ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Теория автоматического управления. Часть №2

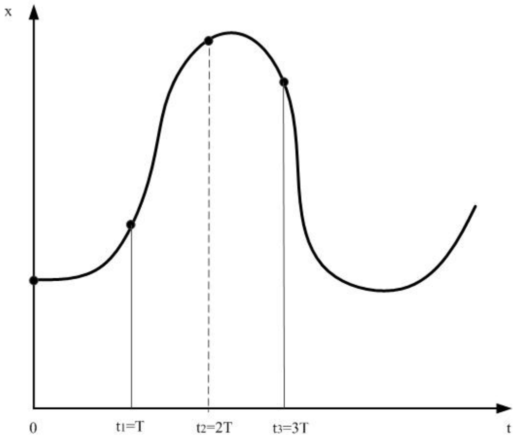
Лекция № 10

Импульсные системы автоматического управления

Томск, 2019

Дискретная система автоматического управления будет **импульсной**, если в системе наблюдается квантование сигнала **по времени и по уровню**.

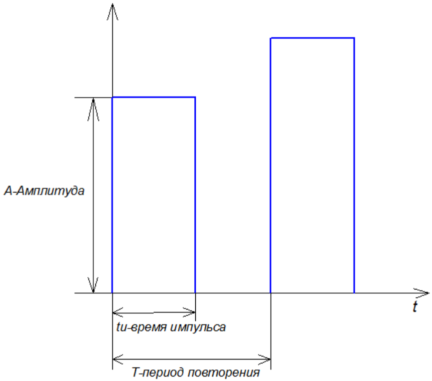
Квантование непрерывного сигнала по времени:



Значения определяются в дискретные моменты времени t_1, $2t_1$, $3t_1$ и т.д.

Для передачи информации с помощью **импульсных сигналов** осуществляется **модулирование непрерывным сигналом** импульсной последовательности.

Рассмотрим прямоугольный импульс.



Возможно изменение одного из параметров импульсной последовательности в соответствии со значением **измененного непрерывного сигнала.**

Например, таким параметром является А.

Тогда такую модуляцию называют **амплитудно-импульсной (АИМ)**.

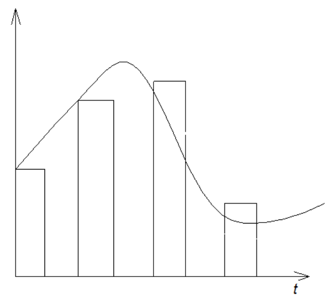
Аналогичным образом различают широтно-импульсную модуляцию (**ШИМ**), которая может быть в виде время-импульсной (**ВИМ**) или фазо-импульсной (**ФИМ**).

tи = const,

T = const,

A – изменяется.

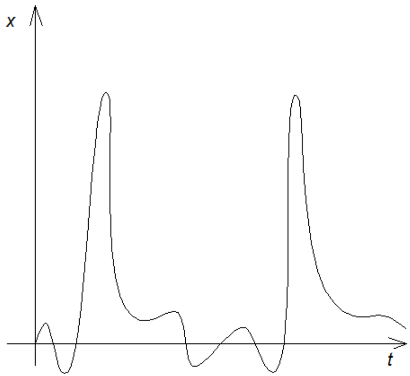
Так модулируют непрерывный сигнал последовательными импульсами.



Линейные импульсные сигналы с АИМ

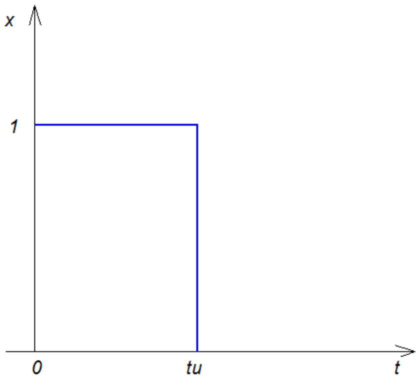
Нужно получить математическую модель импульсных сигналов, а также математическую модель систем преобразования импульсных последовательностей.

Рассмотрим примеры разных форм импульсов.

