ТОМСКИЙ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления и защит. Часть 1

Лекция 2

Временные и частотные характеристики систем. Преобразования Лапласа. Передаточные функции систем

Томск - 2019

Временные характеристики систем

В качестве ***временных*** характеристик различают ***переходную и весовую (импульсную)*** характеристики систем.

Под переходной характеристикой понимается реакция системы из установившегося состояния (***при нулевых начальных условиях***) на воздействие в виде ***единичной ступенчатой функции***.

$$1(t) = \begin{cases} 1 \ \textit{при} \ t \geq 0 \\ 0 \ \ \textit{при} \ t < 0 \end{cases}$$

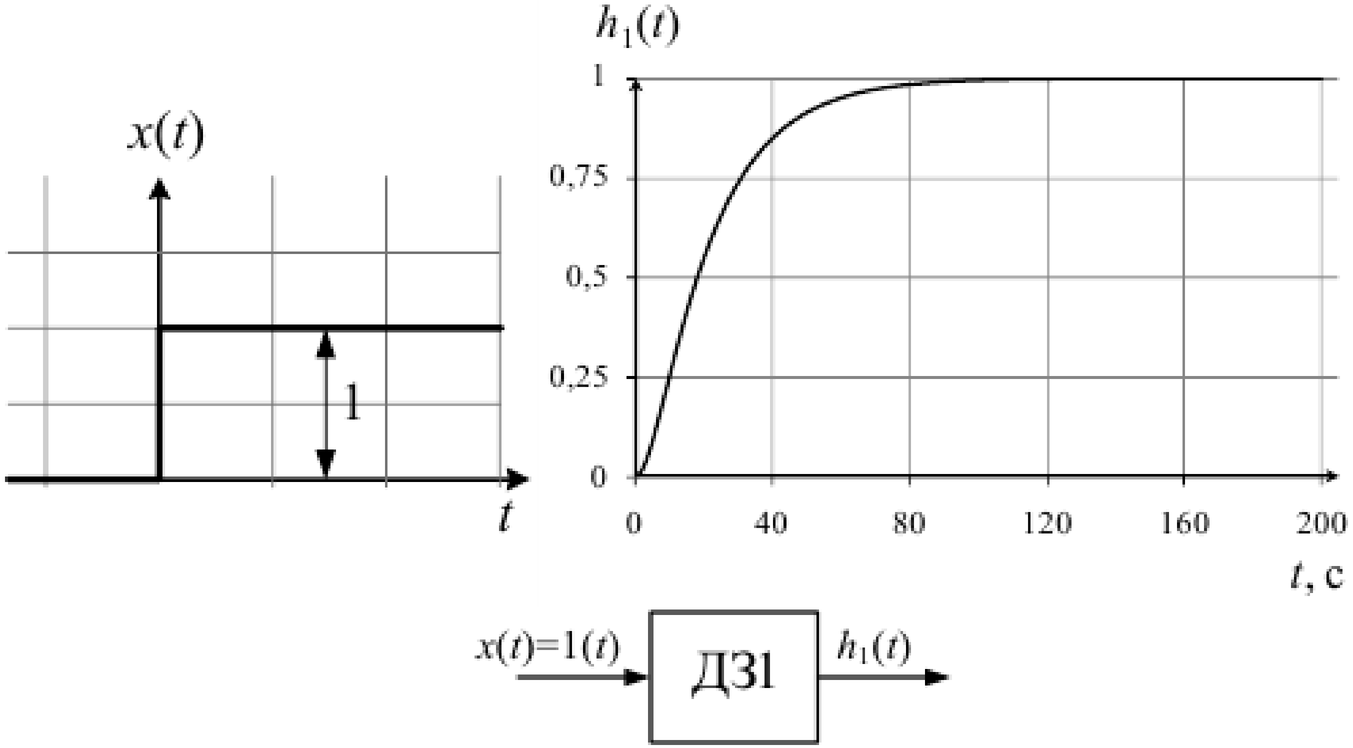


Иллюстрация реакции ДЗ1 на единичное ступенчатое воздействие

Временные характеристики систем

Если известна передаточная функция динамического звена, то переходная функция определяется разложением Хевисайда.

Пусть W(P)=K(P)/D(P). Если, к примеру, уравнение D(P)=0 не имеет кратных корней, то переходная функция принимает вид:

$$h(t)=\frac{K(0)}{D(0)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K(P_i)}{P_i D'(P_i)}e^{P_i t}$$

где $D'(P_i)=\left.\frac{dD(P)}{P}\right|_{P=P_i}$ – первая производная от *D(P)* при $P=P_i$; P_i – корни

характеристического уравнения *D(P)=0*

Временные характеристики систем

Весовой или импульсной переходной функцией *w(t)* называют функцию, описывающую реакцию динамического звена (системы) на идеальное импульсное воздействие *δ(t)* при нулевых начальных условиях.

