ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

### А.В. Мурин, В.А. Осипов

### ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Рекомендовано в качестве учебного пособия Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Издательство Томского политехнического университета 2010 1 УДК 621.81.001.63(075.8) ББК 34.42я73 М91

#### Мурин А.В., Осипов В.А.

M91

Прикладная механика: учебное пособие для вузов / под. Ред. А.В. Мурина. Национальный исследовательский Томский политехнический университет. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2010. – 326 с.

В пособии рассмотрены основные вопросы теории механизмов, сопротивления материалов, проектирования деталей, элементов и передаточных механизмов машин. Материал изложен с учетом новых ГОСТов.

Учебное пособие предназначено для студентов очного и заочного обучения немашиностроительных специальностей, вузов (горных, физикохимических, электротехнических и др.).

> УДК 621.81.001.63(075.8) ББК 34.42я73

Рецензенты:

доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной механики и материаловедения Томского государственного архитектурно-строительного университета;

Г.Г. Волокитин

доктор технических наук, профессор кафедры «Технология и методика трудового обучения» Томского государственного педагогического университета *В. З. Мидуков* 

> © ГОУ ВПО «Национальный исследовательский Томский политехнический университет», 2010
>  © Мурин А.В., Осипов В.А., 2010
>  © Оформление. Издательство Томского политехнического университета, 2010

#### введение

Последовательное развитие промышленности неразрывно связано с непрерывным совершенствованием машиностроения – основы технического перевооружения всех отраслей народного хозяйства. Инженерная техническая деятельность на основе научных исследований расширяет и обновляет номенклатуру конструкционных материалов, внедряет эффективные методы повышения их прочностных свойств. Появляются новые материалы на основе металлических порошков, порошковсплавов. Порошковая металлургия приводит не только к замене дефицитных черных и цветных металлов более дешевыми материалами, но и позволяет получить совершенно новые материалы – «материалы века», которые невозможно получить традиционным путем. Кроме того, изготовление изделий из порошков – практически безотходное производство. Другое направление получения дешевых конструкционных материалов состоит в применении пластмасс, новых покрытий и т. п. Тончайшая пленка из порошковых смесей на поверхности детали, образуемая плазменным напылением, повышает надежность сопрягаемых и трущихся друг о друга деталей машин, защищает их от коррозии и существенно увеличивает их износостойкость.

Развитие машиностроения на современном этапе характеризуется комплексной механизацией и автоматизацией производства на основе широкого применения автоматических манипуляторов (промышленных роботов), встроенных систем автоматического управления с использованием микропроцессоров и мини-ЭВМ.

При внедрении в промышленность новых машин широко применяется модульный принцип создания оборудования, например, станок или несколько станков и манипулятор. На базе этого принципа создаются и вступают в строй не отдельные машины, а их системы – автоматические линии, цехи, заводы, обеспечивающие законченный технологический процесс производства конкретного изделия. Все это, вместе взятое, позволяет при снижении затраты материалов на изготовление и общей стоимости повысить их мощность, качество, производительность и сократить потребление энергии.

Успешное развитие современной промышленности в конечном счете зависит от качества и глубины профессиональной подготовки специалиста с высшим и средним образованием. Приобретение студентами технических университетов всех специальных знаний и навыков базируется на хорошей общетехнической подготовке, в основе которой наряду с другими лежат знания и навыки, полученные при изучении предмета «Механика». Чтобы понять работу какой-либо машины, необходимо знать ее устройство, из каких элементов она состоит и как они взаимодействуют. А чтобы создать такую машину, нужно сконструировать и рассчитать каждую ее деталь. Настоящее учебное пособие посвящено в том числе и решению этой задачи – расчету и конструированию деталей машин общего назначения, деталей, без которых не обходится ни одна машина или механизм.

Расчеты деталей машин базируются на знании основ сопротивления материалов – науки о прочности и жесткости механических конструкций и методах их расчета.

Изучением самой простой формы движения материального мира, изучением перемещения тел в пространстве и взаимодействием их друг с другом занимается теоретическая механика. Перемещение тела относительно другого тела или изменение положения одного тела по отношению к другому называется **механическим движением.** Обычно теоретическая механика разделяется на три части: статику, кинематику и динамику. Статика – раздел теоретической механики, занимающийся изучением сил и условий их равновесия. Кинематика занимается изучением механического движения без учета действия сил. Динамика изучает законы механического движения с учетом действующих сил.

Изучением движения конкретных механических устройств, их анализом и синтезом занимается наука о механизмах и машинах – теория механизмов и машин. Основы знаний о механизмах, их устройстве, анализе приведены в данном учебном пособии. Курсы такого типа, но без раздела «Теоретическая механика» обычно называют прикладной механикой.

#### Глава 1 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МЕХАНИЗМОВ

#### 1.1 Структура (строение) механизмов

#### 1.1.1 Основные понятия и определения

В различных областях техники широко применяются механические устройства, называемые машинами. Машина – это устройство, выполняющее механические движения для преобразования энергии, материалов или информации с целью замены или облегчения труда человека. Основными признаками машины являются механические движения ее элементов и выполнение полезной работы. В зависимости от функционального назначения различают:

– энергетические машины, преобразующие любой вид энергии в энергию механическую и наоборот; к энергетическим машинам относятся двигатели внутреннего сгорания, электродвигатели, электрогенераторы, турбины и другие устройства;

– технологические (рабочие) и транспортные машины, которые преобразуют материалы, изменяют свойства, форму, состояние и положение объектов труда; к ним относятся металлообрабатывающие станки, прокатные станы, полиграфические, горные и текстильные машины, самолеты, автомобили, поезда, транспортеры, подъемники и т. п.;

 информационные машины, предназначенные для получения и преобразования информации; кроме того, информационные машины выполняют контрольно-измерительные операции, функции регулирования и управления технологическими процессами.

Машины используются, как правило, в виде совокупности, системы машин. В классическом исполнении такая система состоит из машиныдвигателя, передаточного механизма и рабочей машины. Система нескольких взаимодействующих машин, связанных конструктивно, называется машинным агрегатом.

Основу каждой машины составляет устройство или группа устройств, называемых механизмами. Механизм – система твердых тел, подвижно соединенных путем касания друг с другом и движущихся определенным требуемым образом относительно одного из них, принятого за неподвижное. В преобразовании движения механизмов, кроме твердых тел, могут участвовать жидкие или газообразные среды. Механизмы представляют собой системы определенного движения. Определенность движения обеспечивается конструктивными средствами. Существенным является то, что одногипные механизмы могут применяться в конструкциях самых разнообразных по назначению машин. В состав

машины, кроме механизмов, могут входить дополнительные устройства, связанные, например, с их запуском, управлением или контролем.

#### 1.1.2 Составные части механизма

Механизмы, независимо от функционального назначения и конструктивного исполнения, имеют общую структурную основу. Они состоят из звеньев, подвижно соединенных друг с другом. Звено – деталь или группа жестко соединенных между собой деталей (твердое звено). Кроме того, звенья могут быть гибкими (тросы, ремни, цепи).

Стойка – неподвижное звено или звено, условно принимаемое за неподвижное. Стойкой может быть станина, корпус, плата механизма и др. Относительно стойки оцениваются параметры движения механизма (перемещения, скорости и др.).

Из подвижных звеньев в зависимости от их расположения в механизме выделяют входные и выходные звенья. Входным звеном называется звено, которому сообщается движение от двигателя, выходным – звено, совершающее движение, для выполнения которого предназначен механизм. Остальные подвижные звенья механизма называются промежуточными. Механизмы могут иметь несколько входных и выходных звеньев. Например, дифференциал автомобиля при одном входном звене, получающем движение от двигателя, имеет два выходных звена, соединенных с задними или передними колесами.

Входное звено является ведущим (движущим) звеном. Остальные подвижные звенья механизма, совершающие требуемые, определенные движения, называются ведомыми. Такая классификация используется



при структурном исследовании механизма. При силовом анализе механизмов разделение звеньев на ведущие и ведомые проводится по знаку элементарной работы сил, действующих на звено. У ведущих звеньев эта работа положительная, у ведомых – отрицательная или равна нулю. Поэтому входное звено, которое в структурном анализе по признаку действия является ведущим, при силовом расчете на различных участках движения мо-

жет быть и ведущим, и ведомым в зависимости от знака элементарной работы сил, действующих на звено.

Положения всех звеньев механизма относительно неподвижного звена (стойки) задаются обобщенными координатами – независимыми переменными, полностью и однозначно определяющими положение механизма. Число обобщенных координат соответствует числу степеней подвижности механизма. На рис. 1.1 показана типичная структурная схема плоского шарнирного четырехзвенника. Здесь 1–4 – звенья; А, В, С, D – кинематические пары. Положение механизма шарнирного четырехзвенника, имеющего одну степень свободы, полностью и однозначно определяется одной координатой  $\varphi_1$  (углом поворота кривошипа 1), которую можно принять за обобщенную координату.

За обобщенные координаты можно принять любые независимые координаты. Звено, координаты которого выбираются в качестве обобщенных координат механизма, называется начальным звеном. В боль-

шинстве случаев оно совпадает с входным звеном. Однако иногда для упрощения анализа за начальное звено удобнее принять промежуточное или даже выходное звено.

Звенья в механизмах соединяются между собой подвижно. Подвижное соединение двух соприкасающихся звеньев, допускающее их относительное движение, называется кинематической парой. Точки, линии, поверхности, по которым звенья соприкасаются, называют элементами кинематических пар.



*Puc.* 1.2

#### 1.1.3 Классификация кинематических пар

Одной из основных характеристик кинематических пар является количество простейших относительных движений, которых лишаются звенья механизма при соединении их в кинематические пары. Известно, что свободное твердое тело в пространстве имеет шесть степеней подвижности. Произвольное перемещение его в пространстве можно представить как результат сложения шести независимых движений: трех поступательных параллельно осям координат  $O_x O_y, O_z$  и трех вращательных относительно этих осей (рис. 1.2). В зависимости от вида соединений звеньев механизма одно из них может совершать относительно другого одно, два, три, четыре или пять движений из шести, перечисленных выше. Следовательно, кинематические пары накладывают на относительные движения звеньев определенные ограничения, которые зависят

от способа их соединения. Такие ограничения называются связями. Число *S* связей (геометрических или силовых), ограничивающих относительные движения звеньев, определяется равенством S = 6 - H, где *H* – число степеней подвижности кинематической пары – число независимых движений одного звена относительно другого, образующих кинематическую пару.

Академиком И.И.Артоболевским введена классификация кинематических пар, согласно которой все пары делятся на пять классов в зависимости от числа связей S (или от H – степеней подвижности кинематической пары). Разделение кинематических пар по классам представлено в табл. 1.1. Стрелками здесь отмечены возможные перемещения звеньев, которые сохраняются после образования пары.

Для каждого класса указаны число степеней подвижности кинематической пары Н и число связей S, показаны также условные изображения кинематических пар различных классов, в соответствии с ГОСТ 2.770-68.

Кинематические пары разделяют на низшие и высшие, в зависимости от вида их элементов. К низшим кинематическим парам, элементами которых являются поверхности, относятся пары поступательная, вращательная, сферическая, винтовая и плоскостная (см. табл. 1.1). Точки и линии – элементы высших кинематических пар. К высшим кинематическим парам относятся пары «шар на плоскости» и «цилиндр на плоскости» (табл. 1.1). Преимущества для низший пар – их способность передавать значительные усилия при меньшем износе в сравнении с высшими парами; недостаток – меньший КПД; для высших пар – возможность воспроизводить с их помощью достаточно сложные относительные движения, бо́льший КПД; недостаток – бо́льшие напряжения в зоне касания.

Таблица 1.1

| Схематическое<br>изображение<br>кинематических пар | Условное<br>изображение<br>по ГОСТ ЕСКД | Число<br>связей<br>S | Степень<br>свободы<br>W | Класс кине-<br>матической<br>пары | Структурная<br>формула |
|--|---|----------------------|-------------------------|-----------------------------------|------------------------|
| Шар на<br>плоскости                                | ব্ধ                                     | 1                    | 5                       | <b>1</b><br>Пятиподвижная         | ВВВ-ПП                 |
| Цилиндр на<br>плоскости                            | þ                                       | 2                    | 4                       | 2<br>Четырех-<br>подвижная        | ВВ-ПП                  |
| Призма на та плоскости у                           |   | 3                    | 3                       | <b>3</b><br>Трехподвижная         | В-ПП                   |
| Сферический<br>щарнир                              | م                                       | 3                    | 3                       | <b>3</b><br>Трехподвижная         | BBB                    |
| Цилиндричес- <sup>Z</sup><br>кая пара              |   | 4                    | 2                       | <b>4</b><br>Двухподвижная         | В-П                    |
| Вращательная<br>пара<br>х->                        | d                                       | 5                    | 1                       | <b>5</b><br>Одноподвижная         | В                      |
| Поступатель-<br>ная пара                           | NI I⊅ A                                 | 5                    | 1                       | <b>5</b><br>Одноподвижная         | П                      |
| Винтовая<br>пара                                   |   | 5                    | 1                       | <b>5</b><br>Одноподвижная         | (В) (П)                |

#### 1.1.4 Кинематические цепи



Puc. 1.3

Кинематическая цепь – это связанная система звеньев, соединенных между собой кинематическими парами. Кинематические цепи можно разделить на плоские и пространственные, простые и сложные, замкнутые и незамкнутые (рис. 1.3). К простым относятся цепи, у которых каждое звено входит не более чем в две кинематические пары (рис. 1.3, а, г); к сложным – цепи, у которых имеются звенья, входящие в три и болей кинематические пары (рис. 1.3, в); к замкнутым – цепи, у которых каждое звено входит,



Puc. 1.4

по крайней мере, в две кинематические пары (рис. 1.3, б, г), к незамкнутым – цепи, у которых есть звенья, входящие только в одну кинематическую пару (рис. 1.3, а). Все подвижные звенья плоской кинематической цепи совершают движения, параллельные одной и той же неподвижной плоскости (см. рис. 1.1). В пространственных кинематических цепях точки звеньев описывают пространственные кривые либо жутся по плоским кривым, лежащим в пересекающихся плоскостях (рис. 1.4). Введя понятие кинематической цепи, можно дать другое определение для механизмов, составленных только из твердых тел. Механизмом называется кинематическая цепь, в которой при одном неподвижном звене (стойке) и заданном движении одного или нескольких звеньев (ведущих) все остальные звенья (ведомые) совершают однозначно определенные движения. Механизмы могут быть образованы как замкнутыми, так и незамкнутыми кинематическими цепями. Примером незамкнутой кинематический цепи может служить механизм элементарного манипулятора (рис. 1.5). Большинство механизмов образовано



*Puc.* 1.5

замкнутыми кинематическими цепями (см. рис. 1.1, 1.4).

При исследовании механизмов используются их условные изображения, составляются структурные, кинематические и другие схемы. Структурные схемы выполняются в виде чертежа, на котором с учетом условных обозначений, установленных ГОСТом, изображают звенья, кинематические пары, указывают стойку и ведущие звенья (см. рис. 1.1). Структурные схемы, выполненные в определенном

масштабе, называются кинематическими схемами.

#### 1.1.5 Степень подвижности кинематической цепи

Число возможных независимых движений кинематической цепи относительно одного из звеньев называют степенью ее подвижности. Для определения степени подвижности кинематической цепи W необходимо из общего числа степеней подвижности всех ее подвижных звеньев вычесть число связей, накладываемых на относительное движение звеньев кинематическими парами, которыми соединены звенья. Пусть *п* – число подвижных звеньев пространственной кинематической  $P_i$ кинематических цепи; число \_ пар *i*-го класса (i = 1, ..., 5). Тогда 6n – общее число степеней подвижности п звеньев цепи, считая их не связанными между собой, а *iP<sub>i</sub>* – общее число связей, наложенных на звенья механизма кинематическими парами *i*-го класса.

С помощью введенных обозначений степень подвижности кинематической цепи можно определить по выражению

$$W = 6n - \sum_{i=1}^{5} iP_i.$$
 (1.1)

Развернув сумму в выражении (1.1), получим структурную формулу (математическую модель)пространственной кинематической цепи общего вида (формулу Сомова-Малышева):

$$W = 6n - 5P_5 - 4P_4 - 3P_3 - 2P_2 - P_1.$$
(1.2)

Формула (1.2) показывает, какому количеству звеньев кинематической цепи должно быть задано движение (т. е. сколько должно быть ведущих звеньев), чтобы движение остальных звеньев было определенным, единственно возможным. Формулой можно пользоваться, если учесть дополнительные общие условия связи, которые накладывают ограничения на движение всех звеньев кинематической цепи. Например, для плоской кинематической цепи, у которой звенья движутся параллельно одной неподвижной плоскости, перпендикулярной осям вращательных пар, на них наложены три общие связи (см. рис. 1.1). Звенья такой цепи не могут перемещаться вдоль оси, перпендикулярной к неподвижной плоскости, и вращаться относительно двух осей, лежащих в этой плоскости. Число степеней подвижности каждого звена дополнительно уменьшается здесь на 3 – число общих связей. Общее число степеней подвижности *n* звеньев цепи будет равно (6-3)*n*, т.е. каждая кинематическая пара в этом случае накладывает на движение звеньев цепи



*Puc.* 1.6

на три ограничения меньше класса пары. Так, пары 5-го и 4-го классов (только они могут быть использованы в этом случае) накладывают на движение звеньев плоской кинематической цепи соответственно две и одну связи, а кинематические пары 1-го, 2-го и 3го классов в такой (плоской) кинематической цепи не могут быть использованы.

Для плоской кинематической цепи структурная формула (1.2)

имеет вид (формула Чебышева)

$$W = 3n - 2P_5 - P_4. \tag{1.3}$$

Кинематические пары 5-го класса в плоском механизме могут существовать в виде вращательной и поступательной пар (см. табл. 1.1).

Поскольку механизм представляет собой кинематическую цепь, то степень его подвижности определяется по формулам (1.2), (1.3) с учетом общих связей, наложенных на все звенья механизма. Степень подвижности механизма соответствует количеству независимых (обобщен-

ных координат), которое необходимо задать для однозначной определенности положений всех звеньев механизма. Так, для механизма шарнирного четырехзвенника имеем (см. рис. 1.1).

$$n=3; P_5=4; P_4=0.$$

Степень подвижности подсчитываем по формуле (1.3):

 $W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$ 

Следовательно, данный механизм должен иметь одно ведущее звено и одну обобщенную координату. В качестве обобщенной координаты обычно выбирают угловую координату ведущего звена  $\varphi l$ .

Для кривошипно-ползунного механизма (рис. 1.6) параметры формулы (1.3) такие же, как и для механизма шарнирного четырехзвенника. Ведущее звено (ползун 1) движется прямолинейно, и за обобщенною координату принимается линейная координата ползуна.

В механизмах с двумя степенями подвижности за обобщенные координаты выбираются координаты двух ведущих звеньев или одного ведущего звена, если это звено образует со стойкой кинематическою пару с двумя степенями свободы подвижности

Структурные формулы механизмов (1.2) и (1.3), полученные с применением понятия «класс кинематической пары» на наш взгляд проще и понятнее можно получить используя понятие «степеней подвижности кинематической пары» – число возможных независимых движений одного звена относительно другого, которые позволяет совершать данная кинематическая пара. С этих позиций все кинематические пары (табл. 1.1) можно поделить пары от пятиподвижной (шар на плоскости) до одноподвижной (только с вращательным или только с поступательным движением).

Если обозначить, как и выше, n – число подвижных звеньев кинематической цепи (механизма),  $p_1$ ,  $p_2$ ,  $p_3$ ,  $p_4$ ,  $p_5$  – числа соответственно одно-, двух-, трех-, четырех- и пятиподвижных кинематических пар, то структурная формула пространственного механизма с учетом приведенных выше пояснений будет иметь вид,

$$W_{np} = 6n - 5p_1 - 4p_2 - 3p_3 - 2p_4 - p_5.$$
(1.2')

Для плоского механизма

$$W = 3n - 2p_1 - p_2. \tag{1.3'}$$

Формулы (1.2), (1.3), (1.2'), (1.3') справедливы для механизмов без избыточных (пассивных) связей и лишних степеней подвижности. Однако часто для выполнения специальных требований в механизм включают дополнительные элементы и звенья, которые не оказывают влияния на движение остальных звеньев и называются пассивными. Избыточными (пассивными) связями в механизме называют повторяющиеся

связи, которые дублируют ограничения, наложенные другими связями. Избыточные связи можно устранить из механизма, сохранив при этом задание точных условий связи. Для изучения движения механизмов их следует удалить и учитывать только те связи и степени подвижности, от которых зависит определенность их движения.

Так, например, простейший двухзвенный механизм, состоящий из стойки и вращающегося звена – ротора (электродвигатели, электрогенераторы, турбины различных типов и т.д.) имеют две опоры, а не одну, как это необходимо с точки зрения кинематики такого устройства (рис. 1.7 а). Степень подвижности такого механизма по зависимости (1.3') обусловлена введением дополнительной (правой) опоры, создавшей избыточную (пассивную связь). В действительности при надлежащей точности изготовления опор левой и правой (расточка отверстий и окончательная обработка опорных мест вала за одну установку) действительная степень подвижности и теоретическая равны единице (рис. 1.7 б).



Puc. 1.7

Избыточную (пассивную) подвижность, не влияющую на движение ведомого звена, можно обнаружить у механизма пространственного четырехзвенника, рис. 1.4, для которого степень подвижности по выражению (1.2')

$$W = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

$$W_{nn} = 6 \cdot 3 - 5 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 2.$$

У этого механизма избыточная подвижность обусловлена возможностью вращения звена 2 относительно его продольной оси.

Избыточная подвижность имеется у кулачковых механизмов, у которых толкатель снабжен роликом, вращательное движение которого не влияет на движение этого толкателя.

#### 1.1.6 Принципы строения и структурная классификация механизмов

Метод классификации плоских механизмов и принципы их строения были разработаны в начале XX в. русским ученым Л.В. Ассуром. Предложенный им метод позволяет проводить классификацию плоских механизмов, удовлетворяющих формуле Чебышева (1.3). Академик И.И.Артоболевский распространил классификацию Л.В. Ассура на пространственные механизмы. Практическое значение классификации заключалось в том, что она давала возможность устанавливать соответствие степени сложности механизма (его класса) методам его исследования и построения.

Построение механизма по Ассуру состоит в последовательном присоединении к ведущим звеньям и стойке особых кинематических цепей, называемых структурными группами или группами Ассура, без изменения степени подвижности механизма в целом. Группа Ассура – кинема-



тическая цепь с нулевой степенью подвижности относительно тех звеньев, к которым она присоединяется своими элементами и которая не распадается на более простые кинематические цепи с нулевой степенью подвижности.

Рассмотрим принцип построения механизмов методом наслоения групп Ас-

сура на примере плоского механизма с одной степенью свободы, у которого положение всех звеньев определяется заданием одной обобщенной координаты (*ф* или 1). Построение механизма начинается с объединения ведущего звена и стойки.



Puc. 1.9

Согласно классификации Ассура-Артоболевского, полученный таким образом механизм называется начальным механизмом 1-го класса (рис. 1.8, а, б). Начальный механизм имеет одну степень подвижности. Более сложные механизмы образуются присоединением к начальному механизму групп Ассура. Если группы Ассура имеют лишь кинематические пары 5-го класса, то, используя формулу (1.3), при  $W_{zp} = 0$  находим  $3n_{zp} - 2P_{5zp} = 0$ . Отсюда

$$P_{5_{2p}} = \frac{3n_{2p}}{2}$$
 или  $n_{2p} = \frac{2P_{5_{2p}}}{3}$ .

Таким образом, число звеньев в группе п должно быть четным, а количество кинематических пар  $P_{5cp}$  – числом, кратным трем. Возможные сочетания количества звеньев и кинематических пар ( $n_{cp}$ = 2, 4, 6, ...;  $P_{5cp}$  = 3, 6, 9, ...) дают возможность получать различные по сложности строения структурные группы. Простейшая из них имеет  $n_{cp}$  = 2;  $P_{5cp}$ . = 3 и называется двухповодковой группой (по числу звеньев – поводков) (рис. 1.9). Если один крайний элемент такой группы (элемент В на рис. 1.9, а) присоединить к ведущему звену 1, а другой, крайний элемент D – к стойке 2, то образуется механизм, называемый плоским шарнирным четырехзвенником (см. рис. 1.1).

Группы Ассура имеют внутренние и внешние кинематические пары. Внутренние пары соединяют между собой звенья группы, а внешними парами группа присоединяется к остальной кинематической цепи. Число внешних кинематических пар определяет поядок группы Ассура. Например, упоминавшаяся выше двухповодковая группа называется группой Ассура второго порядка.

Структурные группы, у которых  $n_{2p} = 2$ ;  $P_{52p} = 3$ , в зависимости от количества вращательных и поступательных кинематических пар и по-



*Puc.* 1.10

следовательности их расположения могут быть пяти различных видов (рис. 1.9, а–д). Четырехзвенные структурные группы, имеющие  $n_{zp} = 4$ ;  $P_{5zp} = 6$ , могут быть трехповодковыми третьего порядка (рис. 1.10, а) и четырехзвенными второго порядка с подвижным четырехсторонним контуром (рис. 1.10, б). Отличительная; особенность трехповодковой группы – наличие внутреннего базисного звена, входящего в три кинематические пары. Различные виды двух последних групп Ассура можно также получить путем замены вращательных кинематических пар поступательными. Структурные группы с числом звеньев более четырех встречаются в механизмах крайне редко.

И. И. Артоболевский расширил и модифицировал классификацию Л.В.Ассура. По классификации И. И. Артоболевского двухповодковая структурная группа условно относится к группам 2-го класса и имеет второй порядок. Класс группы выше второго определяется числом кинематических пар, входящих в замкнутый контур, который образован внутренними кинематическими парами. Поэтому трехповодковая группа, имеющая три внутренние кинематические пары и базисное звено (см. рис. 1.10, а), относится к 3-му классу и имеет третий порядок (по числу внешних кинематических пар). Четырехзвенная группа, имеющая четыре внутренние и две внешние кинематические пары (см. рис. 1.10, б), относится к 4-му классу и имеет второй порядок.

Структурный анализ механизмов (исследование структуры механизмов) предполагает:

определение количества звеньев механизма, числа и класса его кинематических пар;

- определение степени подвижности механизма;

 – разделение механизма на начальные механизмы и структурные группы;

– определение класса и порядка структурных групп.