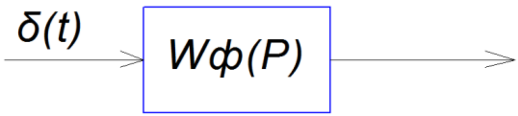


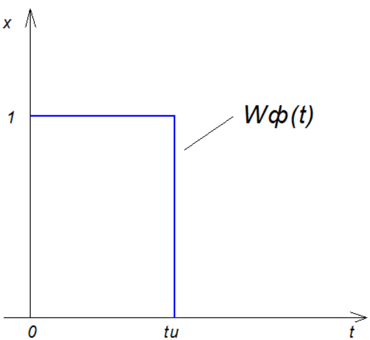
Поэтому проблема создания общей математической модели для разных (большего количества) импульсов.

Рассмотрим метод получения единой математической модели для всех форм импульсов (на примере формирования одиночного импульса).



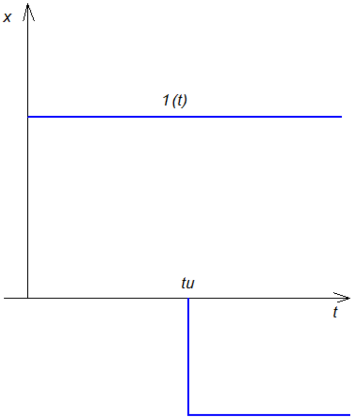
Сформируем этот импульс, как





Реакция на воздействие δ(t) есть w(t), тогда:

Рассмотрим на примере прямоугольного импульса определение wф(t) и Wф(t).

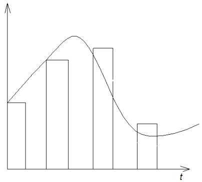


$$w_{ф} = 1(t) - 1(t - t_{и}),$$ тогда

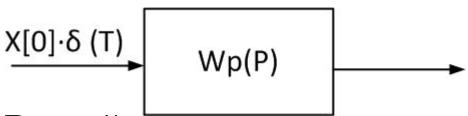
$$W_{ф}(P) = Z(w_{ф}(t)) = \frac{1}{P} - \frac{1}{P} e^{-Pt_{и}}$$

$$W_{ф}(P) = \frac{1 - e^{-Pt_{и}}}{P}$$ - передаточная функция формированного фильтра для прямоугольных импульсов.

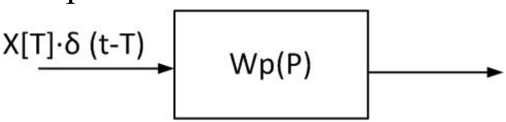
Рассмотрим последовательность импульсов:



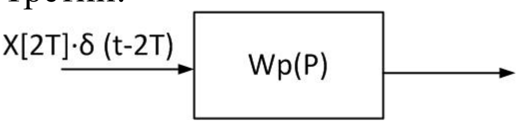
Формируем первый импульс:



Второй:



Третий:



Чтобы рассчитать Wp(P), определим последовательность δ-импульсов. Обозначим последовательность на входе фильтра через x*.

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] \cdot \delta(t - kT)$$

Таким образом, информация о непрерывном сигнале содержится в площади моделируемого δ-импульса.

Так как Wp(P) – состоит из интегрируемого и звена запаздывания, то его будем передавать к непрерывной части системы. В дальнейшем будем оперировать с моделируемыми последовательностями δ(t) – функции.

Преобразуем по Лапласу моделируемую последовательность x*(t):

$$X^*(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t) \cdot e^{-Pt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] \cdot \delta(t - kT) \right] \cdot e^{-Pt} dt =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Pt} \cdot \delta(t - kT) dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] \cdot e^{-PkT}$$

Введем обозначения: $e^{TP} = z$, тогда $X^* = f(z)$

$X^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kT] \cdot z^{-k}$ - формула прямого дискретного преобразования Лапласа (или z преобразования).

Свойства z - преобразований

1. ***Свойство линейности***

Пусть $x[kT]$, z-изображение от $x[kT]$ запишем через $x[kT] \overset{*}{\underset{*}{=}} X(z)$ или $X(z)=z\{x[kT]\}$

Обратное преобразование $x[kT] = z^{-1}\{X(z)\}$

Пусть $x[kT]$-оригинал, X(z)-изображение, тогда $a \cdot x[kT] \overset{*}{\underset{*}{=}} a \cdot X(z)$