Математически идеальное импульсное воздействие описывается

дельта-функцией *δ(t)*:

$$\delta(t)=\begin{cases}\infty \; при \; t=0 \\ 0 \; при \; t >< 0\end{cases}; \quad \delta(t)=\frac{d1(t)}{dt}; \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

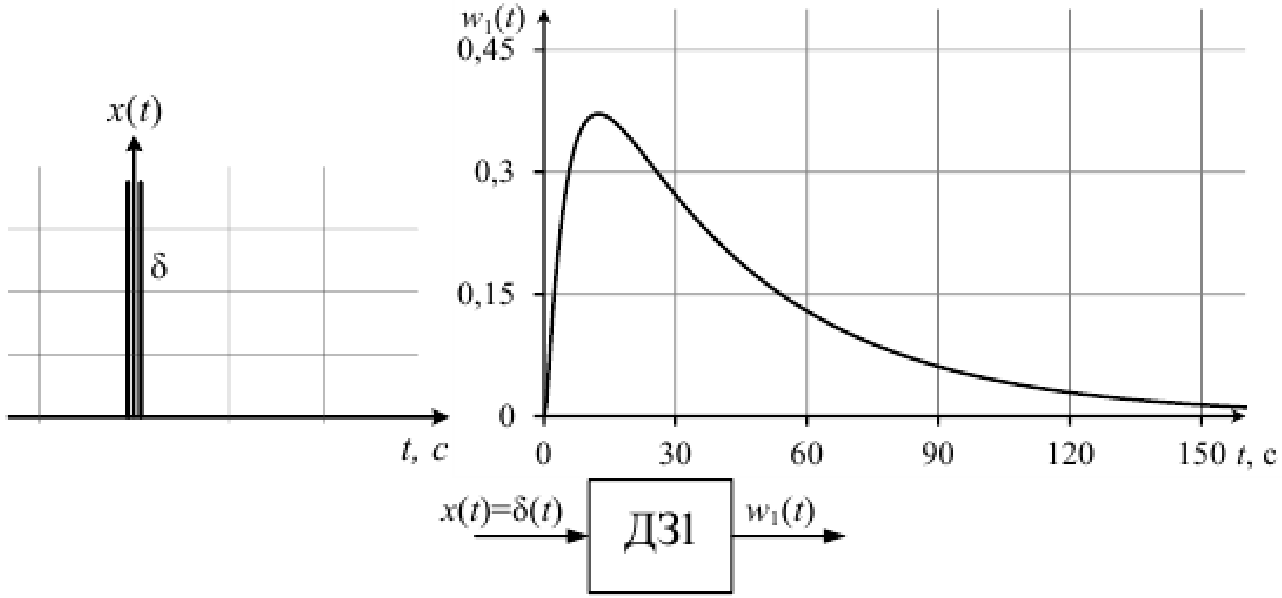


Иллюстрация реакции ДЗ1 на идеальное импульсное воздействие

Временные характеристики систем

Весовая функция (так же как и переходная) может быть определена при известной передаточной функции этого звена с помощью формулы Хевисайда:

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K(P_i)}{D'(P_i)} e^{P_i t}$$

поскольку $\delta(t) = \dfrac{d1(t)}{dt};\;\; w(t) = \dfrac{dh(t)}{dt};\;\; h(t) = \int_0^{\infty} w(t)dt.$

В свою очередь, передаточная функция динамического звена может быть определена по его временным характеристикам.

Передаточная функция динамического звена есть изображение Карсона его **переходной функции** $W(P) = K\{h(t)\}$.

Передаточная функция динамического звена есть изображение Лапласа его **весовой функции** $W(P) = L\{w(t)\}$.

Временные характеристики систем

Определение реакции динамического звена ***на произвольное входное воздействие*** с помощью временных характеристик

Если известна реакция звена на единичное ступенчатое воздействие $h(t)$, то при произвольном воздействии $f(t)$, $f(t \le t_0) \equiv 0$, переходный процесс $x(t)$ можно выразить через $h(t)$ и $f(t)$ с помощью интеграла Дюамеля:

$$x(t) = f(t)h(0) + \int_{t_0}^{t} h(t-\tau)d\tau = f(t)h(0) + \int_{t_0}^{t} h(\tau) f'(t-\tau)d\tau$$

Реакцию звена на произвольное воздействие f(t) можно выразить и через весовую (импульсную переходную) функцию с помощью интеграла:

$$x(t) = \int_{0}^{t} w(t-\tau) f(\tau)d\tau = \int_{0}^{t} f(t-\tau)w(\tau)d\tau$$

Эта формула справедлива только при нулевых условиях.

Аналитическое определение переходных характеристик путем решения дифференциального уравнения системы

Пусть система описывается ДУ общего вида:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

a, *b* – постоянные коэффициенты

Требуется путем решения ДУ определить переходную характеристику системы.

Рассмотрим частный случай, когда правая часть ДУ не содержит производной от *x*:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_0 x$$

1. Представим *y(t)* в виде:

$$y(t) = y_{своб}(t) + y_{вын}(t)$$

где $y_{своб}(t)$ – есть составляющая переходного процесса (характеристики), представляющая собой движение системы за счет начальных условий;

$y_{вын}(t)$ – определяет движение системы, обусловленное действием внешней вынуждающей силы.

Аналитическое определение переходных характеристик путем решения дифференциального уравнения системы

$y_{вын}(t)$ решение ищется в форме правой части дифференциального уравнения

$$y_{вын}(t) = \frac{b_0}{a_0} 1(t) \;\; при \;\; a_0 \neq 0$$

$$a_1 dy = b_0 dt$$

$$\int a_1 dy = \int b_0 dt$$

$$a_1 y = b_0 t$$

$$y_{вын}(t) = \frac{b_0}{a_1} t \;\; при \;\; a_0 = 0, \;\; a_1 \neq 0$$

Свободная составляющая определяется видом корней характеристического уравнения системы.