Результатов структурного анализа является определение класса всего механизма, который соответствует наивысшему классу группы Ассура, входящей в состав механизма. Определение класса механизма, согласно классификации Ассура-Артоболевского, возможна, если в результате предварительного структурного анализа установлено выполнение следующих условий:

- степень подвижности механизма соответствует количе-

ству ведущих звеньев;

 ведущие звенья входят в кинематические пары со стойкой;

в механизме имеются только кинематические пары 5-го класса.

При наличии в плоском механизме кинематических пар 4-го класса структурный анализ проводится на заменяющем механизме.

Рекомендуется следующая последовательность отделений структурных групп из кинематической цепи механизма. Отделение групп начинается со



Puc. 1.11

звеньев, наиболее удаленных от ведущего звена. В первую очередь отделяются группы Ассура наиболее низкого класса. Следует иметь в виду, что после отделения каждой группы степень подвижности механизма должна оставаться неизменной, а каждое звено и кинематическая пара могут входить только в одну структурную группу. Разделение кинематической цепи механизма на группы Ассура ведется до тех пор, пока не останутся только начальные механизмы (ведущие звенья и стойка).

Поясним структурный анализ и классификацию механизмов по Ассуру-Артоболевскому на примере механизма, показанного на рис. 1.11. Механизм имеет пять подвижных звеньев (n = 5) и семь кинематических пар 5-го класса ( $P_5 = 7$ ). По формуле (1.3) определяем степень подвижности механизма

$$W = 3n - 2P_5 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$$

Ведущее звено 1 со стойкой 6 образуют механизм 1-го класса. Ведомую кинематическую цепь можно разделить на две группы Ассура 2-го класса (выделены на рис. 1.11 контурными линиями), начиная с группы, которая состоит из звеньев 4, 5.

как

Так



Puc. 1.12

имеет в своем составе только группы Ассура 2-го класса, то его следует



механизм

пользуются рычажные механизмы с большим числом звеньев (для реализации специальных законов движения ведомых звеньев). Так шестизвенный двухкривошипномеханизм (рис. ползунный 1.12) применяется в касающихся конвейерах. В таких конвейерах желоб с сыпучим материалом должен перемещаться с меньшей скоростью в направлении перемещения сыпучего материала и с большей скоростью в обратном (чтобы желоб уходил в этом направлении без груза).

отнести к механизмам 2-го класса. Кроме двух-, трех-И четырехзвенных механизмов с одноподвижными кинематическими парами (парами 5-го класса) ис-



Puc. 1.14

Шестизвенный кривошейно-двухкоромысловый механизм (рис. 1.13) часто встречается в механизмах грохота или сита. Вращение кривошипа 1 посредством шатуна приводит в колебательное движение грохот или сито 3, подвешенное на двух коромыслах 4 и 5.

Примером механизма с двумя ведущими кривошипами 1 и 2 (рис 1.14) может служить механизм кривошипно-рычажного пресса.



*Puc.* 1.15

#### 4-го класса).

При степени подвижности группы  $W_{cp} = 0$  структурная формула таких групп для плоских механизмов

$$W_{zp} = 0 = 3n_{zp} - 2p_{1zp} - p_{2zp}, \qquad (1.4)$$

где *n*<sub>2</sub> – число звеньев группы Ассура;

*p*<sub>1*гр*</sub>, *p*<sub>2*гр*</sub> – числа одноподвижных и двухподвижных кинематических пар группы Ассура.

Условие (1.4) выполняется при таких значениях входящих в нее величин

| $n_{rp}$  | 1 | 2 | 3 |
|-----------|---|---|---|
| $p_{1rp}$ | 1 | 2 | 3 |
| $p_{2rp}$ | 1 | 2 | 3 |

Однозвенные группы с одной одноподвижной и одной двухподвижной кинематическими парами – это группы, входящие в состав кулачковых механизмов (рис. 1.15) и одноступечатых зубчатых рядовых механизмов (рис. 1.16). Рядовые зубчатые механизмы – это такие, у которых зубчатые колеса вращаются относительно неподвижных



В машинах и приборах используют также и другие механизмы с большим количеством звеньев.

Группы Ассура с одноподвижными кинематическими (парами 5го класса) и двухподвижными кинематическими парами (парами в пространстве осей.

Двухзвенные группы с двумя одноподвижными и двумя двухподвижными (рис. 1.17 и 1.18) кинематическими парами применяются в планетарных зубчатых механизмах. Планетарные зубчатые механизмы – это такие, в которых имеются зубчатые колеса, вращающиеся относительно подвижных в пространстве осей. Такие колеса называются сателлитами.

Принципы построения механизмов по Ассуру-Артоболевскому удобно использовать как при структурном анализе, так и при структурном синтезе механизмов. Уже на этапе проектирования машин их закладываемая работоспособность и надежность во многом зависят от того, несколько правильно и рационально выбраны схема построения механизма и его структура.

## 1.1.7 Структурно-конструктивная функциональная классификация механизмов

Все многообразие имеющихся в настоящее время механизмов с учетом названных признаков можно представить в таком виде, который приведен далее.

- 1 Стержневые механизмы
  - 1.1 Двухзвенные
    - 1.1.1 Вращательного движения1.1.2 Поступательного движения
  - 1.2 Трехзвенные
    1.2.1 Вращательнопоступательные (винтовые)
    1.2.2 Поступательного

движения (клиновые)

- 1.3 Четырехзвенные 1.3.1 С вращательными кинематическими парами 1.3.2 С вращательными и поступательными кинематическими парами
- 1.4 Шестизвенные



Рис. 1.17



Рис. 1.18

1.4.1 С двухзвенными группами Асура

- 1.4.2 С четырехзвенными группами Ассура
- 1.5. Многозвенные
  - 1.5.1. С двухзвенными группами Ассура
  - 1.5.2. С четырехзвенными группами Ассура
  - 1.5.3. С шестизвенными группами Ассура

2. Кулачковые (плоские, пространственные, с вращательным и поступательным движением)

3. Зубчатые механизмы (плоские, пространственные, рядовые, планетарные, дифференциальные)

- 4. Фрикционные
- 5. Волновые
- 6. Мальтийские

#### 1.2 Кинематика механизмов

#### 1.2.1 Задачи и методы кинематического анализа

Кинематический анализ состоит в определении параметров движения звеньев механизма по заданному движению ведущих звеньев без учета действующих сил.

Основными задачами кинематического анализа являются:

– определение положений звеньев механизма (траекторий отдельных точек);

- определение скоростей точек и угловых скоростей звеньев;

– определение ускорений точек и угловых ускорений звеньев.

При решении задач кинематического анализа должны быть заданы:

- кинематическая схема механизма и размеры его звеньев;

 – закон движения ведущего звена в виде зависимости перемещения звена (линейного или углового) или точки на нем от времени или других параметров движения.

В связи с этим кинематическому анализу должно предшествовать исследование структуры механизма, при котором определяется, сколько, какого класса и в какой последовательности соединены структурные группы, образующие механизм. Задачи кинематического анализа могут быть решены графическими или аналитическими методами. Выбор метода определяется назначением расчета и требуемой точностью решения.

Графические методы основаны на геометрическом построении траектории движения отдельных точек звеньев механизма, их скоростей и ускорений. Получаемые результаты дают наглядную картину движения звеньев механизма и его точек. Однако для этих методов характерны трудоемкие построения и малая точность. Графическими методами нельзя получить общее решение, так как необходимые построения выполняются для каждого конкретного положения механизма.

Аналитические методы основаны на использовании математических подходов (методов аналитической геометрии, тензорно-матричных операций, векторного анализа и др.). Они обеспечивают высокую точность вычисления искомых параметров для каждого момента времени работы механизма. Однако в ряде случаев из-за сложности математических преобразований утрачивается наглядность картины изменения исследуемых характеристик. В настоящее время преимущественно применяют аналитические методы. Тем не менее для предварительной оценки кинематических характеристик механизма и контроля аналитических вычислений используют графические методы решения – построение планов положений механизма, планов скоростей и ускорений точек звеньев механизма.

# 1.2.2 Кинематический анализ механизмов графическим методом

Решение задач о положениях, скоростях и ускорениях графическим методом поясним на примере кинематического анализа механизма плоского шарнирного четырехзвенника (рис. 1.19, а). Механизм имеет одну степень подвижности и состоит из ведущего звена 1 (кривошипа) и стойки 4, к которым присоединена одна группа Ассура 2-го класса, составленная из звеньев 2 (шатуна) и 3 (коромысла). За обобщенную координату принят угол поворота  $\varphi_1$ .

Определение положений (траекторий точек звеньев). Решить задачу о положениях (построить план положений) значит графически изобразить кинематическую схему механизма для заданного значения координаты  $\varphi_1$ . Для построения схемы механизма выберем масштаб построений (м/мм):

$$\mu_l = \frac{l_{AB}}{AB},$$

где  $l_{AB}$  – длина звена 1, м; AB – отрезок, изображающий звено 1 на чертеже, мм. Величины  $\mu_l$  целесообразно принимать по стандарту ЕСКД для выполнения чертежей деталей узлов машин.

Длины отрезков на чертеже, изображающих звенья механизма, представим в виде



Вычислив длины отрезков, простым геометрическим построением получим план положения механизма для данного значения угла  $\varphi_1$  (рис. 1.19, а). Построив планы положений механизма для n-го количества значений угла  $\varphi_1$  получим траектории движения точек звеньев механизма.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ (рис. 1.19, б). Данную задачу решают методом построения плана скоростей. Планом скоростей (ускорений) называется фигура, составленная из векторов абсолютных скоростей (ускорений) точек звеньев, выходящих из одной точки р ( $\pi$  для плана ускорений), называемой полюсом плана скоростей (ускорений), и векторов относительным скоростей (ускорений), соединяющих концы векторов абсолютных скоростей (ускорений). Сначала для заданного положения механизма (задано значение угла  $\varphi_I$ ) с известными размерами его звеньев строится план положений. При заданной угловой скорости ведущего звена  $\omega_1$  требуется определить угловые скорости  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  звеньев 2, 3, а также скорости характерных точек В, С и Е звеньев механизма (см. рис. 1.19, а).

Скорость точки В ведущего звена  $v_B$  (м/с) и масштабный коэффициент  $\mu_v$  (мс<sup>-1</sup>/мм) определяются выражениями:

$$\upsilon_{B} = \omega_{1}l_{AB}; \mu_{\upsilon} = \frac{\upsilon_{B}}{(pb)}$$

Здесь (pb) – длина отрезка, изображающего скорость  $v_B$  на плане скоростей (выбирается максимально возможным для имеющегося места построения плана скоростей (ускорений) и таким, чтобы масштабный коэффициент  $\mu_v$  ( $\mu_a$ ) выражался одной цифрой (см. масштабы ЕСКД для чертежей деталей и сборочных единиц) или двумя цифрами.

Для построения плана скоростей составляется два векторных уравнения скоростей на каждую группу Ассура 2-го класса, начиная с первой группы, присоединенной к ведущему звену. Скорости точек, принадлежащих внешним кинематическим парам группы, известны:  $\upsilon_A = 0, \upsilon_B = \omega_1 l_{AB}, \upsilon_D = 0$ . Искомой является скорость точки С, которая принадлежит внутренней кинематической паре группы и, следовательно, звеньям 2 и 3 одновременно.

Первое векторное уравнение скоростей запишем, рассмотрев движение звена 2. Шатун 2 совершает плоскопараллельное движение, поэтому абсолютную скорость точки С можно предоставить суммой скоростей переносного и относительного движений. Переносным движением является поступательное движение звена 2 со скоростью точки В, а относительным – вращательное движение этого звена вокруг точки В. Используя теорему сложения скоростей, имеем

$$\mathcal{D}_C = \mathcal{D}_B + \mathcal{D}_{CB} \tag{1.5}$$

где  $\vec{v}_{CB}$  – вектор скорости точки С во вращательном движении звена 2 относительно точки В.

По аналогии составим второе векторное уравнение скоростей движения звена 3:

$$\mathcal{D}_C = \mathcal{D}_D + \mathcal{D}_{CD} \tag{1.6}$$

где  $\upsilon_{CD}$  – вектор скорости точки С во вращательном движении звена 3 относительно неподвижной точки D.

Решая графически уравнения (1.5) и (1.6) находим абсолютную  $\vec{v}_c$  $\vec{v}_D$  и относительную  $\vec{v}_{CD}$  скорости токи С. Результат графического решения этих уравнений векторные треугольники скоростей – план скоростей.

Построение плана скоростей начинаем с выбора полюса: на плоскости чертежа отмечаем произвольную точку *p* (рис. 1.19, б). Из полюса *p* откладываем отрезок (*pb*). Рекомендуемой выше длины, направленный перпендикулярно звену AB в сторону, соответствующую направлению вращения звена AB. Затем из точки *b* проводим линию действия вектора  $\vec{v}_{CB}$ , перпендикулярную звену CB, и выполняем построение векторного треугольника, соответствующего уравнению (1.6). Так как  $\vec{v}_D = 0$ , конец вектора  $\vec{v}_D$  (точка *d* на плане скоростей) совпадает с полюсом *p*. Из точки *d* проводим линию действия вектора  $\vec{v}_{CD}$ , направленную перпендикулярно звену CD. Пересечение построенных линий (точка с) определяет положение конца векторе скорости  $\vec{v}_C$ . Вектор скорости  $\vec{v}_{CB}$  изображается на плане скоростей отрезком (*cb*).

При определении направлений векторов на плане скоростей руководствуемся следующими правилами. Вектор абсолютной скорости всегда направлен из полюса; вектор относительной скорости – к точке плана, соответствующей первой букве индекса в обозначении этой скорости. Таким образом, стрелку вектора  $\vec{v}_{CB}$  на плане скоростей направляем из точки *b* в точку *c*. Вектор  $\vec{v}_{CD} = \vec{v}_c$ , изображаемый отрезком (*cd*) = (*cp*), также направлен в точку *c* плана.

Учитывая, что точка А звена АВ неподвижна, соответствующую точку *a* на плане совмещаем с полюсом *p*. На этом заканчивается построение плана скоростей механизма. Значения искомых скоростей  $\vec{v}_{CB}$  и  $\vec{v}_{CD}$  находятся путем замера длин отрезков (*cb*) и (*cd*):

$$\upsilon_{CB} = \mu_{\nu}(cb); \upsilon_{CD} = \upsilon_{C} = \mu_{\nu}(cd).$$

При определении угловых скоростей звеньев механизма используем полученные выше результаты. Модуль угловой скорости вращения шатуна (звена 2) подсчитываем по формуле

$$\omega_2 = \frac{\upsilon_{CB}}{l_{CB}}$$

Для определения направления вращения шатуна со скоростью  $\omega_2$  перенесем вектор  $\vec{\upsilon}_{CB}$  параллельно самому себе из плана скоростей в точку *C* механизма. Направление вектора  $\vec{\upsilon}_{CB}$  показывает, что вращение шатуна будет направлено против хода часовой стрелки.

Аналогичные операции проводим при определении угловой скорости вращения звена 3:

$$\omega_3 = \frac{\nu_{CD}}{l_{CD}}.$$

Параллельный перенос вектора  $\upsilon_{CD}$  в точку *C* механизма позволяет установить, что вращение звена 3 с угловой скоростью  $\omega_3$  направлено, как и вращение шатуна 2, против хода часовой стрелки. На схеме механизма, изображенной на рис. 1.19, а, направления вращения звеньев указаны круговыми стрелками.

После построения плана скоростей и определения угловых скоростей звеньев механизма появляется возможность определения скорости любой точки механизма. Допустим, требуется найти скорость точки *E* шатуна 2 (рис. 1.19, а). Составляем два векторных уравнения, аналогичных уравнениям (1.5) и (1.6):

$$\vec{\underline{\nu}}_E = \vec{\underline{\nu}}_B + \vec{\underline{\nu}}_{EB}; \qquad (1.7)$$

$$\boldsymbol{U}_E = \boldsymbol{U}_C + \boldsymbol{U}_{EC} \,. \tag{1.8}$$

Направление векторов  $U_{EB}$  и  $U_{EC}$ :

$$v_{EB} \perp BE; v_{EC} \perp CE.$$

Теперь можно определить абсолютную скорость  $\upsilon_E$ , достроив план скоростей. Из точки *b* плана проводим линию, перпендикулярную BE, а из точки *c* – линию, перпендикулярную *CE*. Точка *e* пересечений этих линий определяет положение конца вектора  $\vec{\upsilon_E}$ . Соединив точку *e* с полюсом *p*, получим отрезок *(pe)*, с помощью которого вычисляем значение скорости

$$v_E = \mu_V(pe)$$
.

Обратим внимание на следующее свойство плана скоростей. Стороны  $\Delta bec$  плана скоростей и  $\Delta BEC$  плана положений механизма взаимно перпендикулярны и, следовательно, эти треугольники подобны. Вершины треугольников сходственно расположены, т.е. обход контуров (*bec*) и (BEC) происходит в одном направлении, в данном случае по ходу часовой стрелки. Это свойство справедливо как для плана скоростей, так и для плана ускорений любых точек одного и того же звена механизма. Оно формулируется в виде теоремы подобия: отрезки прямых, соединяющих концы векторов абсолютных скоростей (или ускорений), и отрезки прямых, соединяющих соответствующие точки самого звена на

плане положений механизма, образуют подобные и сходственно расположенные фигуры.

С помощью этой теоремы можно найти скорость (или ускорение) любой точки звена путем построения подобных и сходственно расположенных фигур по известным скоростям двух точек этого звена.

**ОПРЕДЕЛНИЕ УСКОРЕНИЙ** (рис. 1.19, в). Для определения ускорений точек звеньев механизма построим план ускорений. Построения проведем на примере того же шарнирного четырехзвенника при заданном значении обобщенной координаты  $\varphi_1$ . Считаются известными угловая скорость  $\omega_1$  и угловое ускорение  $\varepsilon_1$  ведущего звена.

Как известно, ускорение любой точки звена, которое совершает вращательное движение вокруг неподвижной оси, можно представить суммой:

$$\stackrel{\rightarrow}{a} = \stackrel{\rightarrow}{a^{\tau}} + \stackrel{\rightarrow}{a^{n}}, \qquad (1.9)$$

где  $\vec{a}^{\tau}$ ,  $\vec{a}^{n}$  – соответственно касательная (тангенциальная) и нормальная составляющие ускорения  $\vec{a}$ .

Ведущее звено (кривошип) четырехзвенника вращается вокруг точки А. Поэтому ускорение точки В

$$\vec{a}_{\scriptscriptstyle B} = \vec{a}_{\scriptscriptstyle B}^{\tau} + \vec{a}_{\scriptscriptstyle B}^{n}, \qquad (1.10)$$

где  $\vec{a_B^{\tau}} = \varepsilon_1 l_{AB}, \ \vec{a_B^n} = \omega_1^2 l_{AB}.$ 

Нормальная составляющая  $a_B^n$  ускорения точки В направлена к центру вращения (к точке А) параллельно АВ. Касательная, составляю-

щая  $a_B^{\tau}$  направлена перпендикулярно AB в сторону, совпадающую с направлением ускорения  $\varepsilon_1$ .

На плане ускорений конец вектора нормальной составляющей ускорения точки обозначим буквой с соответствующим точке индексом:  $n_B$  – конец вектора  $\vec{a_B}^n$  на плане ускорений;  $n_{BC}$  – конец вектора  $\vec{a_{CB}}^n$ .

Зададимся отрезком (*π n*<sub>*B*</sub>), изображающим нормальную составляющую ускорения точки *B*, и определим масштабный коэффициент плана ускорений (в м·с<sup>-2</sup>/мм, смотри рекомендации по величинам отрезков на плане скоростей (ускорений) на с. 20).

$$\mu_a = \frac{a_B^n}{\pi n_B}.$$

По аналогии с задачей о скоростях составим два векторных уравнения для ускорения точки С, принадлежащей звеньям 2 и 3:

$$\vec{a}_{c} = \vec{a}_{B}^{\tau} + \vec{a}_{B}^{n} + \vec{a}_{CB}^{\tau} + \vec{a}_{CB}^{n}, \qquad (1.11)$$

$$\vec{a}_{c} = \vec{a}_{D} + \vec{a}_{CD}^{\tau} + \vec{a}_{CD}^{n}.$$

В (1.11)  $\vec{a}_{D} = 0$ , а ускорения  $a_{B}^{\tau}$   $u = a_{B}^{n}$  уже определены по ве-

личине и направлению. Значения  $a_{CB}^{n}$  и  $a_{CD}^{n}$  вычисляем по формулам  $a_{CB}^{n} = \omega_{2}^{2} l_{CB}, \ a_{CD}^{n} = \omega_{32}^{2} l_{CD};$  отрезки, которые изображают эти ускорения на плане ускорений (рис. 1.19, в) – по формулам  $(bn_{CB}) = \frac{a_{CB}^{n}}{\mu_{a}},$ 

$$(\pi n_{CB}) = \frac{a_{CD}^n}{\mu_a}.$$

Построение плана ускорений продолжаем непосредственно по уравнениям (1.11). От произвольной точки  $\pi$  (полюса) откладываем отрезок  $\pi n_B$  параллельно AB в направлении от B к A. Из точки  $n_B$  проводим отрезок ( $n_B b$ ), изображающий ускорение  $a_B^{\sigma \tau}$ . Соединив точку b с полюсом  $\pi$ , получим отрезок ( $\pi b$ ), изображающий ускорение  $\vec{a_B}$ . Стрелки, указывающие направление полученных векторов, расставляются согласно правилу векторного суммирования.

Для завершения графического решения уравнений (1.11) из точки *b* откладываем отрезок (*bn*<sub>CB</sub>) параллельно шатуну 2 в направлении от точки С к точке В, а из точки  $n_{CB}$  перпендикулярно шатуну проводим линию действия вектора ускорения  $a_{CB}^{\sigma \tau}$ .

При построении плана ускорений, учтем, что ускорение точки D  $\vec{a}_D = 0$  и следовательно точка *d* плана ускорений совпадает с полюсом  $\pi$ . Из точки *d* нанесем параллельно CD отрезок ( $\pi n_{CD}$ ), изображающий вектор нормального (центростремительного) ускорения точки C относительно точки D  $a_{CD}^{\rightarrow n}$ , направленного к точке D. Из точки  $n_{CD}$  перпендикулярно CD проведем линию действия вектора тангенциального (ка-

сательного) ускорения  $\vec{a_{CD}}^{\tau}$ . Пересечение линий действия ускорений  $\rightarrow$ 

 $a_{CD}^{\dagger}$  и  $a_{CB}^{\dagger}$  определяет точку *с* – конец вектора искомого ускорения  $d_{CD}^{\dagger}$ 

 $a_{c}$ . Соединив точку *с* и полюс  $\pi$  и замерив длину отрезка ( $\pi c$ ), получим общее ускорение точки С. Закончив построение плана ускорений, находим неизвестные ускорения  $a_{c} = \mu_{a}(\pi c); a_{CB}^{\tau} = \mu_{a}(n_{CB}c); a_{CD}^{\tau} = \mu_{a}(n_{CD}c)$ , а затем угловые ускорения звеньев:  $\varepsilon_{2} = \frac{a_{CB}^{\tau}}{l_{cm}}; \varepsilon_{2} = \frac{a_{CD}^{\tau}}{l_{cm}}.$ 

Направления ускорений  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , условно показанные на рис. 1.19, а, круговыми стрелками, определяют векторы  $a_{CD}^{\sigma}$  и  $a_{CB}^{\sigma}$ , перенесенные с плана ускорений в точку С механизма.

Для нахождения ускорения  $a_E$  точки E шатуна используем свойство подобия плана ускорений. На отрезке (*bc*) плана ускорений строим  $\Delta bce$ , подобней  $\Delta BCE$  плана положений и сходственно с ним расположенный (порядок расположения букв на плане ускорений и на механизме на любом направлении их прочтения. Полученную точку *e* соединим с полюсом  $\pi$ . Тогда  $a_E = \mu_a(\pi e)$ .

Аналогичными построениями определяется ускорение любой другой точки механизма. Таким образом, на основании изложенного выше видим, что планы скоростей (ускорений) – это результат решения графическим путем векторных уравнений, определяющих скорости (ускорения) соответствующих точек звеньев механизмов.

#### 1.3 Динамический анализ механизмов

#### 1.3.1 Цели и задачи динамического анализа

Динамический анализ – это раздел теории механизмов и машин, в котором изучается движение звеньев механизма под действием заданной системы сил. Основная цель динамического анализа заключается в установлении общих зависимостей между силами (моментами сил), действующими на звенья механизма, и кинематическими параметрами механизма с учетом масс (моментов инерции) его звеньев. Эти зависимости определяются из уравнений движения механизма.

При всем разнообразии задач динамического анализа их разделяют на два основных типа: в задачах первого типа определяют, под действием каких сил происходит заданное движение механизма (первая задача динамики); в задачах второго типа по заданной системе сил, действующей на звенья механизма, находят их кинематические параметры (вторая задача динамики).

Закон движения механизма в аналитической форме задается и виде зависимостей его обобщенных координат от времени. Наиболее просто задачи динамики решают для механизмов с жесткими звеньями и одной степенью свободы с помощью классических методов теории механизмов и машин. Однако современная техническая практика требует решения более сложных задач, в которых исследуется динамика быстроходных машин и механизмов с учетом упругих свойств материалов их звеньев, наличия зазоров в их кинематических цепях и других факторов. В подобных случаях решаются задачи динамики механических систем с несколькими степенями свободы (или с бесконечным числом степеней свободы) с привлечением сложного математического аппарата многомерных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных или интегродифференциальных уравнений.

#### 1.3.2 Силы, действующие на звенья механизма, и их классификация

Действующие на звенья механизма силы можно разделить на следующие группы.

Движущие силы  $F_{\rm d}$  (или пары сил с моментом  $M_{\rm d}$ ) – это силы, элементарная работа которых на возможных перемещениях точек их приложения положительна. Движущие силы прикладываются к ведущим звеньям со стороны двигателей. Они предназначены для приведения машин в движение, преодоления сил сопротивления и осуществления заданного технологического процесса. В качестве приводных двигателей применяют двигатели внутреннего сгорания, электрические, гидравлические, пневматические и др.

