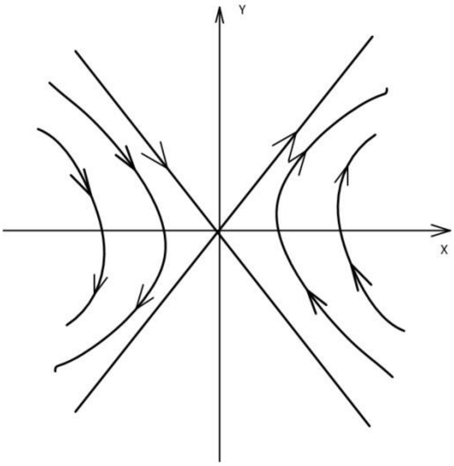




5. Корни вещественные и имеют разные знаки при $a_2 \prec 0$

(неустойчивая линейная система)

Процесс такой же как и в случае 4), только P_1, P_2 имеют разные знаки. Так как $a_2<0$, введем обозначение $P^2 = -a_2$. Для упрощения рассмотрим случай с $a_1=0$, тогда:



$$\frac{dy}{dx} = p^2 \frac{x}{y}$$

После интегрирования:

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{(pc)^2} = 1,$$ т.к. семейство гипербол

аналогичная картина и для $a_1=0$.

Особые точки

В точках, которые соответствуют установившемуся состоянию, получаем неопределенное выражение:

$$\frac{dy}{dt} = -a_1 - a_2 \frac{0}{0}$$

такие точки называются особыми.

Особые точки в случаях:

1) точка типа «центр»
2) точка типа «устойчивый фокус»
3) точка типа «неустойчивый фокус»
4) точка типа «установившейся узел»
5) точка типа «неустановившейся узел»
6) точка типа «седло»