Аналитическое определение переходных характеристик путем решения дифференциального уравнения системы

$$P=\frac{d}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{d}{dt}y=Py$$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right)=P^2y$$

$$\frac{d^ny}{dt^n}=P^ny$$

Тогда:

$$a_nP^ny+a_{n-1}P^{n-1}y+\ldots a_1Py+a_0y=0\ \ /:y$$

$\boxed{a_nP^n+a_{n-1}P^{n-1}+\ldots a_1P+a_0=0}$ - характеристическое уравнение системы

Аналитическое определение переходных характеристик путем решения дифференциального уравнения системы

Виды корней

1. Корни вещественные (действительные) разные:

$$\textit{Пусть } P_k = \alpha_k, \ \ k = 1, \dots, n$$

$$\textit{тогда } y_{своб}(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k e^{\alpha_k t}$$

2. Корни действительные, кратные *l*

$$y_{своб}(t) = (C_0 + C_1 t + \dots + C_{l-1} t^{l-1}) e^{\alpha t}$$

α – корень кратности *l*

C_0, C_1, C_{l-1} – постоянные интегрирования, определяющиеся из н.у.

3. Корни комплексные сопряженные

Для случая пары сопряженных комплексных корней:

$$P_{k,k+1} = \alpha_k \pm i\beta_k$$

$$y_{своб}(t) = \left[C_1\cos(\beta_k t) + C_2\sin(\beta_k t)\right]e^{\alpha_k t}$$

$$y_{своб}(t) = Ae^{\alpha_k t}\sin(\beta_k t + \varphi)$$

C_1, C_2, A, φ – постоянные интегрирования, определяющиеся из н.у.

4. Корни комплексные сопряженные, кратные l

$$y_{своб}(t) = \left[(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 + \ldots + C_{l-1}t^{l-1})\cos(\beta_k t) + (D_0 + D_1 t + D_2 t^2 + \ldots + D_{l-1}t^{l-1})\sin(\beta_k t)\right]e^{\alpha_k t}$$

Принцип суперпозиций

Выполняется для линейных систем и состоит в следующем:

Пусть ряд системы на входной сигнал *x(t)* соответствует выходной сигнал *y(t)*

$$x(t) \to y(t)$$

$$ax(t) \to ay(t)$$

$$x_1(t) \to y_1(t)$$

$$x_2(t) \to y_2(t)$$

$$x_1(t) + x_2(t) \to y_1(t) + y_2(t)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$$

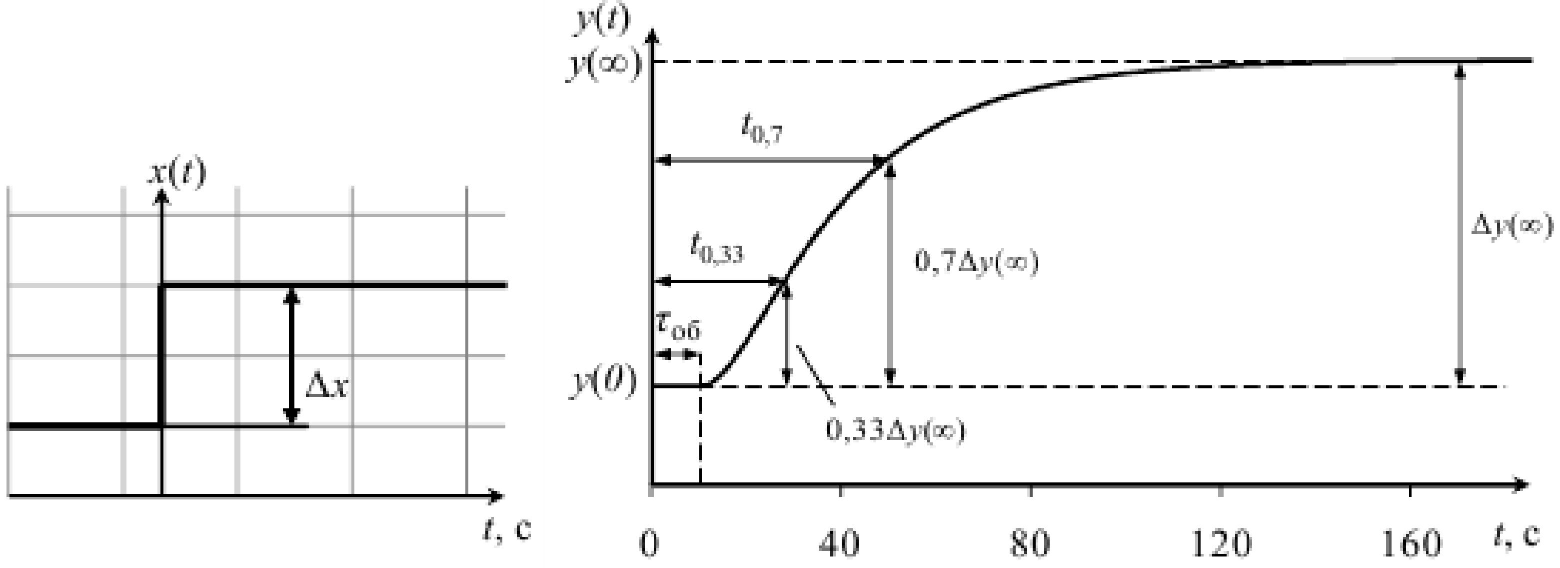
Для нелинейной системы этот принцип не выполняется.

Экспериментальные временные характеристики САУ

Экспериментально снятые временные характеристики широко используются для идентификации объектов управления. По виду переходной (либо весовой) функции определяют тип звена, а по специальным методикам рассчитывают параметры уравнения (передаточной функции) этого звена.