Силы сопротивления  $F_c$  (или пары сил сопротивления с моментом  $M_c$ ) – это силы, элементарная работа которых на возможных перемещения точек их приложения отрицательна. Они разделяются на силы производственных сопротивлений ( $F_{n.c.}$ ,  $M_{n.c.}$ ), для преодоления которых предназначен данный механизм, и силы вредных сопротивлений (*F*<sub>*в.с.*</sub>, *M*<sub>*в.с.*</sub>), вызывающие непроизводительные затраты энергии движущих сил.

Силы производственных сопротивлений обусловлены технологическими процессами, поэтому их называют силами технологических сопротивлений. Обычно они приложены к выходным звеньям исполнительных машин. Силы вредного сопротивления – это в основном силы трения в кинематических парах и силы сопротивления среды. Понятие «вредные силы» является условным, так как в ряде случаев они обеспечивают работоспособность механизма (например, движение катка обеспечивают силы сцепления с дорожным полотном).

Силы веса звеньев  $F_g$ , в зависимости от направления их действия относительно направления движущих сил, могут быть полезными (или вредными), когда они способствуют (или препятствуют) движению механизма.

Силы инерции  $F_i$  или моменты сил инерции  $M_i$ , возникающие при изменении скорости движения звеньев, могут быть как движущимися силами, так и силами сопротивления, в зависимости от направления движения звеньев.

В общем случае силы движущие и силы сопротивления являются функциями кинематических параметров (времени, координат, скорости, ускорения точки приложения силы). Эти функции для конкретных двигателей и рабочих машин называют их механическими характеристиками, которые задаются в аналитической форме или графически.

На рис. 1.20 показаны механические характеристики  $M_{_{\pi}} = M_{_{\pi}}(\omega)$  электродвигателей различных типов.

Механическая характеристика электродвигателя постоянного тока с параллельным возбуждением (обмотка возбуждения двигателя включена параллельно обмотке якоря) имеет вид линейного монотонно



Puc. 1.20

убывающей зависимости момента  $M_{\mu}$  от угловой скорости вращения вала  $\omega$  (рис. 1.20, а). Двигатель с такой механической характеристикой устойчиво работает на всем диапазоне угловых скоростей  $\omega$ .

Механическая характеристика электродвигателя постоянного тока с последовательным возбуждением (обмотка возбуждения включена последовательно с обмоткой якоря) представляется нелинейной зависимостью  $M_{\mu} = M_{\mu}(\omega)$ , изображенной на рис. 1.20, б.

Механическая характеристика асинхронного электродвигателя постоянного тока (рис. 1.20, в) описывается более сложной зависимостью. Характеристика имеет восходящую и нисходящие части. Областью устойчивой работы электродвигателя является нисходящая часть характеристики. Если момент сопротивления  $M_c$  становится больше максимального момента движущих сил  $M_{\rm d}$ , двигатель останавливается. Такой момент называется опрокидывающим моментом  $M_{\rm onp.}$ . Угловая

скорость  $\omega = \omega_{\text{ном}}$ , при котором двигатель развивает максимальную мощность, называется номинальной угловой скоростью, а соответствующий ей момент  $M_{\text{д}} = M_{\text{ном}}$  – номинальным моментом. Угловая скорость  $\omega = \omega_{\text{с}}$ , при которой  $M_{\text{д}} = 0$ , называется синхронной угловой скоростью.



*Puc.* 1.21

Механические характеристики рабо-

чих машин чаще представляют собой восходящие кривые (рис. 1.21). Такой вид имеют характеристики компрессоров, центробежных насосов и др.

## **1.3.3** Трение в механизмах. Общие сведения о трении в механизмах

Трением называют явление сопротивления относительному перемещению соприкасающихся тел, возникающее в месте соприкосновения их поверхностей. Трение сопровождается диссипацией (рассеиванием) энергии. Различают трение покоя (статическое трение) и трение движения (кинетическое трение).

Если взаимодействие соприкасающихся тел происходит при наличии микроскопических смещений, обусловленных упругими и пластическими деформациями до перехода к относительному движению, то сопротивление такому смещению называют трением покоя. Сопротивление относительному перемещению соприкасающихся тел при их относительном движении называют трением движения. По виду относительного движения соприкасающихся тел трение движения разделяют на трение скольжения и трение качения. Трение скольжения возникает при относительном поступательном движении соприкасающихся тел, а трение качения – при их относительном качении.

**Трение скольжения.** В зависимости от состояния взаимодействующих тел трение скольжения может быть:

– чистым (ювенильным), при котором на трущихся поверхностях полностью отсутствуют посторонние примеси;

 сухим, т. е. трением несмазанных поверхностей, покрытых пленками оксидов и адсорбированными молекулами газов или жидкостей;

– граничным, при котором между трущимися поверхностями существует тонкий слой смазочного материала (порядка 0,1 мк и менее);

– жидкостным, при котором поверхности трущихся тел полностью отделены слоем смазки.

Сила трения. Количественной мерой интенсивности каждого из перечисленных явлений является сила трения – сила сопротивления, возникающая при относительном перемещении одного тела по поверхности другого под действием внешней силы. Вектор силы трения лежит в плоскости, касательной к поверхности трущихся тел в зоне их контакта, и направлен в сторону, противоположную направлению относительного движения.

Сила трения покоя зависит от внешних сил, приложенных к трущимся телам. Наибольшего значения, называемого предельной или полной силой трения, она достигает в мгновение, предшествующее началу скольжения. Превышение предельной силы трения ведет к нарушению состояния покоя и вызывает скольжение трущихся поверхностей.

Сила трения скольжения направлена вдоль вектора относительной скорости скольжения в противоположную от скорости сторону и по величине, как правило, несколько меньше силы трения покоя. При наличии смазочного материала сила трения скольжения при прочих равных условиях достигает наименьшего значения. При отсутствии смазочного материала она возрастает: скольжение поверхностей сопровождается процессами механического зацепления отдельных выступов трущихся поверхностей, их деформации, возникновения сил молекулярного взаимодействия, на преодоление которых затрачивается энергия движущих сил. В технических расчетах применяют приближенные формулы, определяющие предельную силу трения покоя  $F_{\text{т.o}}$  и силу трения скольжения  $F_{\text{т.}}$ :

$$F_{\text{r},0} = f_0 F_n; \quad F_{\text{rp}} = f F_n$$
 (1.12)

где  $f_0$ , f – коэффициенты трения соответственно покоя и скольжения;  $F_n$  – сила нормального давления на поверхности трения.

На значения коэффициентов  $f_0$  и f влияют такие факторы, как вид материалов трущихся тел, качество соприкасающихся поверхностей, наличие на этих поверхностях пленок оксидов, скорость скольжения тел, жесткость и упругость соприкасающихся тел, температурный режим и др. Большинство подобных факторов учитывается экспериментальным путем с учетом реальных условий работы каждого механизма в отдельности. Однако в приближенных расчетах силы трения можно вычислять по формулам (1.12) в предположении, что коэффициенты трения постоянны. Приведем приближенные значения коэффициентов трения для некоторых пар материалов (табл. 1.2).

|                 |              |      |                   | Таблица 1.2 |  |
|-----------------|--------------|------|-------------------|-------------|--|
| Материалы       | Сухое трение |      | Трение со смазкой |             |  |
|                 | $f_0$        | f    | $f_0$             | f           |  |
| Сталь по стали  | 0,3          | 0,25 | 0,10,2            | 0,050,15    |  |
| Сталь по бронзе | 0,2          | 0,18 | 0,10,15           | 0,050,1     |  |

При граничном трении зависимость коэффициента трения скольжения f от скорости скольжения трущихся тел v часто представляется эмпирической формулой

$$f = f_0 + f_1 + f_2 v^2 + f_3 v^3,$$

где  $f_1 f_2$ ,  $f_3$  – экспериментальные коэффициенты, которые могут быть положительными и отрицательными.

При жидкостном трении, когда трущиеся поверхности тел полностью разделены слоем смазки, сила трения оказывается значительно меньше, чем при сухом или граничном трении. Ее величина подсчитывается по формуле Ньютона

$$F_{\rm T} = \mu A \frac{du}{dy},$$

где  $F_{\rm T}$  – сила сдвига, которую требуется приложить к слою жидкости площадью *А* для того, чтобы этот слой двигался относительно соседнего слоя, расположенного на расстоянии *dy*, со скоростью *du*;  $\mu$  – коэффициент, называемый динамической вязкостью, нс/м<sup>2</sup>.

Если градиент скорости  $\frac{du}{dv}$  приближенно принять равным  $\frac{v}{h}$ , где v – относительная скорость скольжения трущихся поверхностей, а h – величина зазора между ними, то вместо формулы Ньютона можно использовать формулу

$$F_{\rm T} = \mu A \frac{\upsilon}{h} \text{ или } F_{\rm T} = \beta \upsilon, \qquad (1.13)$$

где  $\beta = \frac{\mu A}{h}$  – постоянный коэффициент, называемый коэффициентом вязкого трения.

Линейная характеристика (1.13) справедлива лишь при полном разделении трущихся поверхностей слоем смазки. Для того чтобы трение было жидкостным, требуется в слое смазки создать определенное давление. Такое давление может быть обеспечено подачей самой смазки под необходимым давлением (в этом случае трение называется гидростатическим) или движением смазки в клиновом зазоре, когда зазор между плоскостями трения имеет форму клина (в этом случае трение называется гидродинамическим).

Трение качения. Это сопротивление, возникающее при относительном перекатывании двух упругих тел на площадке их контакта. Сопротивление качению звеньев значительно меньше сопротивления скольжения, поэтому при конструировании подвижных соединений звеньев скольжение по возможности заменяют качением.

При качении в зоне контакта звеньев *i* и *j* под действием момента движущих сил  $M_{\rm A}$ происходит непрерывная упругая деформация поверхностных слоев, которая нарушает симметричное расположение эпюры удельных давлений (рис. 1.22). Это приводит к смещению точки приложения результирующей силы нормального давления F<sub>ii</sub><sup>n</sup>, в сторону направления движения и к возникновению момента силы трения качения



(1.14)

где *k* – коэффициент трения качения, мм.

Значение k зависит от материалов, диаметров тел качения, состояния поверхностей трения, наличия смазки, удельного давления, скорости относительного движения и других факторов.

 $M_k = kF_{ii}^n$ ,
**Трение в кинематических парах.** Сила трения скольжения в поступательной паре  $F_{Tij}$ , действующая на звено *i* со стороны звена *j*, находится по формуле (рис. 1.23)

$$F_{\rm rij} = f F_{ij}^n, \tag{1.15}$$

где  $F_{ii}^n$  – нормальная составляющая полной реакции  $F_{ij}$ .

Сила трения  $F_{rij}$  – направлена противоположно скорости  $v_i$  движения звена *i* относительно звена *j*. Угол  $\varphi$ , который полная реакция  $\vec{F}_{ij}$ , образует с ее нормальной составляющей  $\vec{F}_{ij}^{n}$ , называется *углом трения*. Из рис. 1.23 и формулы (1.15) имеем

$$tg \varphi = \frac{F_{ij}}{F_{ii}^n} = f$$
.

При малых значениях коэффициента трения f угол трения  $\varphi$  приближенно можно считать равным коэффициенту f.

Все возможные положения вектора полной реакции  $\vec{F}_{ij}$  образуют коническую поверхность с углом  $2\varphi$  при вершине, называемую конусом трения. Конус трения позволяет наглядно представить процессы взаимодействия звеньев при наличии трения скольжения.

Если, например, на звено *i* действует движущая сила  $F_t$ , которая составляет с нормалью к поверхности трения угол  $\alpha_i < \varphi$ , то под действием такой силы при нулевой начальной скорости звено *i* будет оставаться в состоянии покоя. Если движущая сила  $F_t$  действует на звено *i* при ненулевой на-



Puc. 1.24

чальной скорости  $v_i$ , то дви-

Puc. 1.23

жение звена будет замедленным. Это явление называется самоторможением. При самоторможении линия действия вектора  $\vec{F}_i$  проходит внутри конуса трения и его проекция на направление движения меньше предельного значения силы трения  $F_{\text{тіj}}$ . Явление самоторможения в механизмах недопустимо, но в некоторых случаях, например в червячных передачах и «винт-гайка», его используют для предотвращения самопроизвольного

движения в обратном направлении.

Если  $\alpha_i = \varphi$ , то возможно равномерное движение звена *i* со скоростью  $\upsilon_i$ . Однако при нулевой начальной скорости движения звена не возникает.

При  $\alpha_i > \varphi$  проекция вектора  $\vec{F}_i$  на направление движения оказывается больше предельного значения силы трения  $F_{\tau ij}$ , и при ненулевой начальной скорости  $\nu_i$  звено *i* будет двигаться ускоренно.

Рассмотрим трение во вращательной паре между звеньями *i*, *j* при условии, что между элементами этой пары существует зазор (рис. 1.24). Касание элементов пары при сухом и граничном трении происходит по общей образующей цилиндрических элементов пары. Нормальная составляющая полной реакции  $\vec{F}_{ij}^n$ , приложенная в точке касания K, проходит через центры  $O_i$  и  $O_j$  элементов нары. Сила трения  $\vec{F}_{\pi ij}^n$ , приложена в точке K и направлена противоположно относительной скорости  $v_{ij}$ . Вектор полной реакции  $\vec{F}_{ij}$  оказывается отклоненным от общей нормали к соприкасающимся поверхностям на угол трения  $\varphi$ . Причем при любом положении точки K вектор  $\vec{F}_{ij}$  направлен по касательной к окружности радиуса  $\rho$  с центром в  $O_i$ . Эта окружность получила название круга трения. Ее радиус можно найти из  $\Delta BO_i K$ :

$$\rho = r_{\rm u} \sin \varphi \approx r_{\rm u} f$$
,

где r<sub>и</sub> – радиус цапфы, т. е. опорного участка звена *i*.

При исследовании динамики шарнирных механизмов с учетом трения удобно считать, что полная реакция  $F_{tj}$  проходит через центр O<sub>i</sub>. В этом случае необходимо дополнительно учитывать момент сил трения  $M_{rpij} = F_{ij}^{n} r_{u} f$ , направленный противоположно относительной угловой скорости  $\omega_{ij}$ . Коэффициент трения f для вращательной пары определяется из эксперимента. Если таких данных нет, то используются экспериментальные данные, полученные для плоских поверхностей. Однако при этом следует иметь в виду, что коэффициент трения для цилиндрических поверхностей с внутренним касанием примерно на 30% больше, чем для поверхностей плоских.

# 1.3.4 Уравнения движения механизмов с одной степенью свободы. Приведение сил и масс в плоских механизмах

Уравнениями движения механизма называют аналитические зависимости, которые связывают силы, действующие на звенья механизма, с параметрами движения этих звеньев. Уравнения движения записываются с помощью различных принципов и теорем классической механики и могут быть представлены в различных формах. Для записи уравнений движения механизмов с одной степенью свободы чаще используют теорему об изменении кинетической энергии материальной системы. Согласно теореме об изменении кинетической энергии, перемещение материальной системы из начального положения в конечное равно сумме работ, совершаемых на этом перемещении всеми силами, действующими на систему. Аналитически теорема (ее интегральная форма) выражается равенством

$$T - T_0 = \sum_{k=1}^m A_k , \qquad (1.16)$$

где T,  $T_0$  – значения кинетической энергии системы в ее конечном и начальном положениях;  $A_k$  – работа, совершаемая k- $\ddot{u}$  из m сил, которые действуют на систему при ее перемещении из начального положения в конечное.

Кинетическая энергия механизма представляется суммой кинетических энергий подвижных звеньев механизма, имеющих конечную массу:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i; \quad T_0 = \sum_{i=1}^{n} T_{i0}, \qquad (1.17)$$

где  $T_i$ ,  $T_{i0}$  – конечное и начальное значения кинетической энергии i-ro звена механизма; n – число подвижных звеньев механизма.

Подставив выражения (1.17) в равенство (1.16), получим уравнение движения механизма в форме интеграла энергии:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i - \sum_{i=1}^{n} T_{i0} = \sum_{k=1}^{m} A_k .$$
 (1.18)

При плоском движении кинетическую энергию любого звена механизма определяют по формуле

$$T_{i} = \frac{1}{2}m_{i}\upsilon_{ci}^{2} + \frac{1}{2}J_{ci}\omega_{i}^{2}, \qquad (1.19)$$

где  $m_i$  – масса i-го звена механизма;  $v_{ci}$  – скорость центра масс *i*-го звена;  $J_{ci}$  – момент инерции *i*-го звена механизма относительно оси, проходящей через центр масс звена перпендикулярно плоскости движения;  $\omega_i$  – угловая скорость *i*-го звена.

Для i-ro звена механизма, которое движется поступательно, полагая в формуле (1.68)  $\omega_i = 0$ , находим

$$T_i = \frac{1}{2} m_i \upsilon_{ci}^2 \, .$$

Для *i*-го звена механизма, которое вращается вокруг неподвижной оси, формула (1.19) вырождается в следующую:

где  $J_i$  – момент инерции *i*-го звена механизма относительно оси вращения.

Уравнение (1.18) даже для плоских механизмов с небольшим числом степеней свободы применяется редко из-за неудобства, связанного с операцией суммирования, которую необходимо выполнять по *n* звеньям и *m* силам. Чаще используют другую формулу уравнения движения, при выводе которой вместо механизма рассматривается его динамическая модель. Уравнение движения механизма заменяется уравнением движения одного его звена (или одной точки звена), называемого звеном (точкой) приведения. За звено приведения обычно выбирают звено, по обобщенной координате которого проводят исследование механизма (начальное звено механизма).

При вращательном движении начального звена механизма уравнение (1.18) заменяется уравнением движения начального звена, принимаемого за звено приведения (рис. 1.25). Момент инерции этого звена  $J_n$  относительно оси вращения называется приведенным моментом инерции. Момент  $M_n$  пары сил, действующей на звено приведения, называется приведенным моментом сил.

Если начальное звено совершает поступательное движение, то для построения динамической модели механизма выбирается точка B начального звена, принимаемая за точку приведения. В этой точке сосредоточивается приведенная масса  $m_{\Pi}$  звена. Точка приведения движется под действием приведенной силы  $F_{\Pi}$  так, что ее обобщенная координата *s* в любой момент времени совпадает с обобщенной координатой механизма (рис. 1.26). Таким образом уравнение движения механизма заменяется уравнением движения одной его точки.





Puc. 1.26

Запишем уравнение движения звена приве-

Puc. 1.25

дения, совершающего вращательное движение, в форме интеграла энергии. Будем считать, что при перемещении звена из начального положения в конечное его обобщенная координата изменяется от  $\varphi_0$  до  $\varphi$ , а приведенный момент инерции – от  $J_{n0}$  до  $J_n$ . Тогда уравнение (1.17) переписывается в виде

$$\frac{1}{2}J_{n}\omega^{2} - \frac{1}{2}J_{n0}\omega_{0}^{2} = \int_{\varphi_{0}}^{\varphi}M_{n}d\varphi, \qquad (1.20)$$

где  $\omega$  – угловая скорость звена приведения, когда его положение определяется координатой  $\varphi$ ;  $\omega_0$  – значение скорости со при  $\varphi = \varphi_0$ .

Необходимые и достаточные условия тождественности уравнений (1.18) и (1.20) выражаются равенствами

$$\int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{\Pi} d\varphi = \sum_{k=1}^{m} A_k;$$

$$\frac{1}{2} J_{\Pi} \omega^2 = \sum_{i=1}^{n} T_i; \quad \frac{1}{2} J_{\Pi 0} \omega_0^2 = \sum_{i=1}^{n} T_{i0};$$
(1.21)

Приведенный момент  $M_{\rm n}$  определяется из первого равенства системы (1.70) как момент пары сил, условно приложенной к звену приведения, элементарная работа которой равна сумме элементарных работ сил и пар сил, действующих на звенья механизма. В практических расчетах равенство элементарных работ удобно заменить равенством мощностей:

$$M_{\rm n}\omega = \sum_{k=1}^m N_k; \qquad (1.22)$$

где  $N_k$  – мощность k- $\ddot{u}$  силы (момента пары сил), действующей на звено механизма.

Если через  $v_k$  обозначить скорость точки приложения силы  $F_k$ , а через  $\omega_k$  – угловую скорость звена механизма, на которое действует пара сил с моментом  $M_k$ , то соответствующие мощности сил и моментов пар сил определяются формулами

$$P_k = F_k \upsilon_k \cos(\vec{F}_k, \vec{\upsilon}_k); \quad P_k = M_k \omega_k.$$
(1.23)

Моменты  $M_{\pi}$  и  $M_{\kappa}$  в (1.22) и (1.23) считаются положитель ными, если их направление совпадает с направлениями угловых скоростей  $\omega$  и  $\omega_k$ , и отрицательными, если эти направлен: противоположны.

Подставив (1.23) в (1.22), получим формулу для вычислен приведенного момента сил:

$$M_{\pi} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\omega} [F_k \upsilon_k \cos(\vec{F}_k, \vec{\upsilon}_k) + M_k \omega_k].$$
(1.24)

Согласно второму равенству системы (1.21) приведенный момент инерции  $J_{\Pi}$  можно определить как момент инерции, которым должно обладать звено приведения относительно оси вращения, чтобы его кинетическая энергия была равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма. Формулу для вычисления приведенного момента инерции можно получить подстановкой (1.19) во второе равенство системы (1.21):

$$I_{\rm n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\omega^2} (m_i v_{ci}^2 + J_{ci} \omega_i^2)$$
(1.25)

Если начальное звено механизма с одной степенью свободы совершает поступательное движение и приведение осуществляется к некоторой точке звена (точке приведения), то определению подлежат приведенные масса  $m_n$  и сила  $F_n$ . Приведенной массой механизма  $m_n$  называется такая условная масса, сосредоточенная в точке приведения, при которой кинетическая энергия этой точки равна сумме кинетических энергий всех звеньев механизма. Формула, определяющая приведенную массу  $m_n$ , по аналогии с (1.24) записывается в виде

$$m_{\rm m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\nu^2} (m_i \nu_{ci}^2 + J_{ci} \omega_i^2), \qquad (1.26)$$

где *v* – скорость точки приведения.

Приведенной силой *F*,, называется условная сила, приложенная в точке приведения, которая определяется из равенства элементарной работы этой силы и суммы элементарных работ сил и пар сил, действующих на звенья механизма. По аналогии с формулой (1.24)

$$F_{\pi} = \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\upsilon} [F_k \upsilon_k \cos(\vec{F}_k, \vec{\upsilon}_k) + M_k \omega_k].$$
(1.27)

Из формул (1.24) – (1.27) следует, что приведенные сила (момент сил) и масса (момент инерции) зависят не от скорости точки приведения (звена приведения), а от отношения скоростей (аналогов скоростей), которые в свою очередь являются функциями положения звеньев, т. е. функциями обобщенной координаты механизма. Поэтому операция приведения сил и масс механизма может выполняться до решения уравнений движения и определения скоростей точек приведения или угловых скоростей звеньев приведения (и в этом ее важнейшее достоинство). После приведения сил и пар сил, приложенных к звеньям механизма, а также масс и моментов инерции звеньев, динамическая задача о движении механизма как связанной системы звеньев сводится к более простой задаче о движении одного звена (звена приведения) или одной точки этого звена (точки приведения). Уравнение движения механизма в этом случае принимает вид уравнения (1.20), если звено приведения совершает вращательное движение с обобщенной координатой  $\varphi$ . Если звено приведения движется поступательно с обобщенной координатой  $\varphi$ , то уравнение движения механизма переписывается в виде

$$\frac{1}{2}m_{\rm n}\upsilon^2 - \frac{1}{2}m_{\rm n0}\upsilon_0^2 = \int_{s_0}^s F_{\rm n}ds. \qquad (1.28)$$

Запись уравнения движения механизма в форме интеграла энергии возможна лишь в ограниченных случаях, например, когда приведенные

силы зависят от положений звеньев. При изучении движения механизма в периоды пуска и останова или периодически неравномерного движения используется дифференциальная форма записи уравнений движения, которая получается из дифференциальной формы теоремы об изменении кинетической энергии:

$$dT = dA, \tag{1.29}$$

где *dT* – дифференциал кинетической энергии механизма; *dA* – элементарная работа действующих на механизм сил.

После приведения сил и масс в механизме с вращающимся звеном приведения с помощью (1.29) запишем:

$$d\left(\frac{1}{2}I_{n}\omega^{2}\right) = M_{n}d\varphi$$
 или  $\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{2}I_{n}\omega^{2}\right) = M_{n}$ 

Выполняя дифференцирование в левой части последнего равенства, получим уравнение движения механизма в дифференциальной форме:

$$I_{\rm n}\varepsilon + \frac{1}{2}\omega^2 \frac{d}{d\varphi} (J_{\rm n}) = M_{\rm n}$$
(1.30)

Здесь *є* – угловое ускорение звена приведения.

Эквивалентная замена  $M_{\rm n} \sim F_{\rm n}$ ,  $J_{\rm n} \sim m_{\rm n}$ ,  $\varphi \sim s$  позволяет применить (1.30) для случая, когда звено приведения совершает поступательное движение. Тогда дифференциальное уравнение движения механизма принимает следующий вид:

$$m_{\rm m} \frac{d^2 s}{dt^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{d}{d\varphi} (m_{\rm m}) = F_{\rm m}$$
(1.31)

Следует иметь в виду, что уравнения вида (1.30), (1.31) лишь приближенно описывают движение механизма. При определенных условиях (когда, например, приходится учитывать взаимодействие исполнительного механизма с приводным двигателем) они принимают более сложный вид или оказываются связанными с общей системой уравнений, которая описывает работу всего машинного агрегата.

#### 1.3.5 Стадии (режимы) движения механизма

В механизмах с одной степенью свободы принято различать три стадии (режима) работы: разбег, установившееся движение и выбег (рис. 1.27). При изучении перечисленных режимов работы механизма воспользуемся уравнением (1.16), в котором суммарную работу всех сил разложим на работу движущих сил A, работу сил производственного  $A_{\rm n,c}$  и вредного  $A_{\rm B,c}$  сопротивлений:

$$T - T_0 = A_{\rm g} + A_{\rm n.c} + A_{\rm B.c} \,. \tag{1.32}$$

На стадии разбега скорости звеньев механизма возрастают от нуля до некоторого рабочего значения, соответствующего скорости установившегося значения. Следовательно, на стадии разбега  $T_0 = 0$  и согласно равенству (1.32) можно записать:

$$A_{\rm m} = A_{\rm m,c} + A_{\rm B,c} + T \,. \tag{1.33}$$

Выражение (1.33) показывает, что на стадии разбега при запуске механизма движущие силы должны не только преодолеть силы полезного и вредного сопротивления, но и сообщить механизму кинетическую энергию. В некоторых случаях в связи с требованиями технологического процесса для уменьшения времени пуска подвижные звенья механизма на стадии разбега не нагружаются силами полезного сопротивления ( $A_{n.c} = 0$ ). Например, рабочий процесс резания в металлорежущих станках начинается только после завершения стадии разбега.