2. Теорема о смещении аргумента в области оригинала

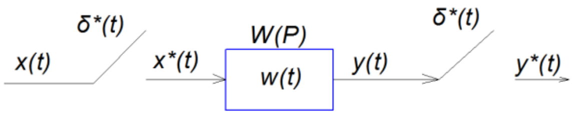
$x[kT - T] \overset{*}{\underset{*}{=}} X(z) \cdot z^{-1}$, $x[kT + T] \overset{*}{\underset{*}{=}} X(z) \cdot z^{+1}$

$x[kT - nT] \overset{*}{\underset{*}{=}} X(z) \cdot z^{-n}$

3. Теорема о начальном и конечном значениях оригинала

$x(0) = \lim_{z \to \infty} \frac{z-1}{z} \cdot X(z)$ $\qquad$ $\lim_{k \to \infty} x[kT] = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} \cdot X(z)$

Система преобразования моделируемых δ-импульсов. Передаточные функции импульсных систем.



Нужно определить изображение выходного сигнала y*(t) по известным характеристикам x(t).

$$\begin{cases} x^*(t)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x[mT]\cdot\delta(t-mT) \\ X^*(z)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} x[mT]\cdot z^{-m} \end{cases}$$

Тогда: $y^*(t)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} y[kT]\cdot\delta(t-kT)$ $\quad Y^*(z)=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} y[kT]\cdot z^{-k}$

Определим y(t) сначала, затем t→kT и подставим в y[kT] и на основании уравнения свертки:

$$y(t)=\sum_{m=\infty}^{\infty} x[mT]\cdot w(t-mT)$$

$$Y^*(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[mT]\cdot w[(k-m)T]\cdot z^{-k}$$

Обозначим k-m=l, m=k-l, k=l+m.

$$\mathrm{Y}^*(z)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} w[lT]\cdot z^{-l}\cdot\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[lT]\cdot z^{-m}$$

$$\mathrm{W}^*(z)=\frac{Y^*(z)}{X^*(z)}$$ - дискретная передаточная функция импульсной системы.

$$\mathrm{W}^*(z)=\sum_{l=-\infty}^{\infty} w[lT]\cdot z^{-l}$$

$$\mathrm{W}^*(z)=\sum_{k=+\infty}^{\infty} w[kT]\cdot z^{-k}=\frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} y[kT]\cdot z^{-k}}{\sum_{l=-\infty}^{\infty} x[lT]\cdot z^{-l}}$$ - отношения полиномов от z.

$$\mathrm{W}^*(z)=\frac{b_m\cdot z^{-m}+b_{m+1}\cdot z^{-m+1}+\ldots b_0}{a_n\cdot z^{-n}+a_{n-1}\cdot z^{-n+1}+\ldots a_0}$$

От дискретной передаточной функции можно перейти к разностному уравнению-аналогу дифференциального уравнения для непрерывных систем. Можно перейти от разностного к рекуррентному уравнению, определяющему выходную последовательность при известном входном сигнале.

$$a_n \cdot y\left[(k-n)T\right] + a_{n-1} \cdot y\left[(k-n)T\right] + \ldots a_1 \cdot y\left[(k-1)T\right] + a_0 \cdot y\left[kT\right] =$$

$$b_m \cdot x\left[(k-m)T\right] + b_{m-1} \cdot x\left[(k-m)T\right] + \ldots b_1 \cdot y\left[(k-1)T\right] + b_0 \cdot y\left[kT\right]$$

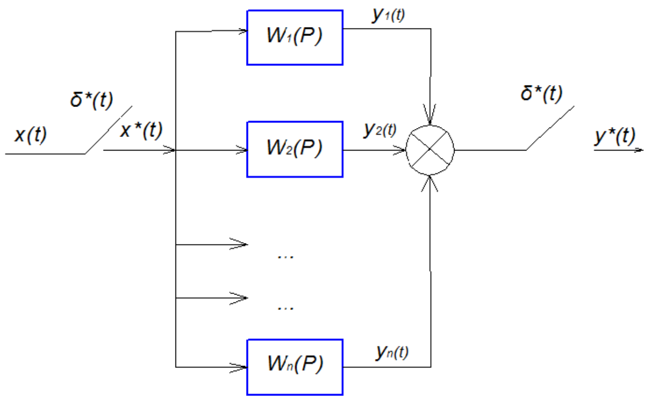
Это разностное уравнение, описывающее поведение импульсной системы.

$$y\left[kT\right] = \frac{1}{a_0}\left[-a_n y\left[(k-n)T\right] - .. - a_1 y\left[(k-1)T\right] + b_m x\left[(k-m)T\right] + \ldots + b_0 x\left[kT\right]\right]$$

- рекуррентное уравнение (это уравнение для определения текущего значения по предыдущим).