Так для переходной функции технологического объекта управления (ТОУ), можно предположить, что ТОУ описывается дифференциальным уравнением

$T_{об}\dfrac{dy}{dt} + y(t) = k_{об}x(t - \tau_{об})$ или передаточной функцией $W(P) = \dfrac{k_{об}e^{-\tau_{об}P}}{T_{об}P + 1}$



Экспериментальные временные характеристики САУ

Последовательность определения параметров звена ($T_{об}$, $\tau_{об}$, $k_{об}$) по методу Орманса:

1. по экспериментальной переходной функции (кривой разгона) определяется время $t_{0,7}$ при $y(t_{0,7}) = y(0) + 0,7\Delta y(\infty)$ и $t_{0,33}$ при $y(t_{0,33}) = y(0) + 0,33\Delta y(\infty)$;

2. вычисляется время запаздывания $\tau_{об}$ по формуле:

$$\tau_{об} = 0,5(3t_{0,33} - t_{0,7});$$

3. вычисляется величина постоянной времени $T_{об}$:

$$T_{об} = \frac{t_{0,7} - \tau}{1,2} = 1,25(t_{0,7} - t_{0,33});$$

4. коэффициент передачи звена $k_{об}$ находится из выражения:

$$k_{об} = \frac{\Delta y(\infty)}{\Delta x}$$

Частотные характеристики систем

Наряду с вышеперечисленными способами математического описания (дифференциальные уравнения, передаточные функции, временные характеристики) динамических звеньев и систем автоматического управления в целом в теории автоматического управления для математического описания звеньев и систем широко применяются также ***частотные характеристики***, которые определяют поведение отдельных звеньев и системы в целом при действии на их входе ***гармонических колебаний***.

Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена на ***синусоидальное входное воздействие в установившемся режиме*** (т. е. вынужденные синусоидальные колебания звена).

Известно, что гармонические колебания описываются периодической функцией времени $X(t) = A\sin(\omega t + \varphi)$, (A – амплитуда; φ – фаза; ω – частота колебаний) описываются периодической функцией времени $X(t) = X(t + nT)$, где $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ – период колебаний; n – любое целое число.

Частотные характеристики систем

Отличительной особенностью периодических функций является то, что они существуют ***на бесконечном отрезке времени*** от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. С этой точки зрения они являются математической абстракцией, т. к. любой реальный процесс имеет начало и конец. Однако, если реальный процесс длится достаточно долго с периодическим повторением предыдущих значений, то его можно с достаточной точностью считать периодическим. Таким образом, в реальных условиях реакцией системы на периодические входные воздействия могут считаться только установившиеся колебания выходной величины, т. е. колебания, которые возникают в САУ по истечении достаточно большого времени после начала воздействия. ***В этом принципиальное отличие метода частотных характеристик от метода временных характеристик, так как в последнем рассматривается поведение САУ в переходных режимах.***

Частотные характеристики систем

В линейной САУ установившиеся колебания выходной величины, вызванные гармоническими воздействиями на входе, являются гармоническими колебаниями той же частоты, но амплитуда и фаза их будут уже другими.

$$X_{вх}(t) = A_{вх}\sin(\omega t + \varphi_{вх}) \Rightarrow \boxed{ДЗ} \Rightarrow X_{вых}(t) = A_{вых}\sin(\omega t + \varphi_{вых})$$

Запишем гармонические функции входа и выхода динамического звена в символической (комплексной) форме:

$$X_{вх}(t) = A_{вх}e^{i(\omega t + \varphi_{вх})};\ \ X_{вых}(t) = A_{вых}e^{i(\omega t + \varphi_{вых})}.$$

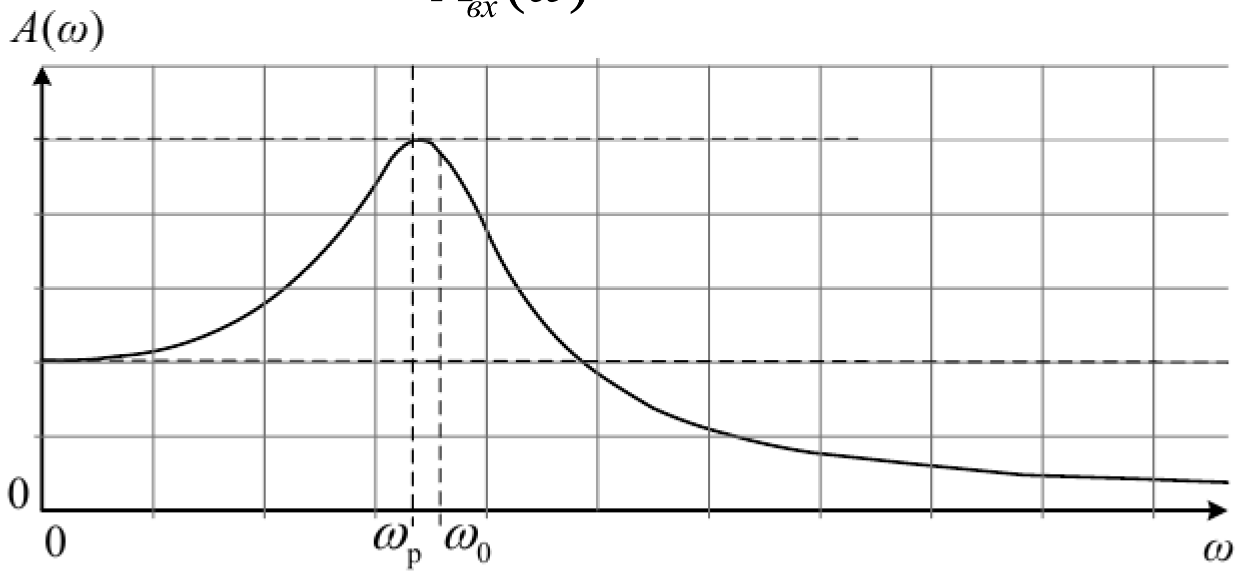
И взяв их отношение, получим:

$$\frac{X_{вых}(t)}{X_{вх}(t)} = \frac{A_{вых}}{A_{вх}}e^{i(\varphi_{вых} - \varphi_{вх})} = W(i\omega).$$