Установившийся режим движения механизма – это движение, при котором обобщенная скорость и кинетическая энергия механизма являются периодическими функциями времени. Время цикла установившегося движения  $t_{u}$  – это минимальный промежуток времени, по истечении которого обобщенная координата и кинетическая энергия меха-



Puc. 1.27

низма принимают те же значения, что и в начале этого промежутка (рис. 1.27).

Мгновенная скорость меняется за время цикла  $t_{\rm u}$ , но ее среднее значение за цикл и, следовательно, за весь период установившегося движения остается постоянным. Изменение кинетической энергии за несь период установившегося движения равно нулю,

и уравнение (1.32) принимает вид

$$A_{\rm m} = A_{\rm m.c} + A_{\rm B.c} \,. \tag{1.34}$$

Из (1.34) видно, что энергия движущих сил в установившемся режиме машин расходуется только на преодоление производственных и вредных сопротивлений. И чем меньше работа сил вредного сопротивления (трения и др.), тем эффективнее используется энергия в машине.

На стадии выбега *(останова)* скорости звеньев механизма убывают до нуля. Движущие силы отключают, поэтому  $A_{\partial} = 0$ . В конце выбега T = 0, и уравнение (1.32) перепишем следующим образом:

$$T_0 = A_{\text{II.c}} + A_{\text{B.C}}$$

Когда вся кинетическая энергия механизма оказывается израсходованной на преодоление сил производственного и вредного сопротивлений, механизм останавливается. Для уменьшения времени торможения используются тормозные устройства, развивающие дополнительную работу тормозящих сил. Особенно эффективно применение тормозных устройств, если по технологическим причинам производственные сопротивления на стадии выбега выключаются.

#### 1.3.6 Коэффициент полезного действия механизма

Одним из важнейших параметров, оценивающих качество машин и механизмов, эффективность использования ими поступающей энергии, является коэффициент полезного действия. Коэффициент полезного действия (КПД) – это отношение работы сил производственного сопротивления  $A_{n.c}$  к работе движущих сил  $A_{d}$ , совершаемых за один и тот же промежуток времени:

$$\eta = \frac{A_{\text{n.c}}}{A_{\text{m}}}$$

Если КПД вычисляется за бесконечно малый промежуток времени (мгновенный КПД), то вместо отношения работ берется отношение мощностей

$$\eta = \frac{P_{\text{n.c}}}{P_{\text{n}}}$$

где  $P_{\text{п.с}}$  – мощность на ведомом звене;  $P_{\text{д}}$  – мощность на ведущем звене.

Так как за период установившегося движения выполняется равенство (1.34), работу сил полезного сопротивления удобно представить разностью  $A_{n.c} = A_{d} + A_{B.c}$ . Тогда КПД механизма при установившемся движении можно подсчитывать по формуле

$$\eta = \frac{A_{\pi} + A_{\text{B,c}}}{A_{\pi}} = 1 - \frac{A_{\text{B,c}}}{A_{\pi}}$$
(1.35)

Отношение  $\frac{A_{\text{в.с.}}}{A_{\text{д.}}}$  называют коэффициентом потерь  $\Psi$ . При устано-

вившемся движении коэффициент потерь определяют равенством

$$\Psi = \frac{A_{\text{в.с}}}{A_{\text{д}}} = \frac{A_{\text{в.с}}}{A_{\text{п.c}} + A_{\text{в.c}}}$$
или  $\Psi = \frac{P_{\text{в.c}}}{P_{\text{п.c}} + P_{\text{в.c}}}$ 

Коэффициенты полезного действия и потерь являются безразмерными величинами. С практической точки зрения наибольший интерес представляют их значения при установившемся движении механизма.

Анализ формулы (1.35) позволяет сделать следующие выводы:

КПД всегда меньше единицы, так как в реальных условиях работа сил вредных сопротивлений не может быть равной нулю; КПД механизма на холостом ходу (т. е. на стадии разбега, когда подвижные звенья не нагружаются силами производственного сопротивления) равен нулю. В этом случае  $A_{n,c} = 0$  и вся работа движущих сил затрачивается на преодоление сил вредных сопротивлений;

если  $A_{_{\rm B,c}} > A_{_{\rm I}}$ , то КПД становится отрицательным и механизм оказывается неспособным совершать движение в заданном направлении. Наблюдается явление, называемое самоторможением.

На КПД влияют многочисленные факторы, связанные с конструкцией механизмов и машин, условиями их эксплуатации. Так, увеличения КПД можно добиться заменой трения скольжения трением качения или применением рациональной смазки в узлах трения.

#### Глава 2 СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### 2.1 Основные модели прочностной надежности элементов конструкций

#### 2.1.1 Задачи и методы сопротивления материалов

При работе машин и механизмов всякий элемент конструкции в результате действия на него внешних сил изменяет в той или иной степени свои первоначальные размеры и форму, т. е. деформируется. Указанные изменения могут привести либо к разрушению элемента, либо к недопустимому искажению его формы и размеров. Чтобы этого не произошло, необходимо правильно выбрать материал и поперечные размеры для каждого элемента конструкции в зависимости от характера действующих сил и условий эксплуатации. Основания для решения поставленной задачи дает наука о сопротивлении материалов, в которой изложены инженерные методы расчета элементов сооружений и машин на прочность, жесткость и устойчивость.

Под прочностью понимают способность конструкции, а также ее частей и деталей, выдерживать, не разрушаясь, действие внешней нагрузки.

Под жесткостью подразумевают способность конструкции и ее элементов сопротивляться изменению своих первоначальных размеров и формы.

Расчеты на прочность и жесткость являются основными видами расчетов, изучаемых в курсе сопротивления материалов. Однако имеется ряд задач, в которых самое серьезное внимание приходится уделять вопросам устойчивости, под которой понимается способность конструкции и ее элементов сохранять определенную начальную форму равновесия. Расчет на устойчивость должен обеспечить отсутствие качественного изменения характера деформации.

Элементы конструкций предназначены для передачи нагрузки без разрушения и без существенного изменения своих размеров, т.е. они должны обладать свойствами прочности и жесткости.

Сопротивление материалов, являясь наукой о прочности и надежности элементов конструкций, обобщает инженерный опыт и разрабатывает научные основы проектирования и конструирования надежных конструкций. Основным содержанием науки о сопротивлении материалов является построение моделей и методов оценки прочностной надежности, позволяющих инженеру выбрать материал, определить необходимые размеры элементов конструкций и оценить способность этих элементов сопротивляться внешним воздействиям. Сопротивление материалов – инженерная наука, для нее характерны упрощающие гипотезы и приближенные, а потому простые приемы расчета, широкое привлечение экспериментальных методов оценки обоснованности расчетных данных.

Сопротивление материалов, с одной стороны, связано с материаловедением, а с другой – опирается на законы и теоремы общей механики и в первую очередь на законы статики.

Методы сопротивления материалов широко используются в расчетах деталей машин общемашиностроительного применения и элементов специальных конструкций.

#### 2.1.2 Модели прочностной надежности

Оценка прочностной надежности элемента конструкции начинается с выбора расчетной модели (схемы). Моделью называют совокупность представлений, условий и зависимостей, описывающих объект, явление.

При выборе (построении) модели учитывают наиболее значимые и отбрасывают несущественные факторы, которые не оказывают достаточно заметного влияния на условия функционирования элемента конструкции (детали). Учет всех факторов принципиально невозможен в силу их неисчерпаемости.

Для одной и той же детали может быть предложено несколько расчетных моделей, которые будут отличаться различной глубиной (точностью) описания реального объекта и условий его работы.

В то же время одной расчетной схеме можно поставить в соответствие целый ряд деталей различных конструкций.

Для определения прочностной надежности детали используют вспомогательные модели материала, формы, нагружения (сил) и разрушения (рис. 2.1).



Puc. 2.1

Модели материала. В расчетах прочностной надежности материал детали представляют однородной сплошной средой, что позволяет рассматривать тело как непрерывную среду и применять методы математического анализа.

Под однородностью материала понимают независимость его свойств от размеров выделенного объема. Такая схематизация основана на осреднении свойств материала в объемах и обоснована многочисленными экспериментальными исследованиями.

В качестве конструкционных используют анизотропные материалы, обладающие различными свойствами по различным направлениям (например, стеклопластики, фанера, ткани и др.). Однако в сопротивлении материалов в основном рассматриваются изотропные материалы.

Расчетная модель материала наделяется такими физическими свойствами, как упругость, пластичность и ползучесть, присущими в той или иной мере конструкционным материалам.

Упругостью называют свойство тела (детали) восстанавливать свою форму после снятия внешней нагрузки. Это свойство знакомо каждому. Например, возвращение в исходное положение изогнутой ветки дерева, сжатой или растянутой пружины и т.п.

Пластичностью называют свойство тела сохранять после разгрузки полностью или частично деформацию, полученную при нагружении (например, большой изгиб мягкой проволоки или свинцовой пластинки и др.).

Ползучестью называют свойство тела увеличивать со временем деформацию при действии внешних сил (например, вытяжка канатов и т.п.).

Модели формы. Геометрическая форма элементов конструкций обычно весьма сложна. На рис. 2.2, а – в показаны три распространенные в конструкциях детали: вал редуктора (а), храповое колесо (б) и тройник (в). Точный учет всех геометрических особенностей детали невозможен, а часто и нецелесообразен, так как приводит к сложным расчетам.



Puc. 2.2

На практике для оценки прочностной надежности вводят упрощение в геометрию детали, приводя ее к схеме стержня (бруса), пластины, оболочки, массива (пространственного тела).

Стержнем, или брусом, называют тело, поперечные размеры которого малы в сравнении с его длиной (рис. 2.3, а). Стержень может иметь постоянное или переменное по длине сечение. Кольцо (рис. 2.3, б) рассматривают как стержень с криволинейной осью, а пружину – как пространственно изогнутый стержень.



в)

*Puc.* 2.3

Пластиной (рис. 2.3, в) называют тело, ограниченное двумя плоскими или слабоизогнутыми поверхностями и имеющее малую толщину. Модель пластины можно использовать для схематизации, например, тела колеса (см. рис. 2.2, б).

Оболочка (рис. 2.3, г) – тело, ограниченное двумя поверхностями и имеющее малую толщину по сравнению с радиусом кривизны и длиной. Тройник, показанный на рис. 2.2, в, можно схематизировать в виде двух составных цилиндрических оболочек.

Многие детали могут быть также представлены в виде составных моделей.

Пространственным телом (массивом) называют модель, размеры которой соизмеримы (например, зуб храпового колеса, рис. 2.3, д).

Модели нагружения. Силы являются мерой механического взаимодействия элементов конструкций. Если элемент конструкции (деталь) рассматривается изолированно от сопряженных деталей, то действие последних заменяется силами, которые называют внешними. Силы взаимодействия между частями отдельной детали или между деталями в сопряжении называют внутренними.

Такое деление сил часто носит условный характер. Например, при оценке надежности работы корпусных деталей сосуда под давлением (рис. 2.4, а) болты, стягивающие эти детали, исключают из рассмотрения, а их действие заменяют внешними силами *F*. При общей оценке

работоспособности системы эти силы будут внутренними.

При схематизации условий работы в расчеты вводят и другое упрощение в систему сил, подразделяя их условно на сосредоточенные, распределенные и объемные (массовые).

Сосредоточенной силой называют силу, действующую на небольшую часть поверхности детали, например силу, приложенную к фланцу сосуда со стороны болта (рис. 2.4, а).

Распределенными называют силы, действующие на участках поверхности, соизмеримых с полной поверхностью детали, например давление жидкости в сосуде (рис. 2.4, а).

Существенно, что в зависимости от цели расчета одна и та же нагрузка может приниматься либо сосредоточенной, либо распределенной.



Например, при расчете работоспособности болта сила *F* схематизируется в виде нагрузки *q*, распределенной по опорной поверхности головки (рис. 2.4, б).

По характеру изменения во времени нагрузки подразделяют на статические и переменные. Статической называют нагрузку, которая медленно возрастает от нуля до своего номинального значения и остается постоянной в процессе работы детали (рис. 2.4, а).

Переменной называют нагрузку, периодически меняющуюся во времени (рис. 2.5, б). Она характеризуется параметрами: амплитудой силы *F<sub>a</sub>*, средней силой *F<sub>m</sub>*, частотой нагружения *t* и формой цикла.



*Puc. 2.5* 

Различают малоцикловое нагружение, характерное для деталей, циклы работы которых набираются за счет запуска и остановки машины. Обычно число циклов нагружений не превышает  $10^4...10^5$ . Если число циклов нагружения детали превышает  $10^5...10^6$ , то такое нагружение называют многоцикловым. Оно характерно для деталей длительно работающих машин.

Модели разрушения. Моделям нагружения соответствуют модели разрушения-уравнения (условия), связывающие параметры работоспособности элемента конструкции в момент разрушения с параметрами, обеспечивающими прочность.

В зависимости от условий нагружения рассматривают модели разрушения: статического, малоциклового и усталостного (многоциклового).

#### 2.1.3 Внешние и внутренние силы

В сопротивлении материалов активные внешние силы, действующие на рассматриваемое тело (элемент конструкции), часто называют нагрузками.

По способу приложения нагрузки подразделяют на сосредоточенные и распределенные.

К сосредоточенным относят силы, которые передаются на элемент конструкции через площадку небольших размеров (по сравнению с размерами всего элемента). При расчетах сосредоточенную силу считают приложенной в точке. Характеристикой сосредоточенной силы является ее модуль F, имеющий размерность, например, деканьютон.

К распределенным относятся нагрузки, приложенные непрерывно на некоторой длине или площади. На схемах такие нагрузки изображают в виде графиков, показывающих изменение нагрузки по длине или поверхности тела. Характеристикой распределенной нагрузки является ее интенсивность q, т. е. величина нагрузки, которая приходится на единицу площади или длины. В первом случае величина q измеряется, например, в даН/м<sup>2</sup>, а во втором – в даН/м. Нагрузки могут быть распределены не только по поверхности, но и по объему (силы веса, силы инерции, магнитные силы и др.). Они также характеризуются интенсивностью, но имеющей размерность, например, даН/м<sup>3</sup>.

Распределенные по длине элемента конструкции нагрузки, как и сосредоточенные силы, реально в природе не существуют, а получаются в результате схематизации действительных нагрузок. В ряде случаев такая схематизация приводит к появлению пар сил (моментов).

По характеру воздействия на элементы конструкции нагрузки подразделяют на статические и динамические.

Статическими называют нагрузки, которые прикладываются к телу, постепенно возрастая от нуля до своей конечной величины и оставаясь в дальнейшем практически постоянными. При действии таких нагрузок колебания конструкции и ее частей незначительны.

Динамическими называют нагрузки, которые сопровождаются значительными ускорениями как деформированного тела (или его частей), так и взаимодействующих с ним тел. Возникающими при этом силами инерции пренебречь нельзя. Динамические нагрузки делятся на мгновенно приложенные, ударные и повторно-переменные.

Сопротивление тел, оказываемое действующим на них нагрузкам, обусловливается наличием в этих телах особых внутренних сил, природа которых объясняется теорией молекулярного строения материи. Указанные внутренние силы существуют всегда, они собственно являются причиной существования тела как такового. При действии на тело внешних сил изменяются внутренние силы – появляются дополнительные внутренние силы, которые в дальнейшем будем называть усилиями. Эти усилия и являются предметом нашего изучения, так как именно их величина характеризует способность тел сопротивляться внешним воздействиям.

Для определения величины внутренних усилий пользуются методом сечений, суть которого заключается в следующем.

1. Тело, на которое действует какая-либо внешняя нагрузка, в интересующем нас месте рассекается (мысленно) на две части (рис. 2.6, а).

2. Отбрасывается условно одна из частей (например, часть Б).



3. Действие отброшенной части Б на оставшуюся А заменяется внутренними силами.

Так как тело под действием внешних сил находилось в состоянии статического равновесия, то эти внутренние силы, являющиеся внешними для оставшейся части, должны уравновесить часть A с приложенными к ней внешними силами (рис. 2.6, б). Таким образом, внутренние силы сводятся к категории внешних сил, для определения которых можно использовать уравнения статики твердого тела.

Со стороны отброшенной части на часть А действует система сил, распределенных по всему сечению. Эту систему в общем случае можно привести к одной силе R (главному вектору) и к одной паре сил M (главному моменту) (рис. 2.6, б). Выбрав систему координатных осей x, y, z с началом в центре тяжести сечения, разложим главный вектор и главный момент на составляющие по указанным осям. Эти составляющие имеют следующие обозначения и названия:  $R_x = N$  – продольная сила;  $R_y = Q_y$  и  $R_z = Q_z$  –поперечные силы соответственно в плоскостях yx и xz;  $M_x = M_{xp}$  – крутящий момент;  $M_y$  и  $M_z$  – изгибающие моменты соответственно в плоскостях xz и xy.

Этим видам внутренних усилий соответствуют следующие виды деформации:

1. растяжение или сжатие – при появлении в поперечных сечениях только продольных усилий *N*;

2. сдвиг – при появлении в поперечных сечениях только поперечных усилий  $Q_y$  или  $Q_z$ ;

3. кручение – в поперечных сечениях возникают только крутящие моменты;

4. изгиб – в сечении действует только изгибающий момент  $M_y$  или  $M_z$ 

Появление в поперечных сечениях сразу нескольких внутренних усилий приводит к сложным видам деформации (сложному сопротивлению).

#### 2.1.4 Понятие о напряжениях. Напряженное состояние в точке

Внутренние усилия, которые были найдены выше из уравнений статики, не являются реальными, а представляют собой лишь статический эквивалент этих усилий, распределенных по всей площади рассматриваемого сечения. Иначе говоря, найденные усилия являются равнодействующими действительных внутренних сил, возникающих в каждой точке сечения. В сечении части А (рис. 2.6, б) выделим элементарную площадку *dA* (рис. 2.7). В силу малости элемента можно считать, что внутренние усилия, приложенные к его различным точкам, одинаковы по величине и направлению. Тогда равнодействующая их  $d\overline{R}$ будет проходить через центр тяжести площади элемента dA, координаты которого равны у и z.



Проектируя вектор dR на оси x, y и z, получим элементарную продольную силу  $dN_x$  и элементарные поперечные силы  $dQ_y$  и  $dQ_z$ . Раз-

делив эти усилия на площадь *dA*, получим величины внутренних сил, приходящихся на единицу площади, рис. 2.7:

$$\sigma = \frac{dN_x}{dA}; \quad \tau_y = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA}$$

Эти величины называют напряжениями в точке (y, z) поперечного сечения тела, причем  $\sigma$  – нормальное напряжение;  $\tau$  – касательное напряжение.

Нормальные и касательные напряжения представляют собой интенсивность распределения соответственно нормальных и поперечных сил, действующих по элементарной площадке в рассматриваемой точке.

Через любую точку упругого тела, подверженного действию внешней нагрузки, можно провести бесчисленное множество сечений (площадок), по которым в общем случае будут действовать как нормальные, так и касательные напряжения. При этом величина и направление указанных напряжений в каждом конкретном случае будут зависеть от ориентации площадки.

Деформация нагруженного тела сопровождается изменением рас-



Puc. 2.8

стояний между его частицами. Внутренние силы, возникающие между частицами, изменяются под действием внешней нагрузки до тех пор, пока не установится равновесие между внешней нагрузкой и внутренними силами сопротивления. Полученное состояние тела называют напряженным состоянием. Оно характеризуется совокупностью нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, которые можно провести через рассматриваемую точку. Исследовать напряженное состояние в точке тела – значит получить зависимости, позволяющие определить напряжения по любой площадке, проходящей через указанную точку.

Для исследования напряженного состояния в окрестности исследуемой точки тела обычно выделяют элемент в виде бесконечно малого параллелепипеда (рис. 2.8). На его гранях действуют внутренние силы, заменяющие воздействие удаленной части тела и вызывающие появление напряжений. Полные напряжения на гранях можно разложить на нормальные и касательные составляющие. Если ориентацию выделенного элемента изменить, то действующие на его гранях напряжения будут также изменяться. При этом можно найти такое положение элемента, при котором на его гранях касательные напряжения равны нулю.

Грани элемента, по которым касательные напряжения не действуют, называют главными площадками, а нормальные напряжения на них – главными напряжениями. Доказано, что в каждой точке тела имеются по крайней мере три главные площадки, причем они всегда взаимно перпендикулярны. Следовательно, в каждой точке будут также три главных напряжения, линии действия которых определяют три главных направления напряженного состояния в данной точке. Главные напряжения принято обозначать так, чтобы наибольшее из них (в алгебраическом смысле) имело индекс 1, а наименьшее – индекс 3. Например, если одно из главных напряжений равно нулю, другое (+500) даH/см<sup>2</sup>, а третье – (-1200) даH/см<sup>2</sup>, то  $\sigma_I = 500$  даH/см<sup>2</sup>;  $\sigma_2 = 0$ ;  $\sigma_3 = -1200$  даH/см<sup>2</sup>.



В зависимости от величины главных напряжений различают следующие виды напряженного состояния в точке: линейное, или одноосное – только одно главное напряжение (любое из трех) отлично от нуля, а два других равны нулю (рис. 2.9, а); плоское, или двухосное – два главных напряжения отличны от нуля (рис. 2.9, б); объемное, или трехосное – все главные напряжения отличны от нуля (рис. 2.9, в).

На практике чаще всего имеют место два первых вида напряженно-го состояния.

#### 2.1.5 Основные гипотезы и допущения

В сопротивлении материалов принимают следующие основные гипотезы и допущения относительно свойств материала, нагрузок и характера деформаций.

1. Гипотеза о сплошном строении тела. Предполагают, что материал полностью заполняет объем тела (пустоты отсутствуют).

2. Гипотеза об идеальной упругости материала. Под идеальной упругостью будем понимать способность тела восстанавливать свою первоначальную форму и размеры после устранения причин, вызвавших деформацию тела.

3. Гипотеза об однородности материала. Предполагают, что все частицы материала обладают одинаковыми свойствами, т. е, свойства материала не зависят от размеров тела.

4. Гипотеза об изотропности материала. Предполагают, что в любом направлении свойства материала одинаковы. В некоторых случаях эта гипотеза неприменима. Например, у древесины в различных направлениях свойства неодинаковы.

5. Гипотеза плоских сечений. Поперечные сечения, плоские и нормальные к оси бруса до приложения к нему нагрузки, остаются плоскими и нормальными к его оси после деформации.

6. Допущение о малости деформаций. Деформации тела настолько малы по сравнению с его размерами, что не оказывают существенного влияния на взаимное расположение нагрузок.

7. Допущение о линейной зависимости между деформациями и нагрузками. Предполагают, что для большинства материалов перемещения, являющиеся результатом деформации тела, прямо пропорциональны вызвавшим их нагрузкам.

8. Принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции или наложения). Какая-либо величина, например усилие или перемещение в любом элементе конструкции, вызванные различными факторами (несколькими силами, воздействием температуры), может быть получена как сумма величин, найденных от действия каждого из этих факторов в отдельности.

Указанный принцип в некоторых (весьма редких) случаях неприменим, о чем делают специальные оговорки при рассмотрении соответствующих задач.

9. Принцип Сен-Венана. Если тело нагружается статически эквивалентными системами сил и размеры области их приложения невелики (по сравнению с размерами тела), то в сечениях, достаточно удаленных от мест приложения нагрузок, величина напряжений весьма мало зависит от способа нагружения. Например, при расчете зубчатого колеса можно фактическую нагрузку от шестерни, распределенную в зоне контакта зубьев по некоторому закону, заменить сосредоточенной силой.

Принятые гипотезы и допущения широко используют в расчетах элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость. Результаты расчетов хорошо согласуются с данными практики.

#### 2.2 Растяжение и сжатие

#### 2.2.1 Напряжения и перемещения. Закон Гука

Стержень (рис. 2.10), под действием двух равных по величине и противоположно направленных по его продольной оси сил F, претерпевает деформацию растяжения, которая проявляется в изменении длины и поперечных размеров стержня. Его первоначальная длина l увеличивается на величину  $\Delta l$ , именуемую абсолютным удлинением, и становится равной  $l_1$ . Таким образом,



*Puc. 2.10* 

 $\Delta l = l_1 - l$ 

Абсолютное удлинение стержня при данном значении деформирующей силы возрастает с увеличением его первоначальной длины. В связи с этим деформация при растяжении более полно характеризуется относительной величиной  $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ , которую называют относительным удлинением. Очевидно,

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{l_1 - l}{l} \tag{2.1}$$

При направлении внешних сил, противоположном указанному на рис. 2.10, стержень испытывает деформацию сжатия. В этом случае называют абсолютным укорочением, так как при сжатии длина стержня уменьшается. Одновременно с продольной деформацией стержень претерпевает поперечную деформацию. При растяжении поперечные размеры уменьшаются, при сжатии – увеличиваются. Относительная поперечная деформация

$$\varepsilon_1 = \frac{a_1 - a}{a}$$

Отношение

$$\mu = \left| \frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon} \right| \tag{2.1'}$$

называют коэффициентом Пуассона. Этот коэффициент определяют опытным путем. Для стали  $\mu = 0,25 \div 0,33$ ; для меди  $\mu = 0,31 \div 0,34$ ; для бронзы  $\mu = 0,32 \div 0,35$ ; для чугуна  $\mu = 0,23 \div 0,27$ ; для алюминия  $\mu = 0,32 \div 0,36$ .

Определим напряжения, возникающие в сечениях стержня, перпендикулярных его оси.

