ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Лекция 10

Корневые методы параметрического синтеза

Томск - 2019

Корневые методы параметрического синтеза

Т.к. $W(P) = \frac{b_m \cdot p^m + b_{m-1} \cdot p^{m-1} + \dots + b_0}{a_n \cdot p^n + a_{n-1} \cdot p^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{B(P)}{A(P)}$

Эту передаточную функцию $W(P)$ можно представить в виде $W(P) = \frac{b_m \cdot \prod_{j=1}^{m} (P - P_j)}{a_n \cdot \prod_{i=1}^{n} (P - P_i)}$

Где P_j – **корни полинома** B(P)=0, - называются **корнями передаточной функции**;

P_i – **корни полинома** A(P)=0, - корни характеристического уравнения системы – называются **полюсами передаточной функции**;

Нули и полюса определяют коэффициенты W(P): a_i и b_j.

Между нулями и полюсами существует однозначная связь.

Если полюса – корни различные вещественные, то $y_{св.}(t)=\sum_{i=1}^{n} C_i e^{\alpha_i t}$

Комплексные сопряженные $y_{св.}(t)= A \cdot e^{\alpha_i t} \sin(\beta t + \varphi)$.

Потому что корни P_i определяют вид переходного процесса, Pj определяют постоянные интегрирования Ci, A и т.п.

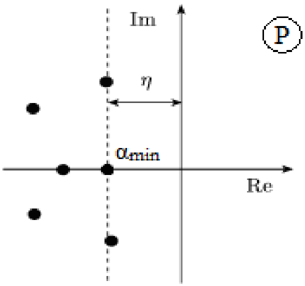
Корневые методы параметрического синтеза

Основная идея корневых методов заключается в том, чтобы увидеть расположение **корней и полюсов** передаточной функции системы **с прямыми оценками качествами** регулирования и, определив расположение **нулей и полюсов**, по ним найти коэффициенты передаточной функции a_i и b_j, а по ним выразить искомые параметры настройки.

Широкое распространение получили методы, учитывающие расположение **полюсов** передаточной функции и связь их расположения **с прямой оценкой качества**.

Способы расположения:

1.Задание степени устойчивости



Корневые методы параметрического синтеза

Степень устойчивости $\eta = \alpha_{min}$ т.е. минимум значения действительной части корней $P_i = -\alpha \pm i\beta$.

Степень устойчивости η можно связать с быстродействием системы (со временем регулирования).

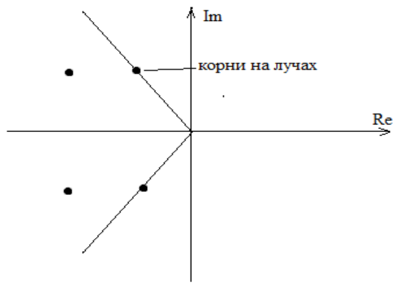
Построим, чтобы за время регулирования каждая компонента переходного процесса уменьшалась не менее чем в k раз.

$$\frac{C_i \cdot e^{-\alpha_i \cdot 0}}{C_i \cdot e^{-\alpha_i \cdot t_p}} \geq k \Rightarrow e^{+\alpha_i \cdot t_p} \geq k \Rightarrow \alpha_i \cdot t_p \geq \ln\ k \Rightarrow \alpha_i \geq \frac{\ln\ k}{t_p}$$

$$\text{тогда}\quad \alpha_{i\ min} = \eta = \frac{\ln\ k}{t_p}$$

Основная трудность – замещение $t_{p.}$

2. Пусть значение какого-либо корня $P_к = -\alpha_к \pm i\beta_к$, тогда угол раскрытия лучей равен $\dfrac{\alpha_к}{\beta_к}$.

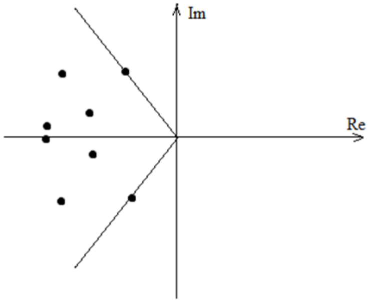


Для колебательного звена $\frac{\alpha_к}{\beta_к} = m$ – степень колебательности и m – напрямую связана с прямой оценкой качества $\psi = 1 - e^{-2\pi m}$ – быстрота затухания переходного процесса.

Чем больше m, тем больше ψ.