Частотные характеристики систем

При изменении частоты от 0 до +∞ получаем комплексную функцию частоты $W(i\omega)$, которая называется ***амплитудно-фазовой частотной характеристикой динамического звена.*** Ее модуль $\frac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}(\omega)}$ определяет отношение амплитуд выходных и входных колебаний при изменении частоты ω от 0 до +∞. Эта зависимость отношения амплитуд выходных и входных гармонических сигналов от частоты называется амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ) динамического звена

$$A(\omega) = \frac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}(\omega)} = \left|W(i\omega)\right|_{\omega=0\div\infty}$$

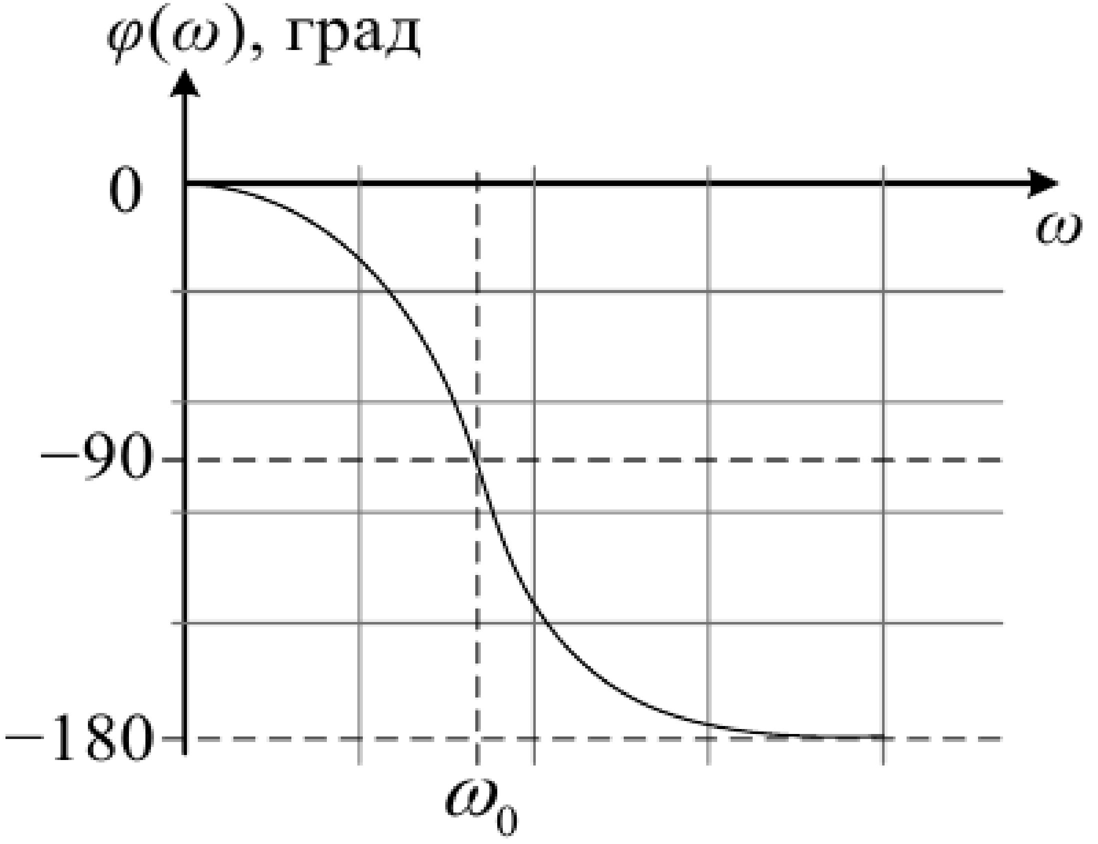


Амплитудно-частотная характеристика динамического звена

Частотные характеристики систем

Аргумент $\varphi_{вых}(\omega) – \varphi_{вх}(\omega)$ определяет разность фаз выходных и входных колебаний. Зависимость разности фаз выходных и входных гармонических сигналов от частоты называется ***фазочастотной характеристикой*** (ФЧХ) динамического звена