В соответствии с гипотезой плоских сечений полагаем, что для однородного стержня все поперечные сечения при деформации перемещаются параллельно и, следовательно, в них действуют только нормальные напряжения, равномерно распределенные по сечению. Рассечем стержень плоскостью I-I (рис. 2.10, а), перпендикулярной оси стержня. Из условия равновесия части стержня (рис. 2.10, б), принимая во внимание, что равнодействующая внутренних сил упругости  $N = A\sigma$  (где A – площадь поперечного сечения), имеем  $A\sigma - F = 0$ . Отсюда напряжение в поперечном сечении стержня при растяжении или сжатии

$$\sigma = \frac{F}{A} \tag{2.2}$$

Экспериментальными исследованиями установлено, что в пределах малых удлинений для пластичных материалов имеет место прямая пропорциональная зависимость между напряжениями и деформациями. Эта зависимость носит название закона Гука:

$$\sigma = E\varepsilon \tag{2.3}$$

Коэффициент пропорциональности *E* называется модулем продольной упругости или модулем упругости первого рода, он имеет размерность напряжений (H/м<sup>2</sup> или H/мм<sup>2</sup>) и характеризует способность материала сопротивляться упругой деформации при растяжении и сжатии. Величину модуля продольной упругости для различных материалов определяют экспериментально. Для стали  $E = (2,0.2,15) \, 10^5 \text{ H/мм}^2$ , для алюминия  $E = (0,7.0,8) \, 10^5 \text{ H/мм}^2$ , для бронзы  $E= 1,15.10^5 \text{ H/мм}^2$ , для дерева вдоль волокон  $E = 0,1.10^5 \text{ H/мм}^2$ , для стеклопластиков E= $(0,18.0,4) \, 10^5 \text{ H/мм}^2$ .

Подставив в формулу (2.3) значение величин  $\varepsilon$  и  $\sigma$  из формул (2.1) и (2.2), получим

$$\Delta l = \frac{Fl}{EA} \tag{2.4}$$

т. е. абсолютное удлинение (укорочение) стержня при растяжении (сжатии) прямо пропорционально растягивающей (сжимающей) силе, длине стержня и обратно пропорционально модулю упругости *E* и площади поперечного сечения *A*. Произведение *EA* называют жесткостью поперечного сечения при растяжении (сжатии).

Область применения закона Гука ограничивается некоторым предельным напряжением, называемым пределом пропорциональности. При напряжении, превышающем предел пропорциональности, линейная зависимость между напряжением и деформацией нарушается.

Величину предела пропорциональности, так же как и других напряжений, характеризующих механические свойства материалов, определяют при испытаниях образцов из различных материалов на растяжение и сжатие.

## 2.2.2 Механические характеристики и свойства материалов

Работоспособность конструкционных материалов при различных видах нагружения определяется величинами, которые называют механическими характеристиками. Механические характеристики устанавливают границу безопасной эксплуатации элементов конструкций при статическом и динамическом (циклическом и ударном) нагружениях. К числу основных механических характеристик относятся предельные напряжения, твердость, ударная вязкость.

Величины механических характеристик могут быть получены в лабораторных условиях доведением образцов до разрушения или чрезмерной деформации. Наиболее распространены испытания на растяжение и сжатие, так как они относительно просты, дают результаты, позволяющие с достаточной достоверностью судить о поведении материалов и при других видах деформации. Часто целью испытаний является определение твердости и ударной вязкости.

Все конструкционные материалы можно условно разделить на хрупкие и пластичные. К весьма пластичным материалам относят малоуглеродистые стали, алюминий, медь и некоторые другие. Эти материалы обладают способностью деформироваться в широких пределах без разрушения. Примерами хрупких материалов могут служить чугун, высокоуглеродистые сорта стали, металлокерамические материалы, стекло. Хрупкие материалы разрушаются без заметной предварительной деформации. Промежуточное положение занимают малопластичные материалы, к которым могут быть отнесены многие легированные стали, дюралюминий, бронза.

Испытания на растяжение. Диаграмма растяжений. Испытание различных материалов на растяжение осуществляют статическим нагружением на специальных машинах. Для этого применяют стандартный цилиндрический образец (рис. 2.11, а). Длина центрального цилиндра превышает его диаметр приблизительно в 15 раз.

На цилиндре рисками выделяют участок для измерения деформации, длина которого  $l_0 = 10d_0$ , где  $d_0$  – диаметр стержня до растяжения. Иногда для испытаний применяют плоские или малые цилиндрические образцы, у которых  $l_0 = 5d_0$ 

При растяжении образца на машинах регистрируют нагрузку на образец и его удлинение  $\Delta l$ . По полученным данным строят диа-



Puc. 2.11

грамму растяжения образца, представляющую кривую  $F = f(\Delta l)$ . Такая диаграмма для образца из малоуглеродистой стали показана на рис, 2.11, в, Большинство современных испытательных машин имеет устройство для автоматического вычерчивания диаграммы растяжения.

Однако форма такой диаграммы растяжения в координатах  $(F, \Delta l)$  зависит от размеров испытуемого образца, его длины и площади поперечного сечения. Диаграмма растяжения  $F = f(\Delta l)$  характеризует свойства конкретного испытуемого образца.

Количественная оценка физических свойств материала может быть сделана при помощи диаграммы растяжения в системе координат ( $\varepsilon$ ,  $\sigma$ ). Напряжение, откладываемое по вертикальной оси,  $\sigma = \frac{F}{A_0}$ , где  $A_0$  – площадь поперечного сечения образца до испытания. Относительное

удлинение образца, откладываемое по горизонтальной оси,  $\varepsilon = \frac{\Lambda l}{l_0}$ , где

 $l_0$  – длина расчетного участка образца до испытания. Так как величины  $A_0$  и  $l_0$  постоянны, диаграмма  $\sigma = f(\varepsilon)$  имеет тот же вид, что и  $F = f(\Delta l)$  и отличается от нее только масштабами.

Диаграмма  $\sigma = f(\varepsilon)$  характеризует свойства испытуемого материала и носит название условной диаграммы растяжения, так как напряжения и относительные удлинения вычисляют соответственно по отношению к первоначальной площади сечения и первоначальной длине.

Диаграмма растяжения образца из малоуглеродистой стали (рис. 2.11, в) характеризуется следующими четырьмя отличительными участками.

Участок I соответствует упругим деформациям материала образца. На этом участке справедлив закон Гука и величина деформации прямо пропорциональна растягивающему усилию (прямая OA).

Участок II начинается после точки А, когда диаграмма становится криволинейной. Однако до точки В деформации остаются упругими, т. е. при разгрузке образец восстанавливает свою первоначальную форму и размеры. При дальнейшем увеличении нагрузки за точкой В появляются неупругие деформации. В точке С начинается процесс деформации детали без увеличения внешней нагрузки. Этот процесс называется процессом текучести материала. В зоне текучести у стальных образцов существенно меняются электропроводность и магнитные свойства. Поверхность полированного образца покрывается линиями, наклоненными к его оси (линии Чернова).

Участок III (ДК) характерен увеличением нагрузки, при которой происходит дальнейшая деформация образца. Этот участок называется зоной упрочнения. Заканчивается участок при достижении максимальной нагрузки, воспринимаемой образцом.

Участок IV начинается в точке К и заканчивается разрушением образца в точке R. Этот участок носит название зоны разрушения образца. Деформация образца на этом участке характерна образованием шейки и удлинением образца за счет уменьшения ее диаметра (рис. 2.11, б).

Если испытуемый образец, не доводя до разрушения, нагрузить до состояния, соответствующего точке L диаграммы (рис.2.11, в), а затем разгрузить, то процесс разгрузки изобразится прямой LL'. Многочисленные испытания показывают, что эта прямая параллельна первоначальному участку OA диаграммы. При разгрузке деформация полностью не исчезает. Она уменьшается только на величину L'M упругой части удлинения. Отрезок OL' представляет собой остаточную или пластическую деформацию.

Следовательно,

$$\mathbf{OM'} = \Delta l'_{ynp} + \Delta l'_{ocm}$$

или

 $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{ynp} + \mathcal{E}_{ocm}$ 

Если образец нагрузить силой, меньшей  $F_A$ , и затем нагрузку снять, то имеет место только упругая деформация, остаточная (пластическая) деформация отсутствует.

В соответствии с диаграммой растяжения вводят следующие основные характеристики материала.

1. Отношение растягивающего усилия в точке А к первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_n=\frac{F_A}{A_0},$$

называемое пределом пропорциональности. До предела пропорциональности сохраняет силу закон Гука.

2. Отношение растягивающего усилия в точке В к первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_{y} = \frac{F_{B}}{A_{0}},$$

называемое пределом упругости.

Предел упругости – такое напряжение, при котором величина относительной остаточной деформации не превышает 0,005%, т. е. предел упругости соответствует такому наибольшему напряжению, до которого материал сохраняет свои упругие свойства. Для многих материалов разница между пределом пропорциональности и пределом упругости невелика, и на практике между ними обычно различия не делают.

3. Отношение растягивающего усилия в точке С к первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_{T}=\frac{F_{C}}{A_{0}},$$

называемое пределом текучести. Предел текучести – такое напряжение, при котором происходит рост деформации без увеличения нагрузки. Для ряда материалов, не имеющих на диаграмме выраженной площадки текучести, вводят понятие условного предела текучести, под которым подразумевают напряжение, вызывающее остаточную деформацию, равную 0,2%. 4. Отношение наибольшей нагрузки к первоначальной площади поперечного сечения стержня

$$\sigma_{B(ny)} = \frac{F_{\max}}{A_0},$$

называемое пределом прочности, или временным сопротивлением. Предел прочности при растяжении обозначают  $\sigma_{e.p.}$ , при сжатии  $\sigma_{e.c.}$ 

Предел прочности соответствует максимальному напряжению, возникающему в образце до его разрушения.

При испытании образца на разрыв определяют также относительное остаточное удлинение материала образца при разрыве:

$$\delta = \frac{\Delta l_{ocm}}{l_0} = \frac{l_1 - l_0}{l_0} 100\%,$$

где  $l_0$  – первоначальная расчетная длина испытуемого образца;  $l_1$  – расчетная длина образца после разрыва; ее измеряют после стыковки двух частей разорванного образца.

Величину остаточного удлинения образца  $\Delta l_{ocm}$  можно определить при помощи диаграммы растяжения (рис. 2.11, в). Для этого из полного удлинения образца  $\Delta l_{nom}$  при его разрушении в точке R вычитают величину упругого удлинения образца  $\Delta l_{ynp}$ . Задача решается графически с помощью прямой, проведенной через точку R параллельно участку OA упругого растяжения материала.

Относительное удлинение образца при разрыве, как уже было сказано, служит показателем пластических свойств материала.

Второй характеристикой пластичности материала является относительное остаточное сужение при разрыве

$$\psi = \frac{A_0 - A_1}{A_0} 100\%,$$

где  $A_0$  – первоначальная площадь поперечного сечения:  $A_1$  – площадь поперечного сечения в наиболее тонком месте шейки после разрыва.

5. Диаграмма растяжения хрупких материалов показана на рис. 2.11, г, где отклонение от закона Гука начинается при малых значениях деформирующей силы. Эта диаграмма не имеет площадки текучести. Образцы разрушаются при очень малой остаточной деформации без образования шейки. За характеристику прочности хрупких материалов, как и в случае растяжения, принимается временное сопротивление. Кроме указанных выше механических характеристик материала, с помощью диаграммы растяжения можно определить также его энергетические характеристики.

Площадь диаграмм, показанных на рис. 2.11, в, г, представляет работу, затрачиваемую на разрушение материала образца. Часть этой работы идет на нагревание материала образца, при этом, как видно из диаграмм, работа разрушения пластических материалов значительно больше, чем для хрупких материалов.

В пределах упругости полная работа деформации

$$A = \frac{A_{pa\delta}\Delta l}{2} \tag{2.5}$$

Важной характеристикой материала является удельная работа деформации, величину которой а находят как отношение полной работы к объему рабочей части образца:

$$a = \frac{A}{V} = \frac{A_{pa\delta}\Delta l}{2F_0 l_0}$$
$$a = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$$
(2.6)

ИЛИ

Вследствие упругой деформации в образце накапливается потенциальная энергия деформации. Величину полной *U* и удельной *u* потенциальной энергии принимают равной значению соответственно полной и удельной работы.

Диаграммой растяжения можно воспользоваться также для определения модуля упругости *E*.

На диаграмме растяжения (рис. 2.11, б) прямолинейный участок, соответствующий закону Гука, наклонен под углом  $\alpha$  к горизонтальной оси. Отметим текущее напряжение  $\sigma$  и соответствующее ему относительное удлинение  $\varepsilon$ . Тогда тангенс угла наклона участка ОА:

$$tg\alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Исходя из соотношения, выражающего закон Гука, получим

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Сопоставление этих формул позволяет сделать вывод о том, что  $E = tg\alpha$ 

Следовательно, модуль упругости материала численно равен тангенсу угла наклона к горизонтали прямолинейного участка ОА диаграммы растяжения.

Явление наклепа. Если при испытании создать в образце напряжение, превышающее предел текучести, затем разгрузить, дать «отдохнуть» и подвергнуть повторному нагружению, можно заметить, что предел пропорциональности значительно увеличивается, но при этом уменьшается пластичность.

Повышение предела пропорциональности и уменьшение пластичности материала образца при вытяжке его за предел текучести называют наклепом. Упрочнение стали при помощи наклепа используют при изготовлении проволочных канатов, грузовых цепей и т. д. Для придания медным листам упругих свойств и твердости их подвергают прокатке в холодном состоянии.

В тех случаях, когда наклеп является нежелательным явлением, его можно устранить при помощи специальной термической обработки.

Испытание на сжатие. Во избежание искривления металлические образцы, подлежащие испытанию на сжатие, выполняют в виде коротких цилиндров высотой  $h \le 3d$  или кубиков. Образцы на сжатие испытывают на специальных прессах или универсальных разрывных машинах.

Диаграмма сжатия образца из пластического материала показана на рис. 2.12, а. В начальной части диаграмма сжатия совпадает с диаграм-



Puc. 2.12

мой растяжения (линия OABCD). После точки D материал образца расплющивается, и сжимающая сила быстро возрастает. Модуль упругости первого рода, а также пределы пропорциональности, упругости и текучести у малоуглеродистой стали при растяжении и сжатии можно считать совпадающими.

Диаграмма сжатия образца из хрупкого материала показана на рис. 2.12, б. Основными характеристиками хрупкого материала при сжатии является предел прочности, обозначаемый  $\sigma_{\rm B.C.}$ , и

относительная остаточная деформация при разрушении  $\varepsilon_{omc}$ . Предел прочности при сжатии хрупких материалов оказывается значительно

выше, чем при растяжении, т. е. хрупкие материалы сопротивляются сжатию значительно лучше, чем растяжению.

На рис. 2.12, в представлен вид малоуглеродистого стального образца до сжатия и после сжатия на специальном испытательном станке, а на рис. 2.12, г изображен образец из хрупкого материала, разрушенный при сжатии.

Определение твердости. Твердостью называют способность материала сопротивляться механическому проникновению в него другого тела. Твердость определяют различными способами, и соответственно существуют различные величины, характеризующие твердость. Наиболее широкое распространение получили испытания твердости по Бринелю и по Роквеллу. Твердость по Бринелю определяют вдавливанием закаленного шарика в испытуемый материал. При испытании по Роквеллу в материал вдавливают острый алмазный наконечник. Величина, характеризующая твердость или число твердости по Бринелю (HB), представляет отношение силы F, с которой вдавливается шарик, к поверхности A' лунки, оставшейся после вдавливания на испытуемом материале:

$$HB = \frac{F_{cuna}}{A'}$$

Числом твердости можно пользоваться в производственных условиях для определения механических характеристик материала. Так, по числу твердости можно с достаточной степенью точности определить предел текучести, временное сопротивление и предел упругости. Для углеродистой термически не обработанной стали связь между числом твердости и временным сопротивлением может быть выражена следующей зависимостью:

$$\sigma_{\rm B}=(0,35\div0,4)HB.$$

Для легированной термически обработанной стали  $\sigma_{_B} = (0,35 \div 0,45) HB$ 

В справочной литературе приведены таблицы, устанавливающие зависимость между числами твердости по Бринелю и Роквеллу

Определение ударной вязкости. Ударной вязкостью называют величину, характеризующую способность материала сопротивляться действию ударных нагрузок. Меру сопротивления удару определяют на специальных испытательных копрах, на которых при помощи маятника разрушаются образцы. Ударную вязкость а определяют как отношение работы *A*'', затраченной на разрушение образца, к площади его поперечного сечения, Дж/м<sup>2</sup>:

$$a = \frac{A''}{A}.$$

Величины механических характеристик основных конструкционных материалов приведены в соответствующих справочниках.

Описанные выше испытания материалов с целью получения их механических характеристик проведены по методикам, строго регламентированным ГОСТами и ведомственными нормалями.

В заключение отметим, что механические характеристики материалов зависят от многих факторов, в числе которых можно назвать, например, химический состав и технологию получения материалов, виды термической обработки и обработки резанием, условия эксплуатации и др.

#### 2.2.3 Допускаемые напряжения и запасы прочности

Для обеспечения нормальной работоспособности детали необходимо, чтобы фактически возникающие напряжения растяжения и сжатия не превышали некоторого безопасного, или допускаемого напряжения, обозначаемого [ $\sigma$ ]. Это такое напряжение, при котором обеспечивается достаточная прочность и долговечность детали.

Известно, что определенные экспериментально механические характеристики, в равной степени, как и принимаемые для расчета нагрузки, в большинстве случаев отличаются от фактически существующих. При этом многие факторы, оказывающие влияние на действительную прочность, не поддаются непосредственному предварительному учету, так как носят случайный характер и прогнозировать их трудно. Часть факторов не может быть учтена из-за отсутствия исчерпывающих данных о физической сущности происходящих явлений. Наконец, учет некоторых факторов может привести к такому усложнению расчетной схемы, что выполнение самого расчета повлечет неоправданные затраты труда и времени.

Для того чтобы деталь обладала необходимой надежностью и работала безотказно, необходимо создать требуемый запас прочности по отношению к экспериментально определенным величинам предельных напряжений, при которых может разрушиться деталь или возникнуть пластическая деформация.

Следовательно, безопасное (или допускаемое) напряжение должно являться для данного материала и вида нагружения частью экспериментально определенного предельного напряжения.

Таким образом,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{np}}{[n]}, \qquad (2.7)$$

где [ $\sigma$ ] – допускаемое напряжение; [n] – регламентированный нормами проектирования коэффициент запаса прочности или коэффициент безопасности;  $\sigma_{np}$  – предельное напряжение материала.

В качестве исходной величины для определения предельных напряжений выбирают одну из нормативных механических характеристик материала: для пластичных материалов при статическом нагружении – предел текучести  $\sigma_T$ ; для хрупких материалов при статическом нагружении – временное сопротивление  $\sigma_B$ ; для любых материалов при циклическом изменении нагрузки – предел выносливости  $\sigma_r$ .

Величина регламентированного коэффициента запаса прочности [n] определяется на основе существующего опыта эксплуатации данной группы механизмов, машин, приборов.

Общий коэффициент запаса прочности [*n*] обычно рассматривают как произведение частных коэффициентов запаса прочности:

$$[n] = [n_1][n_2]...[n_n].$$

При выполнении проверочных расчетов должно быть выполнено условие  $n \ge [n]$ , где  $n - \phi$ актически существующий запас прочности.

Каждый из частных коэффициентов запаса отражает влияние на прочность деталей какого-либо фактора или группы взаимозависимых факторов. Учет тех или иных факторов зависит от требований, которые предъявляются к расчету, а также от назначения и условий работы рассчитываемых деталей.

Обычно при определении запаса прочности учитывают степень надежности материала, точность расчетной схемы, степень динамичности нагрузки и величину возможной перегрузки, степень ответственности детали, условия работы детали, наличие концентраторов напряжения и т. д. Количество учитываемых факторов и соответствующих им частных коэффициентов колеблется от одного до десяти.

В машиностроении иногда пользуются для определения коэффициента безопасности [*n*] произведением трех частных коэффициентов:

$$[n] = [n_1][n_2][n_3],$$

где  $[n_1]$  – коэффициент, учитывающий точность расчетной схемы (при повышенной точности расчета  $[n_1] = 1,2 \div 1,5$ ; при наличии упрощений и допущений, снижающих точность расчета  $[n_1] = 2 \div 3$ .  $[n_2]$  – коэффициент, учитывающий неоднородность материала и его чувствительность к

степени чистоты обработки поверхности (для высокопрочных сталей  $[n_2] = 2 \div 3$ ; для хрупких материалов  $[n_2] = 3 \div 4$ ; для пластичных материалов при статическом нагружении  $[n_2] = 1,2 \div 2,2$ , в зависимости от отношения  $\frac{\sigma_T}{\sigma_B}$ ; при расчетах на усталость  $[n_2] = 1,5 \div 2$ ;  $[n_3] - коэффициент, учитывающий условия работы и степень ответственности детали; обычно <math>[n_3] = 1 \div 1,5$ .

В соответствующих главах указаны величины частных коэффициентов и их перечень применительно для каждой группы деталей. Для ориентировочных или предварительных расчетов наиболее распространенных деталей, когда не требуется особой точности, пользуются табличным методом определения допускаемых напряжений. Величины, приведенные в таких таблицах, являются результатом укрупненных вычислений по формуле (2.7) или установлены на основе существующего опыта эксплуатации. Выбор допускаемого напряжения является весьма ответственным этапом расчета, так как определяет эксплуатационные и экономические характеристики механизма или машины.

#### 2.2.4 Напряженное состояние при растяжении и сжатии

Для того чтобы иметь полное представление о прочности материала, необходимо знать действующие напряжения не только в плоскости поперечного сечения, но и по любому наклонному сечению.

Рассмотрим стержень, который находится под действием растягивающей силы F (рис. 2.13). Как указывалось выше, в поперечных сечениях стержня, достаточно удаленных от точек приложения сосредоточенных сил, нормальные напряжения распределяются равномерно и определяются по формуле



$$\sigma = \frac{N}{A_0} = \frac{F}{A_0}$$

*Puc. 2.13* 

В окрестности какой-либо точки А, лежащей в плоскости поперечного сечения *mnn'm'* (рис. 2.13), выделим бесконечно малый элемент (рис. 2.14, а). Поскольку по его граням, перпендикулярным направлению растягивающего усилия, действуют нормальные напряжения  $\sigma$ , а остальные грани от напряжений свободны, то данный элемент находится в линейном напряженном состоянии (главное напряжение  $\sigma_1 = \sigma$ , а  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ). Условимся такой элемент изображать в виде плоской фигуры (рис. 2.14, б), хотя в действительности он имеет форму прямоугольного параллелепипеда.



Определим напряжения, возникающие в наклонном сечении  $m_1n_1n_1'm_1'$  (рис. 2.14, а), перпендикулярном к плоскости чертежа. Положение наклонной площадки определяется углом между направлением главного напряжения  $\sigma_1$ и внешней нормалью  $n_{\alpha}$  к площадке (рис. 2.14, б). Этот угол принимают положительным, если его отсчитывают против часовой стрелки от направления  $\sigma_1$ . Наклонную площадку обозначают углом, определяющим ее положение. Так, для принятого на рис. 2.14, б обозначения угла имеем  $\alpha$ -площадку.

По наклонной площадке вследствие однородности напряженного состояния для всех ее точек равномерно распределяются полные напряжения  $p_a$ , параллельные  $\sigma_1$ . Составляющие полного напряжения, направленные по нормали к площадке и по касательной к ней, обозначим соответственно  $\sigma_a$  и  $\tau_a$ . Для определения напряжений  $\sigma_a$  и  $\tau_a$  применяем метод сечений. Так как наклонная площадка рассекла элемент на две части, отбросим одну из них (например, верхнюю) и рассмотрим равновесие оставшейся (нижней) части (рис. 2.14, б).

По направлению  $\sigma_{\alpha}$  действует, очевидно, нормальная сила  $dN_{\alpha} = \sigma_{\alpha} dA_{\alpha}$ , по направлению  $\tau_{\alpha}$  – касательное усилие  $dQ_{\alpha} = \tau_{\alpha} dA_{\alpha}$  и по направлению  $\sigma_{I}$  – нормальная сила  $dN = \sigma_{1} dA_{0}$ .

Проектируя указанные силы на направления  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$ , соответственно получим

$$\sigma_{\alpha} dA_{\alpha} - \sigma_{1} dA_{0} \cos \alpha = 0;$$
  
$$\tau_{\alpha} dA_{\alpha} - \sigma_{1} dA_{0} \sin \alpha = 0,$$

где *dF<sub>a</sub>* – площадь наклонного сечения.

Учитывая, что  $dA_0 = dA_1 \cos \alpha$ , из уравнений равновесия имеем

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha; \qquad (2.12)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha. \tag{2.13}$$

Воспользуемся формулами (2.12) и (2.13) для определения напряжений на β-площадке, перпендикулярной к α-площадке (рис. 2.14, г).

Нормаль  $n_{\beta}$  образует с направлением  $\sigma_1$  угол

$$\beta = -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

Заменив в формулах (2.12) и (2.13) угол  $\alpha$  на  $\beta$ , получим

$$\sigma_{\beta} = \sigma_{1} \cos^{2} \beta = \sigma_{1} \cos^{2} \left[ -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right];$$
  
$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_{1}}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma_{1}}{2} \sin 2 \left[ -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right];$$

ИЛИ

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \sin^2 \alpha; \qquad (2.14)$$

$$\tau_{\beta} = -\frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha \,. \tag{2.15}$$

Для напряжений  $\sigma$  и  $\tau$ , действующих по наклонным площадкам, принимаем следующее правило знаков: нормальное напряжение положительно, если оно растягивающее; касательное напряжение положительно, если для совпадения с его направлением внешнюю нормаль к площадке необходимо повернуть по часовой стрелке.

Отметим некоторые свойства линейного напряженного состояния, вытекающие из зависимостей (2.12) – (2.15).

1. Сумма нормальных напряжений, действующих по двум взаимно перпендикулярным площадкам, постоянна и равна главному напряжению, т.е.  $\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta} = \sigma_1$ .

2. На двух взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения равны, но противоположны по знаку, т. е.  $\tau_{\alpha} = -\tau_{\beta}$ . Данное свойство является общим для любого напряженного состояния и носит название закона парности касательных напряжений.

3. Величина нормального напряжения в любом наклонном сечении  $(\alpha \neq 0^{\circ})$  меньше  $\sigma$ , и достигнет максимума лишь в поперечных сечениях
$(\alpha = 0^{\circ})$ . Касательное напряжение наибольшее значение имеет в сечении, составляющем угол 45° с направлением  $\sigma_1$ .