Корневые методы параметрического синтеза

В системе автоматического управления, как правило, свойства систем могут отличаться от свойств колебательного звена. Каждая пара корней имеет свою составляющую переходного процесса. Можно построить, чтобы самая слабозначащая составляющая переходного процесса затухла со степенью ψ не ниже заданного, т.е. $m = min\frac{\alpha_к}{\beta_к} = \geq m_{задан.}$



m определяют по минимуму отношения $\frac{\alpha_к}{\beta_к}$ (т.е. для первых корней, где проводим лучи). Отметим, что η и m определяют не только прямые оценки, но и запас устойчивости.

Как задать требуемое расположение корней, чтобы $\eta \geq \eta_{зад}$ или $m \geq m_{зад}$. Можно воспользоваться Д-разбиением или критериями устойчивости.

Смещенное уравнение Михайлова

Если имеется система с Д(P), p→i*w* следовательно строим критерий Михайлова по Д(i*w*)=Re(Д(i*w*)+i Im(i*w*)

Система будет устойчивой, если Д(i*w*) при -∞≤*w*≤∞ и нигде не обращаясь в ноль пройдет n-квадрантов.

$$Д(P) = a_n P^n + a_{n-1} P^{n-1} + \ldots + a_1 P + a_0$$ можно представить

$$Д(P) = a_n (P - P_1)(P - P_2) \cdot \ldots \cdot (P - P_n), \quad P \to i\omega \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Д(i\omega) = a_n (i\omega - P_1)(i\omega - P_2) \cdot \ldots \cdot (i\omega - P_n)$$

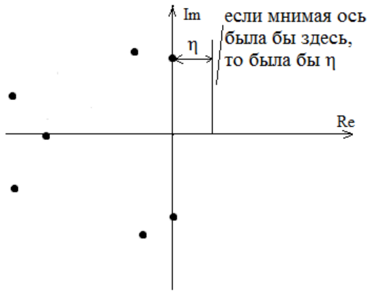
Пусть при некотором значении ω $Д(i\omega) = 0$, следовательно, одна из скобок

$$(P - P_к) = 0, \quad (i\omega - P_к) = 0 \Rightarrow P_к = i\omega \Rightarrow Д(i\omega) = 0,$$

если хотя бы один из корней находится на мнимой оси. Если все остальные корни левые, то система находится на границе устойчивости.

Корневые методы параметрического синтеза

Если $Д(i\omega)=0$, есть условие нахождения хотя бы пары комплексных корней на мнимой оси.



Можно сместить корни от одного положения в другое. Это делается следующим образом: в Д(P) подставить не $P=(i\omega)$, а

$$1)P=-\eta+i\omega$$

$$2)P=-m\omega+i\omega,\ \text{где}\quad m\omega=\alpha; i\omega=\beta$$

$$-\frac{\alpha}{\beta}=\frac{-m\omega}{\omega}=-m\Rightarrow\frac{\alpha}{\beta}=m$$

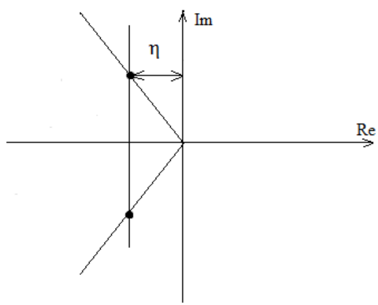
Корневые методы параметрического синтеза

Вместо $P = -\eta + i\omega$ подставим в Д(P), тогда получим следующее

$$Д(\eta, i\omega) = a_n(-\eta + i\omega - P_1)(-\eta + i\omega - P_2)\cdot\ldots\cdot(-\eta + i\omega - P_n)$$

Потребуем, чтобы $Д(\eta, i\omega) = 0$, следовательно, хотя бы одна из скобок =0, тогда

$(-\eta + i\omega - P_к) = 0 \Rightarrow P_к = -\eta + i\omega \Rightarrow$ корни находятся на линии η



Корневые методы параметрического синтеза

Если все остальные корни левые, то эти корни обеспечивают требуемый запас устойчивости, следовательно, условие нахождения корней на линии происходит через эти корни:

$$Д(m, i\omega) = 0$$

$$Д(\eta, i\omega) = 0$$

$Д(m, i\omega) = 0$ зависит от параметров настойки $k_1, k_2 \ldots k_l \Rightarrow l -$ число параметров настройки системы

$$Д(m, i\omega, k_1, k_2 \ldots k_l) = 0$$

$k_1, k_2 \ldots k_l$ - параметры настройки системы.