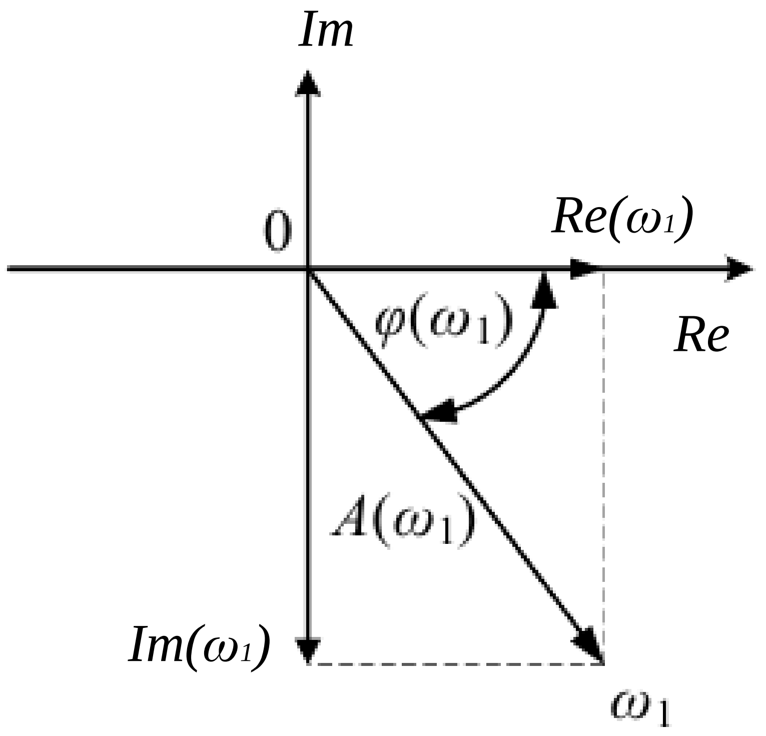
$$\varphi(\omega) = \varphi_{вых}(\omega) - \varphi_{вх}(\omega) = ArgW(i\omega)\Big|_{\omega=0\div\infty}$$



Фазочастотная характеристика динамического звена

Представление АФЧХ на комплексной плоскости

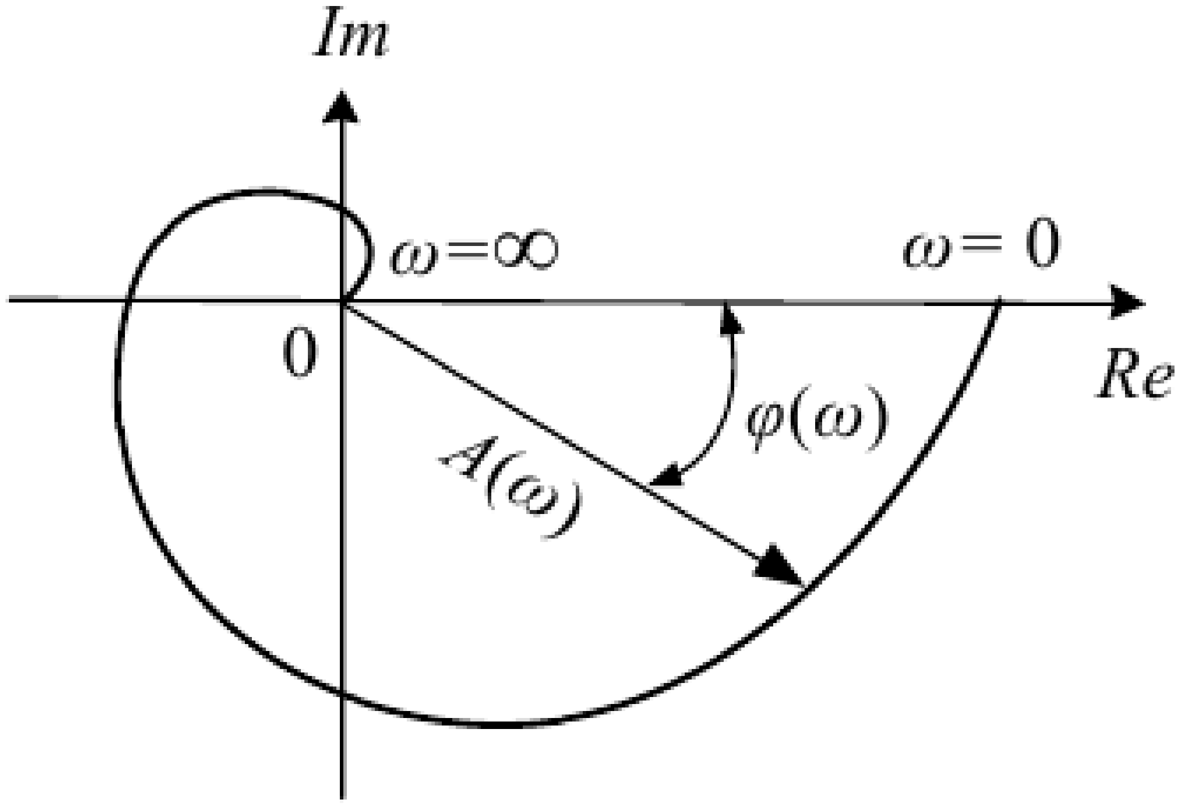
Комплексная функция частоты $W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ называется ***амплитудно-фазовой частотной характеристикой – АФЧХ*** динамического звена Ее модуль есть АЧХ, а аргумент – ФЧХ. На комплексной плоскости величина $W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ изображается вектором, длина которого равна отношению амплитуд, а угол – разности фаз выхода и входа.



Изображение на комплексной плоскости величины АФЧХ для определенного значения частоты ω_1

Представление АФЧХ на комплексной плоскости

Соответственно на комплексной плоскости АФЧХ представляется кривой – ***годографом***, которую вычерчивает конец вектора $A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ при изменении ω от 0 до +∞.