Соединения импульсных систем

1. Параллельное соединение.



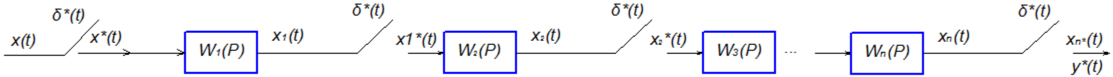
$$y^*(t) = y_1^*(t) + y_2^*(t) + \ldots + y_n^*(t) \Rightarrow$$

$$Y^*(z) = Y_1^*(z) + Y_2^*(z) + \ldots + Y_n^*(z)$$

где $Y_1^*(z) = W_1^*(z) \cdot X^*(z)$

$W^*(z) = \dfrac{Y^*(z)}{X^*(z)} = W_1^*(z) + W_2^*(z) + \ldots + W_n^*(z)$ – дискретная передаточная функция соединения.

2. Последовательное соединение.



Видно, что $y^*(t) = x^*(t)$.

$$X_n^*(z) = W_n^*(z) \cdot X_{n-1}^*(z)$$

$$X_{n-1}^*(z) = W_{n-1}^*(z) \cdot X_{n-2}^*(z)$$

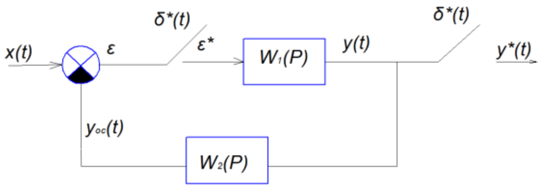
....

$$X_1^*(z) = W_1^*(z) \cdot X^*(z)$$

Последовательно подставляя каждое последующее в предыдущее (двигаясь вверх), получим, что:

$$W^*(z) = W_1^*(z) \cdot W_2^*(z) \cdot \ldots \cdot W_n^*(z)$$

3. Встречно параллельное соединение.



$$Y^*(z) = W_1^*(z) \cdot E^*(z)$$

но $\varepsilon(t)=x(t)-y_a(t) \Rightarrow \varepsilon^*(t) = x^*(t) - y_a^*(t)$,

тогда $E^*(z) = X^*(z) - Y_{oc}^*(z)$ Определим $Y_{oc}^*(z)$: $Y_{oc}^*(z) = W_1 \cdot W_2^*(z) \cdot E^*(z)$

$$W_1(P) \cdot W_2(P) \Rightarrow w(t) \Rightarrow w_1 \cdot w_2^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w[kT] \cdot z^{-k}$$

Подставим Y_{oc}^* в $E^*(z)$: $E^*(z) = X^*(z) - w_1 w_2^*(z) \cdot E^*(z) \Rightarrow$

$E^*(z) = \dfrac{X^*(z)}{1 + w_1 w_2^*(z)} \Rightarrow Y^*(z) = \dfrac{w_1^*(z) \cdot x^*(z)}{1 + w_1 w_2^*(z)}$ -дискретная передаточная функция соединения.

$W^*(z) = \dfrac{w_1^*(z)}{1 + w_1 w_2^*(z)}$ – для ООС, где $w_1 w_2^*(z) = Z\{W_1(P) \cdot W_2(P)\}$

Частотные характеристики импульсных систем

Имеют тот же смысл, что и для непрерывных систем. Их можно получить по дискретной передаточной функции W*(z).

Напомним, что $z=e^{TP} \Rightarrow W^*(z) = W^*(e^{TP})$

$P \to iw \Rightarrow W^*(e^{iwT}) = W^*(iw)$ – АФЧХ импульсной системы.

$$W^*(iw) = \mathrm{Re}^*(iw) + i\,\mathrm{Im}^*(w) = A^*(w) \cdot e^{i\vartheta^*(w)}$$

$W^*(iw)$ – передаточная функция частоты, т.е. e^{iwT} – периодичная

$$e^{iwT} = \cos(Tw) + i\sin(Tw).$$

Устойчивость импульсных систем

Поведение импульсной системы можно описать разностным уравнением (аналогом ДУ непрерывной системы). Решаются аналогично.