$Д(m, i\omega, k_1, k_2 \ldots k_l) = 0$, следовательно, комплексное число = 0,

следовательно, его Re=0 и Im=0

Корневые методы параметрического синтеза

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(Д(m, i\omega, k_1, k_2 \ldots k_l)) = 0 \\ \mathrm{Im}(Д(m, i\omega, k_1, k_2 \ldots k_l)) = 0 \end{cases} *$$

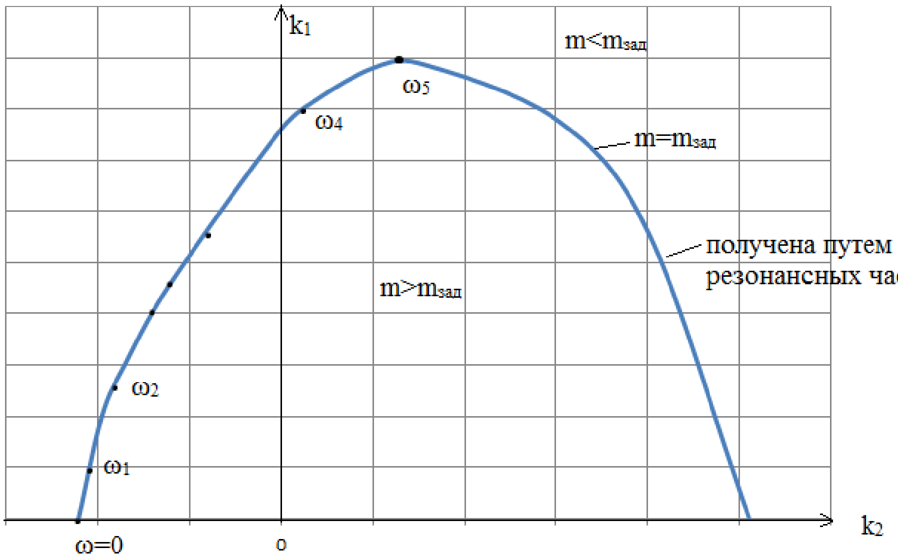
Решение этой системы относительно искомых параметров настройки позволяет определять параметры, обеспечивающее заданное расположение корней характеризующих уравнения. В данном случае $m \geq m_{зад}$

Число параметров настройки l для общих регуляторов имеет 3.

Таким образом, число неизвестных в системе (*) две: ω и k_1, т.е. система решается однозначно (степени свободы нет).

Если параметров настройки 2 , то в системе неизвестных 3 (ω и k_1, k_2), следовательно, получим не точку, а кривую.

Корневые методы параметрического синтеза



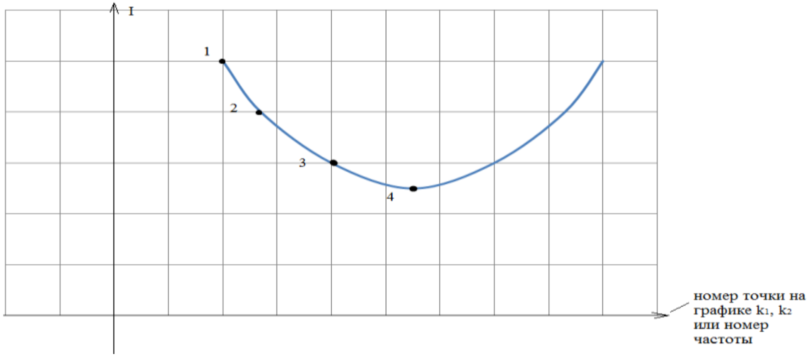
т.е. получим **множество решений**.

Чтобы сузить область поиска (по одному параметру), требуем, что $m = m_{зад}$

Корневые методы параметрического синтеза

В дальнейшем расчет параметров может находится **в минимизации того или иного выбранного критерия качества.**

При этом происходит учет нулей передаточной функции системы. Минимизируя принятый критерий качества, мы учитываем нули передаточной функции.



Берем точку на графике для k_1, k_2 и рассчитаем I, ставим точку.

Из графика видно, что это min I при 4-ой точке, следовательно, этой точке соответствует оптимальные параметры настройки.

Если имеем 4 неизвестных (ω и k_1, k_2, k_3), то получим не кривую, а поверхность.