В этом случае  $\tau_{\text{max}} = \frac{\sigma_1}{2}$ .

Оценивая напряженное состояние стержня при его осевом растяжении или сжатии, можно сделать заключение о том, что стержень разрушается либо по поперечному сечению в результате действия максимальных нормальных напряжений, либо по наклонной (под углом 45°) плоскости от действия наибольшего касательного напряжения.

# 2.2.5 Напряжения в наклонных площадках при плоском и объемном напряженных состояниях. Обобщенный закон Гука

Рассмотрим элемент (рис. 2.15, а), по граням которого действуют растягивающие напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ 

Проведем сечение  $m_1$ - $n_1$  (перпендикулярно плоскости чертежа), определяющее положение  $\alpha$ -площадки. Напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  вызывают появление на этой площадке напряжений  $\sigma_{\alpha}$  и  $\tau_{\alpha}$ .

Используя принцип независимости действия сил, можно записать

$$\sigma_{\alpha} = \sigma'_{\alpha} + \sigma''_{\alpha}; \qquad (2.16)$$

$$\tau_{\alpha} = \tau'_{\alpha} + \tau''_{\alpha}, \qquad (2.17)$$

где  $\sigma'_{\alpha}$  и  $\tau'_{\alpha}$  – напряжения, вызванные действием  $\sigma_1$ ,  $\sigma''_{\alpha}$  и  $\tau''_{\alpha}$  – напряжения, вызванные действием  $\sigma_2$ .

Для определения  $\sigma'_a$  и  $\tau'_a$ воспользуемся формулами (2.12) и (2.13), т. е.

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha;$$
  
$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1}{2} \sin 2\alpha.$$

Чтобы получить выражение для  $\sigma''_{a}$  и  $\tau''_{a}$ , в указанные формулы вместо  $\sigma_{1}$  необходимо подставить напряжение  $\sigma_{2}$ , а вместо  $\alpha$  – со знаком минус угол  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ ,



Puc. 2.15

который образует нормаль  $n_{\alpha}$  с направлением  $\sigma_2$ . Тогда

$$\sigma''_{\alpha} = \sigma_2 \cos^2 \left[ -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right] = \sigma_2 \sin^2 \alpha;$$
  
$$\tau''_{\alpha} = \frac{\sigma_2}{2} \sin^2 \left[ -\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \right] = -\frac{\sigma_2}{2} \sin^2 \alpha.$$

С учетом полученных зависимостей равенства (2.16) и (2.17) принимают следующий вид:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \qquad (2.18)$$

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \tag{2.19}$$

Из формулы (2.19) видно, что максимальные касательные напряжения равны полуразности главных напряжений:

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$

и действуют в площадках, наклоненных под углом 45° к главным площадкам. Экстремальными значениями для нормальных напряжений  $\sigma_{\alpha}$ согласно зависимости (2.18) будут величины главных напряжений, причем

$$\sigma_{\alpha \max} = \sigma_1$$
 И  $\sigma_{\alpha \min} = \sigma_2$ 

Используя формулы (2.18) и (2.19), определим напряжения  $\sigma_{\beta}$  и  $\tau_{\beta}$ , действующие по  $\beta$ -площадке, перпендикулярной к  $\alpha$ -площадке (рис. 2.15, б). По аналогии с изложенным в предыдущем параграфе, окончательно получим

$$\sigma_{\beta} = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \qquad (2.20)$$

$$\tau_{\beta} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \tag{2.21}$$

Обратим внимание на следующие два частных случая плоского напряженного состояния.

1. Если  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$  (рис. 2.16, а), то на всех площадках, проходящих через рассматриваемую точку, нормальное напряжение равно  $\sigma$ , а касательное напряжение отсутствует. Такое напряженное состояние называют равномерным двухосным растяжением (или сжатием).

Puc. 2.16

2. Если  $\sigma_1 = \sigma, \sigma_2 = 0^{"}, a$ 

 $\sigma_3 = -\sigma$  (рис. 2.16, б), то при  $\alpha = 45^{\circ}$  нормальное напряжение в наклонной площадке оказывается равным нулю, а  $\tau_{\alpha} = \sigma$ . Такое напряженное состояние называют чистым сдвигом.

Совокупность формул (2.18) - (2.21) дает возможность решать прямую задачу плоского напряженного состояния, т. е. по известным главным напряжениям находить нормальные и касательные напряжения в наклонных площадках. При этом следует иметь в виду, что угол  $\alpha$  всегда отсчитывают от направления алгебраически большего главного напряжения (отличного от нуля), а значения главных напряжений подставляют в эти формулы со своими знаками. Последнее замечание указывает на возможность изменения индексов у главных напряжений в расчетных формулах, поэтому необходимо четко помнить правило их обозначения.

На практике чаще приходится иметь дело с обратной задачей, в которой известными величинами являются  $\sigma_{\alpha}, \sigma_{\beta}, \tau_{\beta}, \tau_{\beta}$ , а определить необходимо значения главных напряжений и положение главных площадок.

Расчетные формулы для обратной задачи находят из выражений (2.18) - (2.21), если в них предварительно заменить  $\alpha$  на  $(-\alpha_0)$ . Здесь  $\alpha_0 -$ угол, на который необходимо повернуть нормаль па, чтобы получить направление  $\sigma_1$ .

Опуская промежуточные выкладки, приведем расчетные формулы в окончательном виде:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_{\alpha} + \sigma_{\beta}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{\alpha} - \sigma_{\beta}) + 4\tau_{\alpha}^{2}}; \qquad (2.22)$$

$$tg \, 2\alpha_0 = \frac{2\tau_\alpha}{\sigma_\beta - \sigma_\alpha} \tag{2.23}$$

Из выражения (2.23) определяют два значения угла  $\alpha_0$ , отличающиеся друг от друга на 90°: одно значение угла соответствует площадке, по которой действует максимальное главное напряжение, а другое – площадке с минимальным главным напряжением.

В случае объемного напряженного состояния напряжения по наклонным площадкам, не параллельным ни одному из главных напряжений, определяются по следующим формулам:

$$\sigma_{\alpha} = \sigma_1 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3 \cos^2 \alpha_3$$
$$\tau_{\alpha} = \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2 \alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2 \alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2 \alpha_3 - \sigma_\alpha^2},$$

где  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  – углы, которые образует нормаль к рассматриваемой площадке соответственно с направлениями  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ . Максимальное касательное напряжение действует по площадке, параллельной главному напряжению  $\sigma_2$  и составляющей угол 45° с направлениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$ . Величина этого напряжения равна полуразности наибольшего и наименьшего из главных напряжений

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{2.24}$$

Установим зависимость между относительными деформациями и напряжениями в случае объемного напряженного состояния.

Рассмотрим деформацию элемента, имеющего размеры ребер  $a \times b \times c$ , по граням которого действуют главные напряжения  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  (рис. 2.17, а). Для простоты полагаем, что  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 > 0, \sigma_3 > 0$ . В результате деформации длина ребер элемента изменится и станет равной  $a + \Delta a; b + \Delta b; c + \Delta c$  (рис. 2.17, б). Относительные удлинения в главных направлениях (т.е. в направлении действия главных напряжений) называют главными удлинениями и соответственно

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}$$

Воспользовавшись принципом независимости действия сил, для главного удлинения εχ можно записать следующее равенство:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_1,$$

где  $\varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1, \varepsilon_1$  – относительные удлинения в направлении  $\sigma_1$ , вызванные действием соответственно только напряжений  $\sigma_1$  (при  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ),  $\sigma_2$  (при  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ ) и  $\sigma_3$  (при  $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$ ).

В указанном направлении напряжение  $\sigma_1$  вызывает продольную деформацию, а напряжения  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  – поперечную деформацию Поэтому, используя зависимости (2.1) и (2.3), находим, что



$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E}; \varepsilon_1^{"} = -\mu \frac{\sigma_2}{E}; \varepsilon_1^{""} = -\mu \frac{\sigma_3}{E}$$

*Puc. 2.17* 

Суммируя относительные удлинения, получим

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu \frac{\sigma_2}{E} - \mu \frac{\sigma_3}{E}$$

Определяя аналогично главные удлинения  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ , окончательно имеем

$$\varepsilon_{1} = \frac{1}{E} [\sigma_{1} - \mu(\sigma_{2} - \sigma_{3})];$$

$$\varepsilon_{2} = \frac{1}{E} [\sigma_{2} - \mu(\sigma_{1} - \sigma_{3})];$$

$$\varepsilon_{3} = \frac{1}{E} [\sigma_{3} - \mu(\sigma_{1} - \sigma_{2})];$$
(2.25)

Система равенств (2.25) является математическим выражением обобщенного закона Гука. Полагая в равенствах (2.25) равным нулю одно из главных напряжений, получим закон Гука для плоского напряженного состояния.

Установим связь между главными напряжениями и относительным изменением объема є рассматриваемого элемента. До деформации объема элемента был равен  $V_0 = abc$ , В деформированном состоянии его объем

$$V = (a + \Delta a)(b + \Delta b)(c + \Delta c) = abc \left(1 + \frac{\Delta a}{a}\right) \left(1 + \frac{\Delta b}{b}\right) \left(1 + \frac{\Delta c}{c}\right) = V_0 (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3).$$

Раскрывая скобки и пренебрегая величинами второго и третьего порядка малости, получим

$$V = V_0 (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3).$$

Относительное изменение объема

$$\varepsilon_{V} = \frac{V - V_{0}}{V_{0}} = \varepsilon_{1} + \varepsilon_{2} + \varepsilon_{3}$$

Используя зависимости (2.25), окончательно имеем

$$\varepsilon_{V} = \frac{1 - 2\mu}{E} (\sigma_{1} + \sigma_{2} + \sigma_{3}) \qquad (2.26)$$

Из формулы (2.26) следует, что для изотропных материалов коэффициент Пуассона  $\mu$  не может быть больше 0,5. Действительно, например, при растяжении по трем направлениям объем элемента должен увеличиться, т. е. обязательно  $\varepsilon_v > 0$ . Последнее возможно лишь при условии (1-2  $\mu$ ) > 0, так как  $\sigma_1 \ge \sigma_2 \ge \sigma_3 > 0$ .

$$u = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2 \varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3 \varepsilon_3}{2}$$

или, используя зависимости (2.25), получим

$$u = \frac{1}{2E} \Big[ \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu \big( \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \big) \Big].$$
(2.27)

Как уже отмечалось, вследствие упругой деформации в теле накапливается потенциальная энергия деформации. Удельная потенциальная энергия в случае осевого растяжения или сжатия определяется по формуле (2.6). Для объемного напряженного состояния эта энергия, где *u* – полная удельная потенциальная энергия деформации. Возможны два варианта деформации рассматриваемого элемента. Если все действующие напряжения одинаковы по величине и по знаку (например,  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$ ), то все ребра элемента получат одинаковое изменение длины. Вследствие такой деформации объем элемента изменяется, а его форма остается в первоначальном виде (например, сохраняется форма прямоугольного параллелепипеда). Если же главные напряжения неодинаковы по величине, то вместе с изменением объема элемента произойдет также изменение его формы. Поэтому можно считать, что в общем случае полная удельная потенциальная энергия деформации состоит из двух частей: энергии<sup>*u*</sup>, накапливаемой за счет изменения объема, и энергии  $u_{\phi}$ , накапливаемой вследствие изменения формы:

$$u = u_v + u_d$$

Величина энергии формоизменения

$$u_{\phi} = \frac{1+\mu}{E} \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] \quad (2.28)$$

На основании формул (2.27) и (2.28) несложно определить также потенциальную энергию изменения объема.

## 2.3 Изгиб прямолинейного бруса

## 2.3.1 Общие понятия. Типы опор и определение опорных реакций.

Значительное количество деталей механизмов или элементы этих деталей в процессе работы подвергаются воздействию нагрузки, перпендикулярной к продольной оси, или внешних пар, действующих в плоскости, проходящей через указанную ось (рис. 2.18, а, б).



Рис. 2.18

При этом в поперечных сечениях деталей или их элементов возникают изгибающие моменты, т. е. внутренние моменты, действующие в плоскости, перпендикулярной к плоскости поперечного сечения. Такой вид нагружения называют изгибом. Стержни, работающие в основном на изгиб, принято называть балками.

Если изгибающий момент в сечении является единственным силовым фактором, – изгиб называют чистым. При этом в сечении отсутствуют поперечные силы. При наличии в поперечном сечении, наряду с моментом, поперечных сил изгиб называют поперечным.

Если плоскость действия изгибающего момента, именуемая силовой плоскостью, проходит через одну из главных центральных осей поперечного сечения балки, изгиб называют простым или плоским. При этом ось балки после деформации остается в силовой плоскости.

Деформацию изгиба легко проследить на модели, представляющей собой прямолинейный призматический брус, длина которого значительно превышает его поперечные размеры. На боковые грани бруса нанесены равноотстоящие горизонтальные и вертикальные линии (рис. 2.19, а). В плоскости симметрии *abcd* к концам бруса приложены два равных противоположно направленных момента М, под действием которых брус изгибается, как показано на рис. 2.19, б.

Рассмотрение изогнутого бруса позволяет установить следующие основные признаки чистого изгиба.

1. Плоские поперечные сечения бруса остаются плоскими и поворачиваются на некоторый угол одно относительно другого.

2. Плоские продольные сечения искривляются, о чем можно судить по тому, что продольные горизонтальные прямые, нанесенные на



*Puc. 2.19* 

боковые грани, становятся кривыми линиями.

3. Волокна на вогнутой стороне бруса укорачиваются, что свидетельствует об их сжатии, а на выпуклой стороне – удлиняются, растягиваются. Как показывает опыт, одна из горизонталей на боковой грани бруса своей длины не изменяет (линия ОО на рис. 2.19, б). Это позволяет сделать вывод о существовании у бруса слоя, которые не испытывает ни растяжения, ни сжатия. Такой слой называют нейтральным слоем. След ab' нейтрального слоя на плоскости поперечного сечения называют нейтральной осью (рис. 2.19, в). След *a'b'* силовой плоскости на поперечном сечении балки называют силовой линией.

Рассматривая торцовые плоскости изогнутого бруса, легко заметить, что поперечное волокно k'l' (рис. 2.19, в), расположенное на сжатом продольном слое, оказывается растянутым, а волокно m'n', расположенное на растянутом продольном слое, – сжатым. Нейтральная ось *ef* своей длине не изменяет. Таким образом, здесь наблюдаются те же явления, что и при простом растяжении и сжатии, когда знак поперечной деформации противоположен знаку продольной деформации, т. е. продольное растяжение сопровождается поперечным сжатием и продольное сжатие приводит к поперечному растяжению.

Из рис. 2.19 следует, что величина деформации волокон как в продольном, так и в поперечном направлении тем больше, чем дальше они расположены от нейтрального слоя или нейтральной оси.

Балки, подверженные изгибу, имеют опорные устройства весьма разнообразного конструктивного исполнения, однако при расчетах различают следующие три основных типа.



Шарнирно-подвижная опора (рис. 2.20, а), которая допускает поворот сечения балки над опорой и поступательное перемещение вдоль опорной поверхности. Схематическое изображение такой опоры показано на рис. 2.20, б, опорная реакция в этом случае направлена перпендикулярно плоскости опирания катков.

Шарнирно-неподвижная опора (рис. 2.21, а), допускающая только



поворот сечения балки в силовой плоскости. Схематическое изображение опоры показано на рис. 2.21, б; реакция такой

Puc. 2.22

опоры рзлагается на две взаимно ортогональные составляющие.

Жесткая заделка (защемление) (рис. 2.22, а), исключающая как поворот, так и перемещение по двум направлениям; схематически защемление показано на рис. 2.22, б; реакции имеют три составляющие – вертикальную, горизонтальную и реактивный момент.

Для того чтобы балка могла воспринимать нагрузку в одной плоскости и оставалась бы при этом в целом неподвижной по отношению к основанию, наименьшее число связей, налагаемых опорами, должно быть равно трем.

Таким образом, возможны следующие варианты крепления балки: 1) защемление балки одним концом; 2) крепление одного конца балки при помощи шарнирно-неподвижной опоры, а другого конца – при помощи шарнирноподвижной опоры. Сочетание таких опор исключает также возможность возникновения продольных усилий при деформации, вызванной изменением температуры.

Балки, имеющие две опоры, называют однопролетными, двух-опорными или простыми (рис. 2.23, а). Балку, защемленную одним концом и не имеющую других опор, называют консолью или



консольной балкой (рис. 2.23, б). Консолями называют также свешивающиеся за опоры части балки (например, части BD и AC на рис. 2.23, в). Опорные реакции определяют при помощи уравнений статики.

#### 2.3.2 Поперечная сила и изгибающий момент

При изгибе балки, вызванном действием приложенных к ней внешних моментов, в поперечных сечениях возникают внутренние силовые факторы – изгибающие моменты  $M_{H}$ . Аналогичное явление имеет место в случае простого поперечного изгиба, если горизонтальный брус, лежащий на двух опорах, подвергнуть действию вертикальных нагрузок в продольной плоскости симметрии бруса. При этом наряду с изгибающим моментом в поперечных сечениях возникнет поперечная сила Q.

Рассмотрим методику определения изгибающего момента  $M_{II}$  и поперечной силы. Пусть балка, лежащая на опорах A и B (рис. 2.24), нагружена вертикальными силами  $F_1$ ,  $F_2$ , распределенной нагрузкой интенсивности q и моментами  $M_1$ ,  $M_2$ , действующими в вертикальной плоскости симметрии балки. Опорные реакции *R*<sub>A</sub>, *R*<sub>B</sub> в точках А и В можно определить из уравнений равновесия всей балки.



Рис. 2.24

Рассмотрим поперечное сечение *mn* балки, определяемое абсциссой *x*. Указанное сечение делит внешние силы и моменты, приложенные к балке, на две взаимно уравновешивающиеся системы, из которых одна действует слева, а другая – справа от данного сечения.

Каждую из этих систем можно привести к центру тяжести C рассматриваемого сечения. Тогда главный вектор и главный момент относительно центра C сил, действующих слева от сечения, должны быть соответственно равны по модулю и противоположны по направлению главному вектору и главному моменту относительно того же центра сил, действующих справа от этого сечения. Указанные главный вектор  $\overline{Q}$  и главный момент  $M_{ii}$  являются статическими эквивалентами внутренних сил, возникающих при изгибе в поперечном сечении.

Главный вектор внешних сил, действующих на балку по одну сторону от данного сечения, называется поперечной силой в данном сечении. Если некоторые силы, действующие на балку, не перпендикулярны к ее оси, то поперечной силой называется вертикальная составляющая главного вектора внешних сил, расположенных по одну сторону от данного сечения.

Ограничиваясь случаем параллельных сил, можем поперечную силу (обозначим ее через Q) рассматривать как алгебраическую величину, имеющую положительное значение, если для левой части балки она направлена вверх, а для правой – вниз (рис 2.25, а), и отрицательное при противоположном направлении (рис. 2.25, б).

Таким образом, поперечная сила Q в любом поперечном сечении



балки численно определяется как алгебраическая сумма сил, расположенных по одну сторону от сечения.

Для сечения *mn* (см. рис. 2.24) в соответствии с установленным правилом знаков имеем

$$Q = R_A - F_1 + F_2 - qx \tag{2.29}$$

ИЛИ

$$Q = F_3 - R_B + q(a_e - x).$$

Главный момент внешних сил, действующих на балку по одну сторону от данного сечения, относительно центра тяжести этого сечения, называют изгибающим моментом в данном сечении. Этот момент (обозначим его через  $M_{H}$ ) будем рассматривать как алгебраическую величину, имеющую положительное значение, если он действует так, что ось балки изгибается выпуклостью вниз (рис. 2.25, в), и отрицательное в противоположном случае (рис. 2.25, г). Изгибающий момент  $M_{H}$  в любом сечении балки численно определяется как алгебраическая сумма моментов, действующих на балку внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения, относительно центра тяжести этого сечения. При этом для левой части балки моменты сил считаются положительными, если они направлены по отношению к центру тяжести сечения по часовой стрелке, и отрицательными, если против часовой стрелки; для правой части – наоборот.

Таким образом, для сечения mn (см. рис. 2.24) имеем

$$M_{II} = R_A x - F_1 (x - a_1) + F_2 (x - a_2) + M_1 - qx \frac{x}{2}$$
(2.30)

ИЛИ

$$M_{H} = R_{B}(l-x) - F_{3}(l-x-a_{3}) - M_{2} - q\frac{(a_{e}-x)^{2}}{2}$$

Поперечная сила Q и изгибающий момент  $M_H$  в общем случае зависят от положения сечения, т.е. от абсциссы x. Найдем зависимость между величинами Q и  $M_H$ , а также Q и q. Для этого определим поперечную силу Q' и изгибающий момент  $M_H$  в сечении m'n', смещенном относительно сечения mn на бесконечно малое расстояние dx (см. рис. 2.24);

$$Q' = R_A - F_1 - F_2 + q(x + dx),$$
 (2.31)

$$M'_{H} = R_{A}(x+dx) - F_{1}(x+dx-a_{1}) + F_{2}(x+dx-a_{2}) + M_{1} - q\frac{(x+dx)^{2}}{2}.$$
 (2.32)

Определим изменения dM изгибающего момента и dQ – поперечной силы при переходе от сечения mn к сечению m'n'. Вычитая соответственно (2.30) из (2.32) и (2.29) из (2.31), имеем

$$dM = (R_A - F_1 + F_2 - qx)dx; \quad dQ = qdx,$$

откуда, учитывая выражение (2.29), получаем

$$dM = Qdx; \quad Q = \frac{dM}{dx}, \tag{2.33}$$

т.е. поперечная сила в данном сечении равна первой производной от изгибающего момента по абсциссе сечения (теорема Д. И. Журавского).

Аналогично получим

$$q = \frac{dQ}{dx} = \frac{d^2M}{dx^2}$$
(2.34)

т. е. вторая производная от изгибающего момента по абсциссе сечения равна интенсивности распределенной нагрузки.

Полученные зависимости используют при построении эпюр изгибающих моментов и поперечных сил. Графики зависимости изгибающего момента  $M_{II}$  и поперечной силы Q от координаты xсечения называют эпюрами изгибающих моментов и поперечных сил. Эпюры дают наглядное представление о характере изменения изгибающего



*Puc. 2.26* 

момента и поперечной силы по длине балки и позволяют устанавливать местонахождение опасных сечений.

Рассмотрим методику построения этих эпюр для простейших случаев нагружения.

Случай 1. Консольная балка нагружена сосредоточенной силой *F* на конце консоли (рис. 2.26, а).

В месте защемления A балки возникает реактивный момент  $M_R$  и опорная реакция  $R_A$ .

Составим уравнения равновесия сил, действующих на балку:

$$\Sigma M_A = -M_R + Fl = 0; \quad \Sigma Y = R_A - F = 0.$$

Отсюда

$$M_R = Fl; \quad R_A = F.$$

Определим изгибающий момент в сечении, расположенном на расстояниихот опоры А. Силы, действующие слева от рассматриваемого сечения, создают момент

$$M_x = -M_R + R_A x \, .$$

После подстановки значений реактивного момента и опорной реакции приходим к следующему уравнению:

$$M_x = -Fl + Fx = -F(l-x).$$

При x = 0 и x = l получаем изгибающий момент соответственно у опоры A и на конце балки:

$$M_A = M_{x=0} = -Fl; \quad M_P = M_{x=l} = 0.$$

Построим эпюру изгибающих моментов. Для этого выбираем нулевую линию, параллельную оси балки.

Откладывая в некотором масштабе  $\mu M$  от этой линии вниз ( $M_x < 0$ ) под соответствующими сечениями балки найденные значения  $M_x$ , получаем искомую эпюру (рис. 2.26, б). Так как зависимость  $M_x$  от координаты сечения в данном случае является линейной, то эпюра изгибающих моментов представляет собой наклонную прямую. Абсолютная величина изгибающего момента достигает наибольшего значения у закрепленного конца балки.



Рассмотренную задачу можно решить проще, если за начало отсчета координаты сечения принять точку приложения силы *P* и определять главный момент сил, находящихся справа от сечения. Обозначая новую координату сечения через  $x_1$ , имеем  $M_{x_1} = -Px_1$ ; на концах балки получаем

$$M_A = M_{x_1=l} = -Pl; \quad M_P = M_{x=0} = 0.$$

Для определения поперечных сил обратимся к теореме Журавского:

$$Q = \frac{dM_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left[ -P(l-x) \right] = P,$$

Рис. 2.27 ax axт. е. поперечная сила постоянна по всей длине балки. Эпюра поперечных сил в данном случае представляет собой прямую, параллельную нулевой линии и отстоящую от нее на расстоянии P(рис. 2.26, в) в масштабе  $\mu Q$ .

Случай 2. Консольная балка нагружена по всей длине равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q (рис. 2.27, а).

Реактивный момент в этом случае  $M_R = \frac{ql^2}{2}$ , опорная реакция  $R_A = ql$ . Заменив равномерно распределенную нагрузку, действующую на правую часть балки, сосредоточенной силой, равной qx и действующей на расстоянии  $\frac{x}{2}$  от выбранного сечения, имеем

$$Mx = -qx\frac{x}{2} = -q\frac{x^2}{2}.$$
 (2.35).

Определим значение изгибающих моментов для характерных то-чек:

$$x = 0; \quad M_0 = 0;$$
  

$$x = \frac{l}{2}; \quad M_{x=\frac{l}{2}} = -q \frac{l^2}{4 \cdot 2} = -q \frac{l^2}{8};$$
  

$$x = l; \quad M_A = -q \frac{l^2}{2}.$$

Как видно из уравнения (2.35), эпюра изгибающих моментов в данном случае представляет собой параболу второй степени, обращенную вогнутостью вниз и с вершиной в начале координат (рис. 2.27, б). Эта парабола может быть построена по точкам.

Абсолютная величина изгибающего момента имеет наибольшее значение  $\frac{ql^2}{2}$  у защемленного конца балки. На основании теоремы Журавского



Puc. 2.28

$$Q_x = \frac{dM_x}{dx} = \frac{d}{dx} \left( -\frac{qx^2}{2} \right) = qx$$
$$Q_0 = 0; \quad Q_A = dl.$$

(2.36)

Из уравнения (2.36) следует, что эпюра поперечных сил наклонная прямая (рис. 2.27, в).