Амплитудно-фазовая частотная характеристика динамического звена

Представление АФЧХ на комплексной плоскости

АФЧХ может быть записана не только в показательном виде, но также в виде суммы вещественной и мнимой частей:

$$W(i\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega)$$

которые определяются через АЧХ и ФЧХ:

$$\mathrm{Re}(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega);\;\; \mathrm{Im}(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega)$$

С другой стороны *A(ω)* и *φ(ω)* выражаются через *Re(ω)* и *Im(ω):*

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)};\;\; \varphi(\omega) = arctg\,\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}$$

Определение АФЧХ звена по его дифференциальному уравнению

Амплитудно-фазовая частотная характеристика *W(iω)* динамического звена может быть легко определена ***по его дифференциальному уравнению***. Действительно, заметим, что для получения производной по времени от функции $X(t) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$ достаточно умножить ее на *iω*.

$$\frac{dX(t)}{dt} = \frac{d}{dt}Ae^{i(\omega t+\varphi)} = i\omega Ae^{i(\omega t+\varphi)} = i\omega X(t)$$

$$\frac{d^2X(t)}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}Ae^{i(\omega t+\varphi)} = (i\omega)^2 Ae^{i(\omega t+\varphi)} = (i\omega)^2 X(t)$$

$$\frac{d^nX(t)}{dt^n} = \frac{d^n}{dt^n}Ae^{i(\omega t+\varphi)} = (i\omega)^n Ae^{i(\omega t+\varphi)} = (i\omega)^n X(t)$$

Определение АФЧХ звена по его дифференциальному уравнению

Поэтому, подставляя в дифференциальное уравнение динамического звена

$$(a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + ... a_1 P + a_0) Y(t) = (b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + ... b_1 P + b_0) X(t)$$

выражения для входных и выходных координат и их производных в комплексной форме (если входной сигнал является гармоническим), получим:

$$(a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + ... a_1 (i\omega) + a_0) Y(t) = (b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + ... b_1 (i\omega) + b_0) X(t)$$

Согласно приведенному выше определению

$$W(i\omega) = \frac{X_{вых}(t)}{X_{вх}(t)} = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + ... b_1 (i\omega) + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + ... a_1 (i\omega) + a_0}$$

Сравнивая с выражением для передаточной функции звена

$$W(P) = \frac{X_{вых}(P)}{X_{вх}(P)} = \frac{b_m (P)^m + b_{m-1} (P)^{m-1} + ... b_1 (P) + b_0}{a_n (P)^n + a_{n-1} (P)^{n-1} + ... a_1 (P) + a_0}$$

Определение АФЧХ звена по его дифференциальному уравнению

Можно заметить, что АФЧХ динамического звена можно получить из передаточной функции этого звена формальной заменой P на $i\omega$ и наоборот.

Между амплитудно-фазовой частотной характеристикой и весовой функцией существуют соотношения, определяемые прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$W(i\omega) = \int_0^\infty w(t)e^{-i\omega t}dt; \;\; w(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty W(i\omega)e^{i\omega t}d\omega$$

Преобразование Лапласа

Пусть дан оригинал функции *x(t)*, тогда ее изображением будет:

$$X(P)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-Pt}dt$$

Данное выражение называется **прямым преобразованием Лапласа.**

Обратным преобразованием Лапласа называется выражение вида:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(P)e^{Pt}dP$$

$$L\left[x(t)\right]=X(P)$$

$$x(t)\cong X(P)$$

$$L^{-1}\left[X(P)\right]=x(t)$$

Свойства Преобразования Лапласа

1. Свойство линейности.

x(t) – оригинал, *X(P)* – изображение, тогда:

$$ax(t) \cong aX(P)$$

$$x_1(t) \cong X_1(P)$$

$$x_2(t) \cong X_2(P)$$

$$ax_1(t) + bx_2(t) \cong aX_1(P) + bX_2(P)$$

2. Свойство дифференцирования оригинала.

$$x(t) \cong X(P)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \cong PX(P)$$ при нулевых Н.У.

$$\frac{dx(t)}{dt} \cong PX(P) - x(0)$$ при ненулевых Н.У.

$$\frac{dx^n(t)}{dt^n} \cong P^n X(P) - P^{n-1}x(0) - P^{n-2}x(0) - \ldots - x(0)$$

Свойства Преобразования Лапласа

3. Свойство интегрирования оригинала.

$$x(t) \cong X(P)$$

$$\int x(t)dt \cong \frac{X(P)}{P}$$

4. Теорема о начальном и конечном значениях оригинала.

$$x(0) = \lim_{P\to\infty} PX(P)$$

$$x(\infty) = \lim_{P\to 0} PX(P)$$

5. Уравнение свертки.

$$x_1(t) \cong X_1(P)$$

$$x_2(t) \cong X_2(P)$$

$$X_2(P)X_1(P) \cong \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\xi)x_2(t-\xi)d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\xi)x_1(t-\xi)d\xi$$

Свойства Преобразования Лапласа

6. Теорема о разложении.

Пусть $X(P) = \dfrac{B(P)}{A(P)}$

тогда $x(t) = \sum\limits_{k=1}^{l} \dfrac{1}{(n_k - 1)!} \lim\limits_{P \to P_k} \dfrac{d^{n_k - 1}}{dP^{n_k - 1}} \left[X(P)(P - P_k)^{nk} e^{Pt} \right] 1(t)$

P_k – корни уравнения

n_k – кратность корней

l – число различных корней

$$x(t) = \sum_{k=1}^{l} \frac{B(P_k)}{A'(P_k)} e^{P_k t}$$

7. Теорема запаздывания.

$$x(t) \cong X(P)$$

$$x(t - \tau) \cong X(P) e^{-P\tau}$$

τ – запаздывание

Свойства Преобразования Лапласа

Преобразования Лапласа наиболее часто встречающихся функций приведены в табл. П.1.