Решение разностного уравнения: $y[kT] = y_{свобод}[kT] + y_{вынужд}[kT]$

Рассматривается задача устойчивости вынужденного движения системы (как для непрерывной). $\underset{k\to\infty}{y_{свобод}[\mathrm{kT}]} = 0$

Решение $\mathrm{y}_{свобод}[\mathrm{kT}] = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot Z_i^k$,

где C_i – постоянный коэффициент, опред. из н.у.

Z_i – корни харак. уравнения системы.

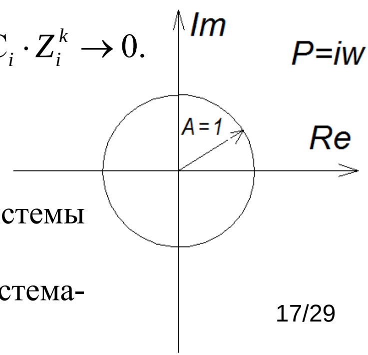
Необходимое и достаточное условие устойчивости:

Чтобы $y[kT] \to 0$, нужно чтобы каждая составляющая $\mathrm{C}_i \cdot Z_i^k \to 0$.

Т.к. $\mathrm{C}_i = const \Rightarrow |Z_i|^k \to 0$, а это возможно, если $|Z_i| \prec 1$

Для всех элементов суммы $|Z_i| \prec 1, \mathrm{i} = \overline{1, n}$

Дадим геометрическую интерпретацию этого условия:



Чтобы все корни характеристического уравнения системы располагались внутри окружности единичного радиуса.

Если хотя бы один корень будет вне, то импульсная система-неустойчивая. Если A=1, то на грани устойчивости.

Можно применять известные методы.

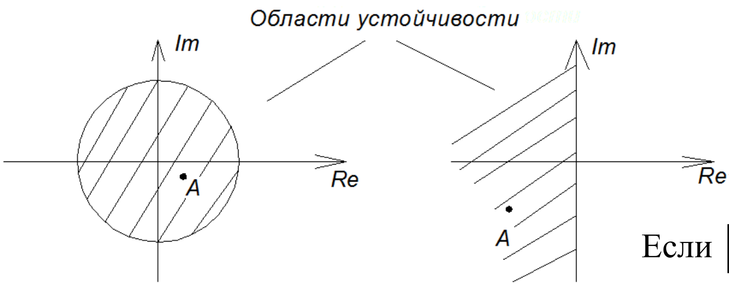
$D(z)=0 \Rightarrow$ корни z при замене на z=e^{PT}

$D(e^{PT})=0,$ но получится бесконечное множество корней P_i

1. Билинейное преобразование.

Оно заключается в замене z=$\dfrac{1+\upsilon}{1-\upsilon}$

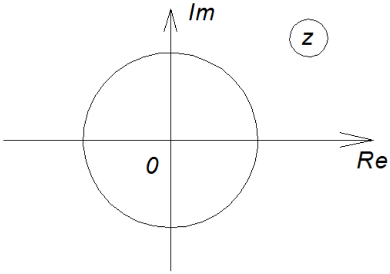
где υ- оператор билинейного преобразования.



Если $|z|=1,$ то z=e^{iwT}

В плоскости же P значению P=iw соответствует нижняя ось, т.е. окружность единичного радиуса в плоскости z отображает мнимую ось в плоскости P.

Теперь возьмем (.) внутри окружности (.(A)), этой точке соответствует $z = c \cdot e^{iw}$, где с $\succ 1$, что соответствует $z = c \cdot e^{-\alpha + iwT}$, где $\alpha \succ 1$, $z = e^{-\alpha} \cdot e^{iwT}$,тогда в плоскости P, соответствует точка, лежащая левее мнимой оси. Внутренней области или области устойчивости импульсной системы соответствует левая полуплоскость области P. Если z вне окружности, то соответствует правая полуплоскость, то уравнение $D(e^{PT}) = 0$ имеет бесконечное число корней.



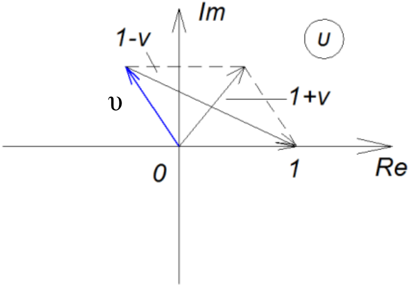
Рассмотрим 3 случая:

1) В плоскости υ v находится в левой полуплоскости.
2) … находится в правой.
3) … на мнимой оси.