Случай 3. Балка на двух опорах нагружена сосредоточенной силой *F* (рис. 2.28, а).

Составим уравнения равновесия балки:

$$\Sigma M_A = R_B l - Fa = 0; \Sigma Y = R_A - P + R_B = 0.$$

Отсюда

$$F_A = F \frac{b}{l}; \quad R_B = F \frac{a}{l}.$$

Рассмотрим два сечения, определяемых координатами  $x_1$  и  $x_2$ . Первое сечение расположено между опорой А и точкой приложения силы *F*, второе – между опорой В и точкой приложения силы *F*.

Изгибающий момент в сечении *I-I*, если рассматривать левую часть балки,

$$M_{x_1} = R_A x_1 = \frac{Fb}{l} x_1.$$

Изгибающий момент в сечении ІІ-ІІ

$$M_{x2} = R_A x_2 - F(x_2 - a)$$

т. е. изгибающий момент на двух участках балки определяется двумя линейными уравнениями, и, следовательно, эпюра изгибающих моментов состоит из двух отрезков прямой (рис. 2.28, б). Величина изгибающих моментов в характерных точках

$$x_{1} = 0; \quad M_{A} = M_{x=0} = 0;$$
  

$$x_{1} = a; \quad M_{P} = M_{x_{1}=a} = F \frac{ab}{l} = M_{max}$$
  

$$x_{2} = l; \quad M_{B} = M_{x_{2}=0} = 0.$$

Если сила *F* приложена в середине пролета, т. е.  $a = b = \frac{1}{2}$ , то

$$R_A = R_B = \frac{F}{2}$$

Максимальный изгибающий момент в этом случае

$$M_{\rm max} = \frac{Fl}{4}$$

Так как изгибающий момент выражается двумя линейными функциями координаты сечения, то из теоремы Журавского следует, что на каждом из двух участков между опорами и точкой приложения сосредоточенной нагрузки *P* поперечная сила остается постоянной.

Действительно, для участка АС

$$Q_{x_1} = R_A = \frac{Fb}{l} = const,$$

для участка СВ

$$Q_{x_2} = R_B = \frac{Fa}{l} = const.$$

Таким образом, эпюра поперечных сил представляет собой два прямолинейных отрезка, параллельных нулевой линии (рис. 2.28, в). В точке приложения нагрузки *F* поперечная сила меняется скачкообразно.

Случай 4. Балка на двух опорах нагружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью *q* (рис. 2.29, а).

Равнодействующая равномерно распределенной нагрузки равна ql и приложена в середине пролета балки. Поэтому

$$R_{A}=R_{B}=\frac{ql}{2}$$

Изгибающий момент в сечении І-І на расстоянии х от левой опоры

$$M_{x} = \frac{ql}{2} - qx\frac{x}{2} = \frac{qx}{2}(l-x).$$

Изгибающий момент в характерных точках

$$M_{A} = M_{x=0} = 0; \quad M_{B} = M_{x=1} = 0$$
  
 $M_{\max} = M_{x=\frac{l}{2}} = \frac{ql^{2}}{8}.$ 

Эпюра изгибающих моментов представляет собой параболу второй степени (рис. 2.29, б).

Величину поперечной силы в сечении *I-I* определяем как сумму внешних сил, действующих слева от сечения:

$$Q_x = \frac{ql}{2} - qx,$$

т. е. поперечная сила изменяется по линейному закону. Определим ее величину в характерных точках:

$$Q_A = Q_{x=0} = \frac{ql}{2}, \quad Q_B = Q_{x=1} = -\frac{ql}{2}; \quad Q_{x=\frac{l}{2}} = 0.$$



*Puc.* 2.29

Эпюра поперечных сил представляет собой наклонную прямую, пересекающую нулевую линию в середине пролета балки (рис. 2.29, в).

#### 2.3.3 Геометрические характеристики плоских сечений

Как было показано выше, при деформации растяжения и сжатия площадь поперечного сечения полностью характеризовала прочность и жесткость детали. Однако при деформации изгиба и кручения прочность и жесткость характеризуются не только размерами сечения, но и его формой. К числу геометрических характеристик сечения, учитывающих оба указанных фактора, относятся статические моменты, моменты инерции, моменты сопротивления.



Статические моменты площадей. Координаты *z<sub>c</sub>* и *y<sub>c</sub>* центра тяжести плоской фигуры (рис. 2.30) определяются, как известно из общей механики, формулами

$$z_c = \frac{1}{A} \int_A z dA; \quad y_c = \frac{1}{A} \int_A y dA; \quad (2.37)$$

где *А* – площадь всей фигуры; *dA* – элемент площади.

Интегралы вида  $\int_{A} z dA$  и  $\int_{A} y dA$  назы

*Puc. 2.30* 

вают статическими моментами фигуры относительно осей у и z и обозначают соответственно через  $S_y$  и  $S_z$ 

Таким образом, на основании (2.37) имеем

$$S_{z} = Ay_{c} = \int_{A}^{C} y dA; \quad S_{y} = Az_{c} = \int_{A}^{C} z_{c} dA;$$
 (2.38)

Из формул (2.37) и (2.38) следует, что статический момент площади фигуры относительно какой-либо оси равен сумме статических моментов частей, из которых состоит фигура, относительно той же оси.

Оси, проходящие через центр тяжести фигуры, называют центральными осями. Статические моменты площадей относительно центральных осей равны нулю, так как  $z_c = 0$  или  $y_c = 0$ .

Моменты инерции плоских сечений. Различают осевые, полярные и центробежные моменты инерции.

Осевым моментом инерции сечения называют взятую по всей площади сечения сумму произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до соответствующей оси. Обозначая.моменты инерции относительно осей z и y соответственно через  $J_z$  и  $J_y$  (рис. 2.30), имеем

$$J_{z} = \int_{A} y^{2} dA; \quad J_{y} = \int_{A} z^{2} dA;$$
 (2.39)

Полярным моментом инерции (моментом инерции относительно полюса) называют взятую по всей площади сечения сумму произведений элементарных площадок на квадраты их расстояний до данного полюса:

$$J_{\rho} = \int_{A} \rho^2 dA; \qquad (2.40)$$

Центробежным моментом инерции сечения называют взятую по всей площади сечения сумму произведений элементарных площадок на обе координаты в данной прямоугольной системе осей. Обозначая центробежный момент инерции через  $J_{zy}$ , имеем

$$J_{zy} = \int_{A} zy dA; \qquad (2.41)$$

Моменты инерции измеряют в единицах длины в четвертой степени, чаще всего в см<sup>4</sup>.

Из приведенных определений следует, что момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее частей.

Рассмотрим некоторые свойства моментов инерции.

1. Момент инерции относительно полюса, являющегося началом прямоугольной системы координат, равен сумме моментов инерции относительно осей данной системы.

Из рис. 2.30 следует:

$$J_{\rho} = \int_{A} \rho^{2} dA = \int_{A} (z^{2} + y^{2}) dA = \int_{A} z^{2} dA + \int_{A} y^{2} dA = J_{y} + J_{z}$$
(2.42)

Если  $J_z = J_v$ , то

$$J_{\rho} = 2J_z = 2J_y \tag{2.43}$$

2. Момент инерции сечения относительно какой-либо оси равен моменту инерции этого сече-

ния относительно центральной параллельной оси, данной, сложенному с произведением площади сечения на квадрат расстояния между осями.



Из рис 2 31 спелует что

Из рис. 2.31 следует, что  

$$J_{z_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y+a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$

Но

$$\int_{A} y^2 dA = J_z; \quad \int_{A} y dA = S_z = 0; \quad \int_{A} dA = A.$$

Таким образом,

$$J_{z_1} = J_z + a^2 A. (2.44)$$

Рассмотрим понятие о главных осях инерции. Две взаимно перпендикулярные оси с началом в данной точке, для которых центробежный момент инерции плоской фигуры равен нулю, называют главными осями инерции фигуры в этой точке. Главные оси инерции в центре тяжести фигуры называют главными центральными осями инерции.

Легко показать, что в том случае, когда фигура имеет хотя бы одну ось симметрии, эта ось является одной из главных центральных осей инерции, а другая проходит через центр тяжести фигуры перпендикулярно первой. Если хотя бы одна из двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через центр тяжести сечения, является осью симметрии, то такие оси являются главными центральными осями инерции. Для таких сечений, как круг и кольцо любые две взаимно перпендикулярные центральные оси являются главными осями инерции.

В общем случае главные центральные оси инерции фигуры могут быть найдены, если известны ее центробежный  $J_{z1v1}$  и осевые  $J_{z1}$  и  $J_{v1}$  моменты инерции относительно произвольно расположенных центральных осей  $z_1$  и  $y_1$ .

Для этого систему осей  $z_1$  и  $y_1$  необходимо повернуть на угол  $\alpha$ , определяемый из соотношения

$$tg 2\alpha = \frac{2J_{z_1y_1}}{J_{y_1} - J_{z_1}}.$$
(2.45)

Моменты инерции относительно главных центральных осей инерции называют главными моментами инерции: они обладают тем свойством, что один из них имеет максимальное, а другой минимальное значение по сравнению с моментами инерции относительно остальных центральных осей. Главные моменты инерции

$$J_{\max_{\min}} = \frac{J_{z_1} + J_{y_1}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_{z_1} + J_{y_1})^2 - 4J_{z_1y_1}^2}$$

Значения моментов инерции простейших фигур, а также прокатных профилей можно найти в технических справочниках или вычислить по приведенным выше формулам.

Определим величины моментов инерции наиболее распространенных плоских сечений, встречающихся при расчетах и конструировании деталей механизмов.

1. Прямоугольник высотой *h* и шириной *b* (рис. 2.32, а). Выделим в прямоугольнике элементарную полоску высотой *dy* и шириной *b*. Полоска отстоит от центральной оси *z*, параллельной основанию на расстоянии *y*. При этом *y* изменяется в пределах  $+\frac{h}{2}$  до  $-\frac{h}{2}$ .

*Puc.* 2.32

На основании формулы (2.39) имеем

$$J_z = \int_F y^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{a}{2}} y^2 b dy$$
, откуда  $J_z = \frac{bh^3}{12}$ . (2.46)

Аналогично

$$J_{y} = \frac{b^{3}h}{12}$$

Для того же прямоугольника момент инерции относительно оси, проходящей через основание,

$$J_z = \frac{bh^3}{12} \,. \tag{2.47}$$

2. Круг диаметром *d* (рис. 2.32, б). Выделим в круге элементарную площадь в виде кольца радиусом  $\rho$  и шириной  $d\rho$ . Площадь кольца  $dF = 2\pi\rho d\rho$ .

Применив формулу (2.42), получим величину полярного момента инерции относительно центра круга:

$$J_{\rho} = \int_{F} \rho^{2} dF = \int_{F} \rho^{2} 2\pi \rho d\rho = 2\pi \int_{0}^{\frac{a}{2}} \rho^{3} d\rho \quad \text{ИЛИ} \quad J_{\rho} = \frac{\pi d^{4}}{32} \approx 0.1d^{4} \,. \tag{2.48}$$

## 3. Круговое кольцо с наружным диаметром D и внутренним d.

В данном случае полярный момент инерции может быть получен как разность полярных моментов инерции большого и малого круга (рис. 2.32, в). С учетом уравнений (2.48) имеем

$$J_{\rho} = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi}{32} (D^4 - d^4) \approx 0.1 (D^4 - d^4). \quad (2.49)$$

Обозначив  $\frac{d}{D} = C$ , после подстановки в выражение (2.49), получим

$$J_{\rho} \cong 0.1(1 - C^4) \,. \tag{2.50}$$

Исходя из соотношения (2.42, а), находим осевые моменты инерции круга и кругового кольца

$$J_x = J_y = \frac{J_{\rho}}{2}$$

Для круга с учетом соотношения (2.42)

$$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{32} \frac{1}{2} = \frac{\pi d^4}{64} \approx 0.05 d^4.$$
 (2.51)

Для кольца, принимая во внимание выражения (2.49) и (2.50),

$$J_x = J_y = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32} \frac{1}{2} = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64} \approx 0.05 (D^4 - d^4), \qquad (2.52)$$

$$J_x = J_y = 0.05D^4(1 - C^4). \qquad (2.52')$$

#### 2.3.4 Напряжения при изгибе. Расчеты на прочность

Как было показано выше, при изгибе величина нормальных напряжений зависит от величины изгибающего момента, а величина касательных напряжений – от величины поперечной силы. Изгибающий момент или поперечная сила в любом сечении балки могут быть определены рассмотренными выше методами, с помощью эпюр. При расчетах на прочность большое значение имеет распределение нормальных и касательных напряжений по сечению. Установим зависимость между изгибающим моментом, действующим в сечении, и возникающими при этом нормальными напряжениями, а также определим закон распределения нормальных напряжений по сечению.

Пусть прямолинейная балка, имеющая продольную вертикальную плоскость симметрии, подвергается чистому изгибу под влиянием силовых факторов, действующих в этой плоскости (рис. 2.33). Указанбудем ную плоскость называть плоскостью изгиба. Выделим элемент балки, ограниченный двумя поперечными сечениями, находя-



щимися на бесконечно малом расстоянии ds друг от друга. При изгибе ось балки (линия пересечения нейтрального слоя с плоскостью изгиба) искривляется, как показано штрихпунктиром на рис. 2.33, а, а сечения, ограничивающие выделенный элемент балки, поворачиваются вокруг нейтральных осей, проходящих через точки тип, и, заняв положения AB и CD, образуют угол  $d\varphi$ . При этом можно считать, что указанные сечения остаются плоскими, а расстояния между продольными слоями балки не меняются. Дуга *mn*, принадлежащая нейтральному слою, сохраняет свою первоначальную длину ds, а длина дуги m'n', отстоящей на расстоянии у от нейтрального слоя, принимает новое значение ds'. Радиус кривизны дуги *mn* изогнутой оси балки можно считать постоянным. Обозначив его через  $\rho$ , имеем

$$ds = \rho d\varphi; \quad ds' = (\rho + y)d\varphi.$$

Относительное удлинение дуги

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho}.$$
 (2.53)

По закону Гука напряжение в слое, отстоящем на расстоянии у от нейтрального,

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}.$$
(2.54)

Таким образом, нормальные напряжения в поперечном сечении изогнутой балки прямо пропорциональны расстояниям от рассматриваемых точек до нейтральной оси (рис. 2.33, б), т. е. изменение напряжений по сечению в плоскости изгиба подчиняется линейному закону (рис. 2.33, а). Из равенства (2.54) следует:  $\sigma = 0$  при y = 0 и  $\sigma = \sigma_{max}$  при  $y = y_{max}$ , т. е. нормальное напряжение равно нулю на нейтральной оси и достигает максимальных значений в наиболее удаленных от этой оси волокнах.

Рассматривая у как алгебраическую величину, имеющую положительное значение для растянутых и отрицательное для сжатых волокон, получим для напряжений в этих волокнах соответственно положительные и отрицательные значения.

На выделенный элемент ABCD (рис. 2.33, а) действуют со стороны правой части балки распределенные по сечению CD силы

$$dN = \sigma dF = \frac{Ey}{\rho} dA,$$

где *dA* – элементарная площадка, расположенная на расстоянии *y* от нейтральной оси.

Эта система элементарных сил эквивалентна системе внешних сил, действующих на правую часть балки, сводящихся в данном случае к одному изгибающему моменту  $M_{II}$  (поперечная сила Q = 0, так как мы рассматриваем чистый изгиб). Таким образом, главный вектор распределенных по сечению CD сил равен нулю, а главный момент их относительно любого центра равен изгибающему моменту в этом сечении.

Поэтому при выбранной системе осей

$$\sum X = 0; \quad \sum X = \sum dN = \int_{A} \frac{E}{\rho} y dA = \frac{E}{\rho} \int_{A} y dA = 0;$$
$$\sum M_{z} = -\sum y dN = -\int_{A} \frac{E}{\rho} y^{2} dA = -\frac{E}{\rho} \int_{A} y^{2} dA = -M_{u}$$

где  $\int_{A} y dA = S_z$  – статический момент площади сечения относительно нейтральной оси;  $\int_{A} y^2 dA = J_z$  – момент инерции площади сечения относительно той же оси.

Отсюда, так как

$$\frac{E}{\rho} \neq 0, S_z = 0; \tag{2.55}$$

кроме того

$$\frac{EJ_z}{\rho} = M_H; \tag{2.56}$$

Из уравнения (2.55) следует, что нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения, и она является одной из главных центральных осей инерции,

Уравнение (2.56) можно представить в виде

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_{H}}{EJ_{z}}; \qquad (2.57)$$

Величина  $\frac{1}{\rho}$  представляет собой кривизну изогнутой оси балки и характеризует величину деформации при изгибе. Произведение модуля упругости *E*, характеризующего механические свойства материала балки, на момент инерции сечения  $J_z$ , характеризующий форму и размеры сечения, называют жесткостью при изгибе.

Из соотношения (2.57) следует, что величина деформации изогнутой оси балки прямо пропорциональна изгибающему моменту  $M_{\mu}$  и обратно пропорциональна жесткости при изгибе  $EJ_z$  Таким образом, жесткость при изгибе характеризует способность балки из данного материала с заданной формой и размерами поперечного сечения сопротивляться воздействию изгибающего момента.

Подставляя в уравнение (2.54) выражение  $\frac{1}{\rho}$  из уравнения (2.57),

имеем

$$\sigma = Ey \frac{M}{EJ_z} = \frac{M_H y}{J_z}; \qquad (2.58)$$

Наибольшие по абсолютной величине напряжения возникают на наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах, т.е. при  $y = y_{max}$ . Обозначим

$$\frac{J_z}{y_{\text{max}}} = W_z \tag{2.58'}$$

Величину  $W_z$  называют осевым моментом сопротивления сечения, т.е. момент сопротивления определяют как частное от деления момента инерции сечения относительно нейтральной оси на расстояние от этой оси до наиболее удаленной точки сечения.

Условие прочности для балок, изготовленных из материала, одинаково сопротивляющегося растяжению и сжатию, имеет вид

$$\left|\sigma_{\max}\right| = \frac{\left|M_{\max}\right|}{W_z} \le [\sigma]. \tag{2.59}$$

Балки из материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию, обычно изготовляют с сечениями, симметричными относительно нейтральной оси, т. е.  $h_1 = h_2 = h_{max}$  Для материалов, которые не обладают указанными свойствами, необходимо определять максимальные напряжения в крайних растянутых и сжатых волокнах. Полагая  $y = h_1$  и  $y = h_2$ , получим наибольшие по абсолютной величине напряжения в крайних точках сечения С и D (рис. 2.33, б):

$$|\sigma_1| = \frac{Mh_1}{J_z}; |\sigma_2| = \frac{Mh_2}{J_z};$$

Обозначив допускаемые напряжения на растяжение и сжатие соответственно  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_{cm}]$ , приходим к следующим уравнениям прочности при изгибе балок, для которых  $[\sigma_p] \neq [\sigma_{cm}]$ :

$$\left|\sigma_{1}\right| = \frac{Mh_{1}}{J_{z}} \leq [\sigma_{p}]; \quad \left|\sigma_{2}\right| = \frac{Mh_{2}}{J_{z}} \leq [\sigma_{cx}]$$

т. е. размеры и форма поперечных сечений изгибаемой балки должны быть подобраны так, чтобы абсолютные величины напряжений в крайних волокнах не превышали допускаемых напряжений на растяжение и сжатие.

Рассмотрим величины моментов сопротивления для наиболее распространенных форм сечения.

Для прямоугольника (см. рис. 2.32, с), с учетом соотношений (2.46) и (2.58'), при  $y_{\text{max}} = \frac{h}{2}$ , осевой момент сопротивления

$$W_{z} = \frac{J_{z}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^{3}}{12} \frac{2}{h} = \frac{bh^{2}}{6}.$$
 (2.60)

Для круга (см, рис. 2.32, б)

$$U_z = \frac{\pi d^4}{64}; \quad y_{\text{max}} = \frac{d}{2}$$

Осевой момент сопротивления

$$W_z = \frac{J_z}{y_{\text{max}}} = \frac{\pi d^4}{64} \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1 d^3.$$
 (2.61)

Для кольца (см. рис 2.32, в)

$$J_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}; \quad y_{\text{max}} = \frac{D}{2}.$$

Осевой момент сопротивления

$$W_{z} = \frac{J_{z}}{y_{\text{max}}} = \frac{\pi (D^{4} - d^{4})}{64} \frac{2}{D} = \frac{\pi (D^{4} - d^{4})}{32D}$$
(2.62)

ИЛИ

$$W_z \approx 0.1 D^{34} (1 - C^4).$$
 (2.62').

Для стандартных прокатных профилей моменты сопротивлений приведены в таблицах стандартных сортаментов.

Рассмотренный выше случай определения напряжений относился к чистому изгибу. Однако в общем случае поперечного изгиба наряду с нормальными в поперечных сечениях балки возникают касательные напряжения, связанные с наличием поперечной силы. Определим приближенно величину касательных напряжений при поперечном изгибе. Двумя поперечными сечениями mm и m'm', отстоящими на расстоянии dx друг от друга (рис. 2.34, а), и продольной горизонтальной плоскостью nn', отстоящей на расстоянии y от нейтрального слоя, выделим часть балки mm'n'n.

При поперечном изгибе на горизонтальной и вертикальных гранях выделенной части возникают потенциальные напряжения. В силу парности этих напряжений вместо напряжений в точках k, l поперечного сечения (рис. 2.34, б) отстоящих на расстоянии y от нейтрального слоя, можно определить напряжения  $\tau$  в соответствующем горизонтальном слое nn'. Обозначим через dM изменение изгибающего момента  $M_{II}$  при переходе от сечения mm к сечению m'm'. При этом нормальное напряжение возрастает на величину  $d\sigma$ .

Полагая в качестве первого приближения, что касательные напряжения по ширине *b* сечения распределены равномерно, и рассматривая равновесие выделенной части балки, имеем



$$\sum X = N - N' + \tau b dx = 0,$$

но

$$N = \int_{F^{omc}} \sigma dF = \int_{F^{omc}} \frac{M}{J_z} dF = \frac{M}{J_z} \int_{F^{omc}} y_1 dF = \frac{MS_z^{omc}}{J_z}$$

где  $F^{omc}$  – отсеченная заштрихованная площадь:  $S_z^{omc}$  – статический момент этой площади относительно нейтральной оси *z*.

Аналогично

$$N'=\frac{(M+dM)S_z^{omc}}{J_z},$$

поэтому

$$\tau b dx = N' - N = \frac{dMS_z^{omc}}{J_z}$$

После преобразования с учетом выражения (2.33) получим формулу Журавского

$$\tau = \frac{dM}{dx} \frac{S_z^{omc}}{J_z b} = \frac{QS_z^{omc}}{J_z b},$$
(2.63)

где Q – поперечная сила в рассматриваемом сечении; b – ширина сечения;  $J_z$  – момент инерции сечения относительно нейтральной оси;  $S_z^{omc}$ - статический момент площади отсеченной части сечения относительно нейтральной оси *z*.

Так, для случая, показанного на рис. 2.35, а, статический момент отсеченной заштрихованной части определяется из соотношения

$$S_{z}^{omc} = b \left(\frac{h}{2} - y\right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^{2}}{4} - y^{2}\right); \qquad (2.64)$$

это уравнение параболы.

Касательное напряжение с учетом выражений (2.62) и (2.44)

$$\tau = \frac{6Q}{bh^3} \left( \frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

На рис. 2.35, б показана эпюра касательных напряжений, построенная по трем точкам:

$$\tau_{y=\frac{h}{2}} = 0; \quad \tau_{y=\frac{h}{2}} = \frac{3Q}{2F}; \quad .\tau_{y=-\frac{h}{2}} = 0$$

*Puc.* 2.35

Для балки прямоугольного сечения касательное напряжение достигает максимального значения на уровне нейтральной оси:

$$\tau_{\rm max} = \frac{3Q}{2F}.$$

В общем случае максимальное касательное напряжение

$$\tau_{\max} = \frac{QS_{\max}}{bJ_z},$$

где  $S_{\text{max}}$  – статический момент всей части сечения, расположенный по



Puc. 2.36

одну из сторон от нейтральной оси.

С известным приближением формула Журавского может быть применена и для таких сечений, как круг или кольцо. Эпюра касательных напряжений для круга показана на рис. 2.36. Здесь, так же как и в рассмотренном случае в наиболее удаленных от нейтральной оси точках сечения, касательное напряжение равно нулю и достигает максимума на нейтральной оси,

причем для круга 
$$au_{\text{max}} = \frac{4Q}{3F}$$
, для кольца  $au_{\text{max}} = \frac{2Q}{F}$ . Касательные напря-

жения равны нулю и в наиболее удаленных от нейтральной оси точках таких сечений, как двутавровое, крестообразное и Т-образное.

В общем случае поперечного изгиба условие прочности зависит от напряженного состояния в опасной точке. Рассмотрим характер напряженного состояния четырех точек сечения *mn* балки, изображенной на рис. 2.37, а, б.

Анализ показывает, что:

а) элементы 1, 4, расположенные на крайних волокнах, имеют касательное напряжение  $\tau = 0$ , нормальное напряжение  $\sigma = \sigma_{max} = \frac{M}{W}$ ; таким образом, налицо линейное напряженное состояние;



Puc. 2.37

б) элемент 3, расположенный на расстоянии *y* от нейтрального слоя, имеет на вертикальных гранях  $\sigma = \frac{My}{J}$  и  $\tau = \frac{QS_x}{bJ}$ ; на гори-

зонтальных гранях касательные напряжения *т*; элемент находится в плоском напряженном состоянии; в) элемент 2 на нейтральном слое не испытывает действия нор-

в) элемент 2 на неитральном слое не испытывает деиствия нормальных напряжений ( $\sigma = 0$ ); касательные напряжения на вертикальных и горизонтальных гранях достигают максимального значения  $\tau = \tau_{max}$ .

Длительная практика эксплуатации изогнутых балок показывает, что наиболее опасной, определяющей работоспособность конструкции, является точка, расположенная на крайних растянутых волокнах (элемент 1).

Следовательно, основным уравнением, по которому проверяют прочность или определяют размеры сечения, является

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W} \le [\sigma_{H}]. \tag{2.65}$$

В некоторых специфических случаях, когда касательное напряжение может оказаться решающим фактором, определяющим прочность изогнутой балки, производят полный расчет балки по эквивалентным напряжениям, определенным с помощью одной из теорий прочности.