Таблица П.1

N	$f(t)$	$F(p)$	N	$f(t)$	$F(p)$
1	$\delta(t)$	1	6	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$
2	$1(t)$	$\frac{1}{p}$	7	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$
3	t	$\frac{1}{p^2}$	8	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$
4	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}$	$\frac{1}{p^n}$	9	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	10	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$

Передаточные функции

Рассмотрим ДУ общего вида:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу, используя свойство линейности и правило дифференцирования оригинала:

$$a_n P^n Y(P) + a_{n-1} P^{n-1} Y(P) + \ldots a_1 P Y(P) + a_0 Y(P) =$$

$$= b_m P^m X(P) + b_{m-1} P^{m-1} X(P) + \ldots b_1 P X(P) + b_0 X(P)$$

$$(a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots a_1 P + a_0) Y(P) = (b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \ldots b_1 P + b_0) X(P)$$

$$\frac{Y(P)}{X(P)} = \frac{b_m P^m + b_{m-1} P^{m-1} + \ldots b_1 P + b_0}{a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots a_1 P + a_0} = W(P)$$

Отношение изображений выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях

$$W(i\omega) = \frac{b_m (i\omega)^m + b_{m-1} (i\omega)^{m-1} + \ldots b_1 (i\omega) + b_0}{a_n (i\omega)^n + a_{n-1} (i\omega)^{n-1} + \ldots a_1 (i\omega) + a_0}$$

Передаточные функции

$$y(t) = y_{своб}(t) + y_{вын}(t)$$

$$x(t) = A_{вх}\cos(\omega t) = A_{вх}\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} = x_1(t) + x_2(t)$$

$$где\ x_1(t) = \frac{A_{вх}}{2}e^{i\omega t}$$

$$x_2(t) = \frac{A_{вх}}{2}e^{-i\omega t}$$

Решение можно определить как сумму реакции системы на каждое воздействие в отдельности

$$x_1'(t) = \frac{A_{вх}}{2}i\omega e^{i\omega t} = i\omega x_1(t);$$

$$x_1''(t) = \frac{A_{вх}}{2}(i\omega)^2 e^{i\omega t} = (i\omega)^2 x_1(t);$$

$$x_1^{m}(t) = \frac{A_{вх}}{2}(i\omega)^m e^{i\omega t} = (i\omega)^m x_1(t).$$

Передаточные функции

$$y_1(t) = A_1 \cdot x_1(t)$$

$$\left[a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots a_1(i\omega) + a_0\right] A_1 \cdot x_1(t) =$$

$$= \left[b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \ldots b_1(i\omega) + b_0\right] x_1(t)$$

$$A_1(i\omega) = \frac{b_m(i\omega)^m + b_{m-1}(i\omega)^{m-1} + \ldots b_1(i\omega) + b_0}{a_n(i\omega)^n + a_{n-1}(i\omega)^{n-1} + \ldots a_1(i\omega) + a_0} = A(i\omega) \cdot e^{i\varphi}$$

$$y_1(t) = A(\omega) e^{i\varphi} \frac{A_{вх}}{2} e^{i\omega t} = A(\omega) \frac{A_{вх}}{2} e^{i(\omega t + \varphi)}$$

$$x_2{}'(t) = \frac{A_{вх}}{2} (-i\omega) e^{i\omega t} = -i\omega x_2(t);$$

$$x_2{}^k(t) = \frac{A_{вх}}{2} (-i\omega)^k e^{i\omega t} = (-i\omega)^k x_2(t);$$

$$y_2(t) = A_2 \cdot x_2(t)$$

$$A_1(i\omega) = \frac{b_m(-i\omega)^m + b_{m-1}(-i\omega)^{m-1} + \ldots b_1(-i\omega) + b_0}{a_n(-i\omega)^n + a_{n-1}(-i\omega)^{n-1} + \ldots a_1(-i\omega) + a_0} = A(i\omega) \cdot e^{-i\varphi}$$

Передаточные функции

$$a + ib = A(i\omega)\cdot e^{i\varphi}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = arctg\,\frac{b}{a}$$

$$a - ib = A(-i\omega)\cdot e^{-i\varphi}$$

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\varphi = -arctg\,\frac{b}{a}$$

$$y_2(t) = A_2\cdot x_2(t) = A(\omega)e^{-i\varphi}\,\frac{A_{вх}}{2}\,e^{-i\omega t}$$

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = A(\omega)A_{вх}\,\frac{e^{i(\omega t+\varphi)} + e^{-i(\omega t+\varphi)}}{2}$$

$$y(t) = A(\omega)A_{вх}\cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{A_{вых}}{A_{вх}} = A(\omega) - АЧХ$$

$$\varphi(\omega) = \omega t + \varphi - \omega t = \varphi$$

$$W(i\omega) = A(\omega)e^{i\varphi(\omega)}$$

$$|W(i\omega)| = A(\omega)$$

$$\arg W(i\omega) = \varphi(\omega)$$

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}$$

$$\mathrm{Re}(\omega) = A(\omega)\cos\left[\varphi(\omega)\right]$$

$$\mathrm{Im}(\omega) = A(\omega)\sin\left[\varphi(\omega)\right]$$