Согласно бинарному преобразованию:

$$|z| = \frac{|1+\upsilon|}{|1-\upsilon|}$$

Рассмотрим комплексную плоскость υ:



1) В левой полуплоскости υ.

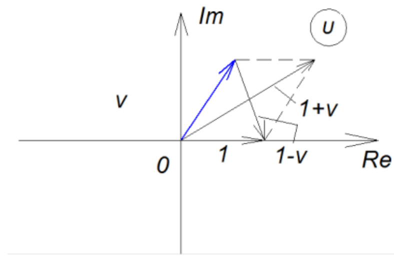
Суммировать вектора 1 и υ (чертим вектор 1+υ)

разность 1-υ. Видно, что модуль вектора

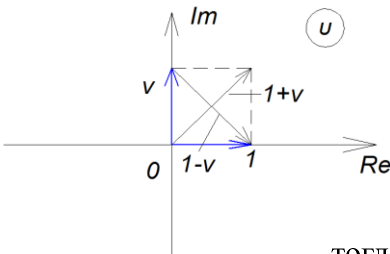
$$|1+\upsilon| \prec |1-\upsilon| \Rightarrow |z| = \frac{|1+\upsilon|}{|1-\upsilon|} \prec 1 \Rightarrow$$

внутренняя область окружности.

2) Видно, что $|1+\upsilon| \succ |1-\upsilon| \Rightarrow |z| = \frac{|1+\upsilon|}{|1-\upsilon|} \succ 1$



3)



тогда область устойчивости в υ – левая полуплоскость.

Рассмотрим пример:

Пусть D(z)=$2z^3 + z^2 + 3z + 1$. Устойчива ли импульсная система, применяя бинарное преобразование?

$$D(\upsilon)=2\cdot\left(\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\right)^3+\left(\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\right)^2+3\left(\frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}\right)+1=0$$

$$D(\upsilon)=2\cdot(1+\upsilon)^3\frac{\cancel{(1-\upsilon)^3}}{\cancel{(1-\upsilon)^3}}+(1+\upsilon)^2(1-\upsilon)+3(1+\upsilon)(1-\upsilon)^2+(1-\upsilon)^3=0$$

Делаем замену $A\cdot\upsilon^3+B\cdot\upsilon^2+C\cdot\upsilon+D=0$

К этому уравнению применим непосредственно критерий Михайлова.

Пусть $W_z^*(z)=\dfrac{5(z-4)(z-3)}{(z-1)(z-2)(z-0.5)}$

В характеристическом полиноме (z-1)(z-2)(z-0.5) есть корни с $|z|\succ 1\Rightarrow$

Значит не устойчива.

Частотные аналоги критериев Михайлова и Найквиста

1) Частотный аналог критерия Михайлова.

$$D(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

Необходимое и достаточное условие, что все корни D(z)=0 должны лежать в окружности R=1. Вывод критериев – аналогичен для непрерывных систем. В основе лежит принцип аргумента.

Рассмотрим изменение аргумента комплексного выражения $z = e^{iTw}$

$$\Delta \arg D(e^{iTw})$$

По т.Безу D(z)=$a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdot \ldots \cdot (z - z_n)$, $z_1, z_2, .., z_n$ – корни полинома D(z)=0

т.к. z=e^{iwT}, тогда $D(e^{iwT}) = a_n (e^{iwT} - z_1)(e^{iwT} - z_2) \cdot \ldots \cdot (e^{iwT} - z_n)$

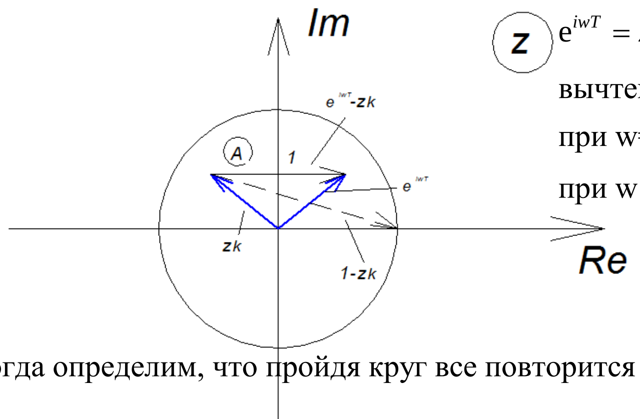
Годограф $D(e^{iTw})$ - не должен обращаться в ноль, если он равен 0, при некотором w, то одна из скобок=0 $\Rightarrow |z_k| = 1 \Rightarrow$ система на границе устойчивости, а не внутри окружности.

Рассмотрим два случая:

1) $|z_k| \prec 1, \quad$ 2) $|z_k| \succ 1$

Графическая интерпретация этих случаев поведение скобок $(e^{iwT} - z_k)$.

1) Возьмем точку внутри окружности.



z $e^{iwT} = z = |z| \cdot e^{iwT} \Rightarrow$ фаза wT, а $|z| = 1$

вычтем $e^{iwT} - z_k$ получим вектор $(e^{iwT} - z_k)$

при w=0 получим $(1\text{-}z_k)$

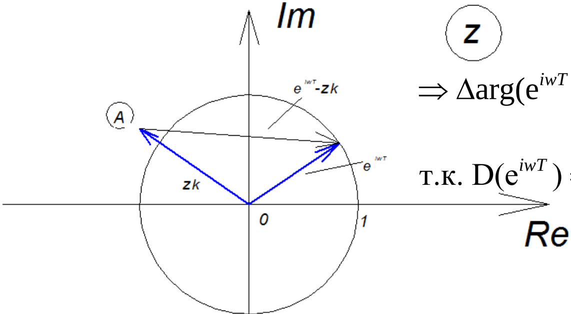
при w $\uparrow$ вектор $(e^{iwT} - z_k)$ вокруг $(\cdot)$A.

Тогда определим, что пройдя круг все повторится $\Rightarrow$ wT=$2\pi \Rightarrow$ w=$\dfrac{2\pi}{T}$,

тогда пределы изменяя $0 \le w \le \dfrac{2\pi}{T}$

Теперь определим $\Delta \arg(e^{iwT} - z_k) = 2\pi$

2) $|z_k| \succ 1$ за окружностью выбираем $(\cdot)$A



при изменении w вектор $(e^{iwT} - z_k)$ будет колебаться $\Rightarrow$

z

$$\Rightarrow \Delta \arg(e^{iwT} - z_k) = 0 \ (0 \le w \le \frac{2\pi}{T})$$

т.к. $D(e^{iwT}) = a_n ()() ... \Rightarrow \Delta D \arg(e^{iwT}) = \sum_{k=1}^{n} \Delta \arg(e^{iwT} - z_k)$

Если все корни внутри окружности, то $\Delta D \arg(e^{iwT}) = 2\pi n \ \ (0 \le w \le \frac{2\pi}{T})$

Если хотя бы один корень вне, то $\Delta D \arg(e^{iwT}) = 2\pi(n-1) \ \ (0 \le w \le \frac{2\pi}{T})$

Критерий Михайлова: Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф вектора $D(e^{iwT})$ при изменении $(0 \le w \le 2\pi / T)$ нигде не обращаясь в ноль последовательно совершил в положительном направлении n-оборотов, где n-порядок характеристического уравнения.

2) Аналог критерия Найквиста.

Пусть передаточная функция замкнутой импульсной системы имеет вид:

$W_{з.с.} = \dfrac{W(z)}{1+W(z)}$, где W(z)-передаточная функция разомк. импульсной системы.

$W(\mathrm{z}) = \dfrac{\mathrm{B}(z)}{A(z)}$ – отношение полиномов от z.

Пусть B(z) имеет порядок m, A(z)-n, причем $m \le n$.

Передаточная функция з.с. равна:

$$W_{з.с.} = \frac{B / A}{1+\dfrac{B}{A}} = \frac{B(z)}{A(z)+B(z)}$$

Для разомкнутой системы A(z) -характеристичю полином.

Введем вспомогательную функцию: $L(z)=1+W(z)=1+\dfrac{B(z)}{A(z)} = \dfrac{A(z)+B(z)}{A(z)}$

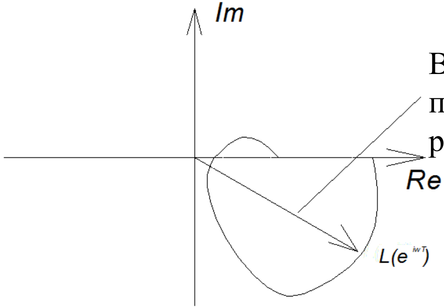
Рассмотрим три варианта.

1) Пусть разомкнутая система устойчива. $\Rightarrow \Delta \arg A / \mathrm{e}^{iwT} = 2\pi n$

тогда $\Delta \arg \mathrm{L}(\mathrm{e}^{iwT}) = 2\pi n - 2\pi n = 0$ (т.к. степень полинома A(z)+B(z) равна n)

Геометрическая интерпретация:

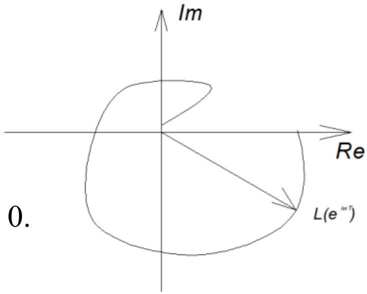
1)



Вектор, образующий годограф $\mathrm{L}(\mathrm{e}^{iwT})$ он повторяется и суммарный угол поворота равен 0.

2) Суммарный угол поворота не равен 0

$\Rightarrow \Delta \arg \mathrm{L}(\mathrm{e}^{iwT}) \neq 0,$ а нужно, чтобы был равен 0.



Значит годограф не должен охватывать точки с координатами (0;0).

т.к. $L(z)=1+W(z) \Rightarrow$ годограф $W(z)=W(e^{iwT})$ не охватывал $(\cdot)$ с координатами (-1;i0).

Формулировка критерия:

Для устойчивости замкнутой системы при устойчивой разомкнутой системе необходимо и достаточно, чтобы годограф АФЧХ разомкнутой системы при изменении $(0 \le w \le 2\pi / T)$ не охватывал точки с координатами (-1;i0).

2) Пусть разомкнутая система неустойчива.

n-общее число корней A(z).

Пусть l-корней будет все окружности единичного радиуса, тогда (n-l) – внутри окружности.

$$\Delta \arg(A(e^{iwT})+B(e^{iwT})) = 2\pi n, \text{ для р.с. } \Delta \arg A(e^{iwT}) = (n-l)2\pi.$$

Тогда получаем: $\Delta \arg L(e^{iwT}) = l \cdot 2\pi (n \cdot 2\pi - (n-l)2\pi)$

$$0 \le w \le 2\pi/T$$

Для устойчивости замкнутой системы при неустойчивой разомкнутой системе необходимо и достаточно, чтобы АФЧХ разомкнутой системы при изменении $(0 \le w \le 2\pi / T)$ охватывала точку с координатами (-1;i0) l-раз, где l - число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, находящейся вне окружности R=1.

3) Пусть разомкнутая система нейтральна.

Если разомкнутая система нейтральна, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, что АФЧХ разомкнутой системы, дополняя дугой бесконечного радиуса к вещественной оси не охватывала точки с координатами (-1;i0).

Оценки качества

Оценивается статическая и динамическая точность систем регулирования. Применяются аналоги интегральных критериев качества, в которых $\int$ заменен на $\sum$.
Например,

$I_1 = \int\limits_0^\infty \varepsilon(t)dt; \quad I_2 = \int\limits_0^\infty \varepsilon^2(t)dt;$ где ε(t)-ошибка регулятора.

Аналоги:

$$I_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon\left[kT\right] \cdot T; \quad I_2 = T\sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^2\left[kT\right]$$

Расчет переходного процесса по дискретной W*(z)

Пусть известно W*(z) и X*(z), тогда по определению Y*(z)=W*(z)·X*(z)
Y*(z), как правило, представляет отношение полиномов.

$$Y^*(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[kT] \cdot z^{-k}$$

тогда можно получить $y[kT]$

Пример:

Пусть $Y^*(z) = \dfrac{5z^2 + 8z + 1}{z^3 + 3z^2 + 5z + 1}$ Надо определить выходную последовательность $y[kT]$

Решение:

Делим полиномы $\Rightarrow Y^*(z) = 5z^{-1} - 7z^{-2} - 3z^{-3} \ldots$

$y[0] = 0,$

$y[T] = 5,$

$y[2T] = -7,$

$y[3T] = -3.$