## 2.4 Кручение

#### 2.4.1 Чистый сдвиг и его особенности

Чистым сдвигом называют такое напряженное состояние, когда на гранях элементарного, выделенного из бруса элемента действуют только касательные напряжения. Такие грани называют площадками чистого сдвига.



*Puc. 2.38* 

Пусть, например, к брусу приложены перпендикулярно его оси две равные по модулю, но противоположно направленные силы F, действующие весьма близко друг от друга (рис. 2.38, а). При достаточной величине этих сил произойдет срез – отделение левой части бруса от правой по некоторому сечению AB.

Деформации среза в зоне действия усилий предшествует перекашива-

ние прямых углов параллелепипеда abac (рис. 2.38, б). Эту деформацию называют сдвигом. На гранях параллелепипеда возникают касательные напряжения, направление которых определяется законом парности касательных напряжений. Величина касательного напряжения

$$\tau = \frac{F}{A},\tag{2.66}$$

где А – площадь поперечного сечения бруса.

Фактически распределение касательных напряжений по сечению АВ не является равномерным. Касательные напряжения в узких краевых зонах приближаются к нулю. Однако это обстоятельство при практических расчетах можно не принимать во внимание, так как оно относится к числу местных отклонений и область этих отклонений мала по

сравнению с общими размерами сечения.

Другим примером, иллюстрирующим состояние чистого сдвига, может служить скручивание тонкостенной трубки (рис. 2.39, а). Под действием внешних моментов *М* концевые сечения трубы совершают относительный поворот, вследствие чего стенки трубы испытывают де-



Puc. 2.39

формацию сдвига, а ее образующие наклоняются. Разрезав мысленно трубу по одной из образующих и развернув ее, увидим, что труба представляет собой пластинку, подверженную чистому сдвигу (рис2.39, б).

Исследуем напряженное состояние при чистом сдвиге с помощью формул (2.19) и (2.20). В этих формулах нормальные напряжения  $\sigma_{\alpha}$  и  $\sigma_{\beta}$  на площадках чистого сдвига равны нулю. Это имеет место при

$$\alpha = 0$$
 или  $\alpha = n \frac{\pi}{2}$ .

Анализ указанных зависимостей показывает, что при чистом сдвиге главные напряжения равны по величине и противоположны по направлению:  $\sigma_{max} = \pm \tau$ .

Таким образом, при чистом сдвиге наблюдается «закон парности нормальных напряжений», по форме аналогичный закону парности касательных напряжений. На взаимно перпендикулярных площадках действуют главные напряжения, равные по величине, но имеющие противоположный знак.

Сдвиг является частным случаем двухосного напряженного состояния, так как два главных напряжения не равны нулю.

Из выведенных ранее формул, следует, что главные площадки составляют с площадками чистого сдвига угол 45° и располагаются так, как показано на рис. 2.40.

Рассмотрим характерные особенности  $\sigma_{min} = -\tau$  деформации при сдвиге (см. рис. 2.38, б).

Под действием касательных напряжений грань ей смещается относительно грани ab вниз и занимает новое положение c'd'. Величина  $\delta$  сдвига cc' относительно плоскости ab носит название абсолютного или линейного сдвига. Величина абсолютного сдвига зависит от расстояния между параллельными плоско-



стями. Величину  $\frac{\delta}{h}$  называют относительным, сдвигом. Угол  $\gamma$ , на который поворачиваются сечения *ac* и *bd* в процессе деформации, носит название угла сдвига. Угол сдвига в пределах упругой деформации очень мал, поэтому тангенс угла может быть заменен самим углом:

$$tg\gamma = \frac{\delta}{h} \approx \gamma . \tag{2.67}$$

Следовательно, угол сдвига у характеризует относительную деформацию при сдвиге.

Для деформации чистого сдвига закон Гука выражается соотношением

$$\tau = G\gamma, \tag{2.68}$$

где *G* – коэффициент пропорциональности, называемый модулем упругости второго рода; *у* – относительный сдвиг.

Модуль упругости второго рода имеет размерность напряжения, так как относительный сдвиг является величиной безразмерной. Величины модулей упругости первого и второго рода связаны следующей формулой, вывод которой здесь не приводится:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$
 (2.69)

где *Е* – модуль упругости первого рода; *µ* – коэффициент Пуассона.

Отметим, что модуль упругости второго рода для стали  $G \approx 8 \cdot 10^4$  H/мм<sup>2</sup>, для алюминия  $G \approx 2,7 \cdot 10^4$  H/мм<sup>2</sup>.

Подставив в формулу (2.68) значение касательного напряжения по уравнению (2.66) и относительный сдвиг по выражению (2.67), получим еще один вариант формулы закона Гука для сдвига:

$$\delta = \frac{Fh}{GA}.$$
(2.70)

Конструкцию на прочность при деформации сдвига рассчитывают так, чтобы действительные касательные напряжения были меньше до-пускаемых.

Условие прочности при срезе имеет вид

$$\tau = \frac{F}{A} \le [\tau]. \tag{2.71}$$

Допускаемое напряжение при срезе обычно принимается как некоторая часть допускаемого напряжения того же материала при растяжении. Для стали, меди и алюминия  $[\tau] = (0,5 \div 0,6)[\sigma]$ ; для чугуна можно принимать  $[\tau] = (0,75 \div 0,8)[\sigma]$ .

## 2.4.2 Кручение стержня круглого поперечного сечения

Цилиндрический брус, закрепленный одним концом и нагруженный парой сил с моментом *M*, действующей в плоскости поперечного сечения бруса, подвергается деформации, называемой кручением. Для изучения этого вида деформации на поверхность круглого резинового стержня наносят сетку из равноотстоящих окружностей и образующих (рис 2.41, а). Если один конец стержня закрепить, а другой нагрузить парой сил, действующей в плоскости, перпендикулярной к оси стержня, то можно заметить, что образующие цилиндра, превращаются в винтовые линии большого шага (рис. 2.41, б), а прямоугольники сетки превращаются в параллелограммы. Это наблюдение позволяет сделать следующие выводы об основных свойствах деформации кручения в пределах упругих деформаций.



*Puc. 2.41* 

1. Ось цилиндра, подвергнутого скручиванию, называемая осью кручения, не деформируется.

Нормальные поперечные сечения остаются плоскими, нормальными к оси цилиндра, сохраняют первоначальный диаметр и форму,

2. т.е. поперечные сечения цилиндра при кручении поворачиваются как жесткие диски, не претерпевая деформации сдвига в плоскости дисков.

3. Равноотстоящие поперечные сечения поворачиваются одно относительно другого на равные углы, т. е. угол поворота поперечных сечений относительно закрепленного конца цилиндра увеличивается пропорционально удалению от этого конца. Угол поворота концевого сечения относительно закрепленного конца называют полным углом закручивания и обозначают через  $\varphi$ .

4. При кручении цилиндра в его поперечных сечениях возникают только касательные напряжения. Нормальные напряжения в поперечных и продольных сечениях пренебрежимо малы и могут быть приняты равными нулю. В пределах упругих деформаций высоту цилиндра, подвергнутого скручиванию, можно считать неизменной.

Описание процессов, происходящих при деформации кручения, сделано с некоторыми упрощениями, не нарушающими при этом необходимой степени достоверности. Явления, которыми мы пренебрегли, не оказывают существенного влияния на прочность скручиваемых деталей. Однако сделанные допущения позволяют значительно упростить вывод расчетных соотношений. В настоящей главе рассмотрены явления, происходящие при кручении только брусьев круглого поперечного сечения. Так как деформация при кручении зависит от величины крутящего момента, действующего в данном сечении, необходимо рассмотреть методику определения крутящего момента в любом сечении цилиндра. В месте закрепления цилиндра (рис. 2.41, б) возникает реактивный крутящий момент  $M_P$ , равный внешнему крутящему моменту M, приложенному к свободному концу цилиндра. Рассечем цилиндр плоскостью I и рассмотрим равновесие его нижней части (рис. 2.41, в). Для нахождения нижней части в равновесии необходимо, чтобы момент внутренних сил упругости в данном сечении уравновешивал реактивный момент  $M_P$ , равный M:

$$M_{p} - M' = 0; \quad M_{p} = M'.$$
 (2.72)

$$M - M_{_{\scriptscriptstyle RP}}'' = 0; \quad M_{_{\scriptscriptstyle RP}}'' = M.$$
 (2.73)

Сопоставляя соотношения (2.72) и (2.73) и принимая во внимание равенство внешнего и реактивного моментов, получаем

$$M_{KP}' = M_{KP}'' = M.$$

Если отбросить нижнюю часть цилиндра и рассматривать равновесие верхней части, нагруженной моментом M, то и в этом случае в сечении l возникает момент сил упругости  $M_{_{KP}}$ '', равный моменту внешних сил M.

Таким образом, крутящий момент, действующий в любом сечении цилиндра, являющийся моментом внутренних сил упругости, численно равен моменту внешней пары сил, действующей по любую сторону от сечения.

Рассмотрим случай, когда на цилиндр действуют несколько крутящих моментов разного направления. В качестве примера может быть взят ведущий вал редуктора с раздвоенной ступенью (рис. 2.42, а).

На конце вала находится полумуфта А, к которой приложен крутя-

щий момент  $M_1$ , развиваемый двигателем. Между опорами вала расположены два зубчатых колеса В и С, на которые соответственно действуют моменты  $M_2$  и  $M_3$  сопротивления вращению зубчатых колес, находящихся в зацеплении с колесами В и С. Поэтому момент, развиваемый двигателем, имеет направление, противоположное направлению моментов, приложенных к зубчатым колесам.



Puc. 2.42

При равномерном вращении вала, пренебрегая сопротивлением в подшипниках, имеем

$$M_1 - M_2 - M_3 = 0 \tag{2.73'}$$

Рассмотрим произвольное сечение вала на участке АВ.

Согласно ранее сказанному, рассматривая левую часть вала, получаем в сечении l крутящий момент, уравновешивающий внешний момент M, т. е.

$$M_{sp}^{I} = M_{1}. (2.74)$$

Если рассматривать равновесие правой части, то момент в сечении l должен уравновесить моменты  $M_2$  и  $M_2$  или

$$M_{sp}^{I} = M_{2} + M_{3}. (2.75)$$

но из соотношения (2.73')  $M_1 = M_2 + M_3$ , что подтверждает равенство правых частей уравнений (2.74) и (2.75).

Аналогично получаем момент в сечении ІІ на участке вала ВС.

Из равновесия левой части

$$M_{sp}^{II} = M_1 - M_2. (2.76)$$

Из равновесия правой части в том же сечении

$$M_{sp}^{II} = M_{3}. \tag{2.77}$$

но из соотношения (2.73')

$$M_{3} = M_{1} - M_{2}. (2.78)$$

$$M_{\mu p} = M_1 - M_2 = M_3. \tag{2.79}$$

Сечение *III* (правее точки С).

Из приведенных выше рассуждений следует, что крутящий момент в любом сечении вала численно равен алгебраической сумме внешних моментов, действующих слева или справа от рассматриваемого сечения в плоскостях, перпендикулярных к оси вала. За положительное направление момента принято такое, при котором внешние моменты, приложенные к валу, вращают отсеченную часть по часовой стрелке, если смотреть со стороны проведенного сечения. В соответствии с этим правилом указаны знаки моментов в соотношениях (2.73') – (2.79).

Наглядное представление о величине крутящего момента в любом сечении вала дают эпюры крутящих моментов.

Эпюрой крутящих моментов называется диаграмма, изображающая изменение крутящего момента по длине вала (рис. 2.42, б). Методика построения эпюр крутящих моментов сводится к следующему. По ранее установленному правилу определяют величину и знак крутящего момента для характерных участков вала. Проводят горизонтальную пря-

мую ОО, именуемую нулевой линией эпюры крутящих моментов. От нулевой линии в выбранном масштабе откладывают ординаты, изображающие величины крутящих моментов: положительные – вверх, отрицательные – вниз. Ломаная *aa*<sub>1</sub>*b*<sub>1</sub>*bc*<sub>1</sub>*c* и представляет собой эпюру крутящих моментов для рассматриваемого случая. Площадь, очерченная эпюрой, покрывается вертикальной штриховкой.

#### 2.4.3 Расчеты на прочность и жесткость

Рассмотрим элемент, выделенный сечениями I и II из цилиндра, один конец которого закреплен неподвижно, а другой нагружен парой сил с моментом M (рис. 2.43, а), В результате действия внешнего момента M возникает деформация кручения, и образующая цилиндра *иаbcd* займет положение ab'c'd' (рис. 2.43, а).

Если сечение *I*, находящееся на расстояниихот нижнего конца цилиндра, повернулось на угол  $\varphi$ , то сечение *II*, находящееся на расстоянии x + dx от нижнего сечения, повернется на угол  $\varphi + d\varphi$  (рис. 6.6, б). Проведем из точки *b* прямую *bc*" параллельно *b'c'*. Тогда  $\angle cO_2c'' = d\varphi$ . Элемент *bc''c'b'* до поворота сечения *II* относительно сечения *I* имел вертикальные боковые стороны. Следовательно, абсолютный сдвиг элемента

$$cc'' = rd\varphi$$
.

Относительный сдвиг

$$\gamma = r \frac{d\varphi}{dx}.$$

Обозначим  $\frac{d\varphi}{dx} = \theta$ ; тогда  $\gamma = r\theta$ , где  $\theta$  – угол закручивания, отне-

сенный к единице длины цилиндра, называемый относительным углом, закручивания.

Для цилиндров постоянного сечения, подверженных действию постоянного крутящего момента,  $\theta = const$ . Так как в соответствии с принятыми допущениями радиусы при кручении остаются прямыми, то можно сказать, что для всякого элемента, лежащего внутри цилиндра на радиусе  $\rho$ , относительный сдвиг

$$\gamma_{\rho} = \rho \theta$$

По закону Гука напряжение в сечении цилиндра

Из соотношения (2.80) следует, что напряжение внутри цилиндра изменяется по закону прямой линии пропорционально расстоянию от

оси вращения. Минимальное напряжение, равное нулю, имеет место в центре поперечного сечения, а максимальное – на поверхности цилиндра (рис 2.43, в).

Элементарная касательная сила, перпендикулярная радиусу сечения, проведенному в центр тяжести элементарной площадки *dA*, действующая на эту площадку с учетом соотношения (2.80),

$$dF = \tau_o dA = G\theta \rho dA$$

Элементарный момент, создаваемый силой *dF* относительно центра сечения,

Puc. 2.43

$$dM = \rho dF = G\theta \rho^2 dA.$$

Сумма таких элементарных моментов, взятая, по всей площади поперечного сечения цилиндра, равна крутящему моменту  $M_{\kappa p}$ , который действует в рассматриваемом сечении цилиндра и в данном конкретном случае равен внешнему моменту M:

$$M_{_{\kappa p}}=\int_{A}dM=\int_{A}G\theta\rho^{2}dA.$$

Так как G = const и  $\theta = const$ , то  $M_{sp} = G \theta \int_{A} \rho^2 dA$ .

Ho  $\int_{A} \rho^2 dA = J_{\rho}$  – полярный момент инерции сечения. Поэтому

$$M_{\nu\rho} = G\theta J_{\rho}. \tag{2.81}$$

Из соотношения (2.79) получаем величину угла закручивания, отнесенного к единице длины цилиндра:

$$\theta = \frac{M_{_{\kappa p}}}{GJ_{_{\rho}}}.$$
(2.82)

Полный угол закручивания в радианах

$$\varphi = \theta l = \frac{M_{\kappa\rho} l}{GJ_{\rho}} \tag{2.83}$$

или, в градусах,

$$\varphi^{\circ} == \frac{M_{\nu}l}{GJ_{\rho}} \frac{180^{\circ}}{\pi}.$$
(2.84)

Произведение модуля упругости второго рода на полярный момент инерции *GJ*<sub>о</sub> называют жесткостью при кручении. Эта величина, характеризует способность тела из данного материала с поперечным сечением данных размеров и формы сопротивляться деформации кручения. Таким образом, полный угол закручивания цилиндра прямо пропорционален крутящему моменту и длине цилиндра и обратно пропорционален жесткости при кручении.

Найдем зависимость напряжения от крутящего момента. В соотношение (2.80) вместо в подставим его значение из соотношения (2.82):

$$\tau_{\rho} = G \theta \rho = G \rho \frac{M_{\kappa \rho}}{G J_{\rho}} = \frac{M_{\kappa \rho} \varphi}{J_{\rho}}.$$

Отсюда (см. рис. 2.43, в) наибольшее напряжение при кручении

$$\tau_{p} = \frac{M_{\kappa p} r}{J_{p}}, \qquad (2.85)$$

или

$$\tau_{\max} = \frac{M_{_{NP}}r}{W_{_P}},\tag{2.86}$$

где  $W_p = \frac{\dot{j}_p}{r}$  – отношение полярного момента инерции к расстоянию от оси вращения до наиболее удаленной точки сечения; это отношение называют полярным моментом сопротивления.

Условие прочности при кручении будет выполнено в том случае, если максимальное значение напряжения, возникающего при кручении, не превышает величины допускаемого напряжения, т. е. уравнение прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\mu}}{W_{\mu}} \le [\tau_{\mu}]. \qquad (2.87)$$

Допускаемое напряжение при кручении для стали обычно принимают

$$[\tau_{xp}] \approx (0,5 \div 0,6) [\sigma_p],$$

где  $[\sigma_p]$ - допускаемое напряжение при растяжении.

Приведем соотношения для определения полярного момента сопротивления:

для круга диаметром d, с учетом выражения (2.81),

$$W_p = \frac{J_p}{\frac{d}{2}} = \frac{\pi d^4}{32} \frac{2}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3.$$

для кольца, с учетом соотношения (2.82),
$$W_{p} = \frac{\pi (D^{4} - d^{4})}{32} \frac{2}{D} = \frac{\pi (D^{4} - d^{4})}{16D} \approx 0.2 \frac{(D^{4} - d^{4})}{D},$$

где *D* – наружный диаметр кольца; *d* – внутренний диаметр кольца.

При  $C = \frac{d}{D}$  полярный момент сопротивления кольца

$$W_{p} = \frac{\pi D^{3}}{16} (1 - C^{4}) \approx 0.2 D^{3} (1 - C^{4}).$$

Определить диаметр цилиндра *d*, подвергнутого деформации кручения, можно исходя из двух предпосылок. В тех случаях, когда определяющей является прочность цилиндра, расчет ведут по соотношению (2.87). Для сплошного цилиндра

$$\frac{M_{_{\kappa p}}}{0,2d^{^{3}}} \leq [\tau_{_{\kappa p}}]; \quad d = \sqrt{\frac{M_{_{\kappa p}}}{0,2[\tau_{_{\kappa p}}]}}$$

Когда определяющей является предельная деформация (угол закручивания), расчет ведут на жесткость. Из уравнения (2.84) имеем

$$\theta^{\circ} = \frac{M_{_{\kappa p}}}{GJ_{_{p}}} \frac{180^{\circ}}{\pi} \le [\theta^{\circ}];. \qquad (2.88)$$

где  $[\theta^{\circ}]$  – допустимый угол закручивания на единицу длины, который в зависимости от назначения вала принимается в пределах 0,25-1,0 град/м;  $J_p = \frac{\pi d^4}{32}$  – полярный момент инерции сплошного цилиндра.

Тогда диаметр вала сплошного сечения, на основании условия жесткости,

$$d \geq \sqrt[4]{\frac{32M_{_{\scriptscriptstyle RP}}}{G\pi[\theta']}} \frac{180^{\circ}}{\pi} \approx \sqrt[4]{\frac{M_{_{\scriptscriptstyle RP}}}{0.1G[\theta^{\circ}]}} \frac{180^{\circ}}{\pi}.$$

Пользуясь уравнениями (2.87) и (2.88), можно решить и другую задачу: определить безопасную величину крутящего момента, при котором обеспечивается необходимая прочность или жесткость.

# 2.4.4 Напряженное состояние и разрушение при кручении

Как следует из закона парности касательных напряжений, одновременно с касательными напряжениями, действующими в плоскостях поперечных сечений вала, имеют место касательные напряжения в продольных плоскостях. Они рав-



Puc. 2.44

ны по величине парным напряжениям, но имеют противоположный знак (рис. 2.44).

Таким образом, по граням элемента, ограниченного продольной и поперечной плоскостями сечения вала, действуют только касательные напряжения. Однако, как следует из формулы (2.86), на главных площадках, наклоненных к оси вала под углами 45° и 135°, действуют главные напряжения растягивающие  $\sigma_{max} = \tau$  и сжимающие  $\sigma_{min} = -\tau$  (рис. 2.45, а), где  $\tau$  – касательные напряжения, действующие в продольном и поперечном сечениях. Величину нормальных и касательных напряжений в других площадках можно определить по выведенным ранее формулам.

Из сказанного следует, что при кручении во всех площадках стержня, кроме оси, имеет место двухосное, неоднородное напряженное состояние. Наиболее напряженными являются точки, расположенные на поверхности цилиндра.

Характер разрушения при кручении зависит от способности материала стержня сопротивляться воздействию нормальных и каса-Так, тельных напряжений. V деревянных стержней первые трещины возникают по образующим, так как древесина плохо сопротивляется действию касательных напряжений, направленных вдоль волокон. Чугун и другие хрупкие материалы, сравнительно плохо работающие на растяжение, разрушаются по винтовой поверхности, наклоненной к оси вала под углом 45°, т. е. по направлению действия максимальных растягивающих напряжений (рис.



Puc. 2.48

2.43, б). Стальные валы чаще всего разрушаются по сечению, перпендикулярному к оси вала, под действием касательных напряжений, действующих в этом сечении.

### 2.5 Сложное сопротивление

В отличие от простых видов деформации на практике нередки случаи, когда в поперечных сечениях бруса возникают сразу несколько внутренних силовых факторов. Такие случаи принято называть сложным сопротивлением. Расчеты на прочность и жесткость при сложном сопротивлении основываются обычно на принципе независимости действия сил. Необходимо заметить, что иногда указанные виды расчетов можно упростить, если пренебречь (в пределах требуемой степени точности) второстепенными деформациями и привести, таким образом, сложную деформацию к более простой.

## 2.5.1 Понятие о теориях прочности

Общие сведения о расчетах на прочность. Одной из важнейших задач инженерного расчета является оценка прочности детали по известному напряженному состоянию в опасной точке поперечного сечения. Для простых видов деформаций эта задача решается сравнительно просто: по известным формулам определяют максимальные напряжения, которые затем сравнивают с опасными (предельными) для данного материала напряжениями, устанавливаемыми экспериментально. При этом прочность детали считается обеспеченной, если максимальные напряжения не превышают предельных значений. В случае необходимости реализовать требуемый коэффициент запаса прочности максимальные напряжения сравнивают с допускаемыми.

Указанный подход к оценке прочности является вполне обоснованным, так как при растяжении и сжатии бруса имеет место однородное линейное напряженное состояние, а при прямом поперечном изгибе наиболее нагруженные точки также находятся, как правило, в условиях линейного напряженного состояния.

Для сложного напряженного состояния подобный метод оценки прочности непригоден. Дело в том, что для одного и того же материала, как показывают опыты, опасное состояние может наступить при различных предельных значениях главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  в зависимости от соотношений между ними. Поэтому экспериментально установить предельные величины главных напряжений очень сложно не только из-за трудности постановки опытов, но и вследствие большого объема испытаний. В случае сложного напряженного состояния конструкции рассчитывают на прочность, как правило, на основании теоретических разработок с использованием данных о механических свойствах материалов, получаемых при испытании на растяжение и сжатие (иногда используют также результаты опытов на кручение). Только в отдельных случаях для оценки прочности конструкции или ее элементов прибегают к моделированию. В исключительных, особо ответственных случаях вопрос о прочности решается натурными испытаниями опытных образцов конструкции.

Все существующие теоретические методы расчета основаны на гипотезах о преимущественном влиянии того или иного фактора на процесс перехода материала в предельное состояние. Суть применения этих гипотез для оценки прочности материала заключается в замене фактического напряженного состояния равноопасным (эквивалентным) ему линейным напряженным состоянием. Равно-опасными называют такие напряженные состояния, у которых при пропорциональном увеличении напряжений одновременно наступает предельное состояние.

Приведение сложного напряженного состояния к равноопасному ему линейному осуществляется заменой главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ эквивалентным напряжением, которое надо создать в растянутом образце, чтобы получить напряженное состояние, равноопасное заданному. Прочность оценивают при помощи сравнения эквивалентных напряжений с предельными при растяжении (сжатии) или непосредственно с допускаемыми напряжениями.

Выбранную за основу гипотезу о преимущественном влиянии на прочность материала того или иного фактора часто называют теорией прочности.

**Теория наибольших нормальных напряжений** (первая теория прочности). Согласно этой теории преимущественное влияние на прочность оказывает величина наибольшего нормального напряжения. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступит тогда, когда наибольшее по абсолютной величине нормальное напряжение достигнет значения, соответствующего предельному состоянию данного материала при простом растяжении или сжатии.

Условие прочности можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{\max} \leq [\sigma], \tag{2.89}$$

где  $\sigma_{\max}$  – величина наибольшего по абсолютному значению главного напряжения для исследуемого напряженного состояния; [ $\sigma$ ] – допускаемое напряжение, принимаемое для одноосного растяжения или сжатия.

Для пластичных материалов рассматриваемая теория прочности опытами не подтверждается. Она дает удовлетворительные результаты лишь для весьма хрупких материалов (например, кирпич, камень и т. п.) при условии, что наибольшее нормальное напряжение – растягивающее.

Теория наибольших линейных деформаций (вторая теория прочности). Согласно этой теории основной причиной разрушения материала является наибольшая относительная линейная деформация. Предполагается, что нарушение прочности в общем случае напряженного состояния наступит тогда, когда наибольшая по абсолютной величине линейная деформация  $\varepsilon_{max}$  достигнет опасного значения, соответствующего предельному состоянию данного материала при растяжении или сжатии. Условие прочности в рассматриваемом случае записывается так:

$$\mathcal{E}_{\max} \leq [\mathcal{E}]. \tag{2.90}$$

Используя формулы (2.17) [13] обобщенного закона Гука, выразим условие прочности (2.90) в напряжениях. Так как из трех деформаций  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  наибольшей в алгебраическом смысле будет деформация  $\varepsilon_1$ , то

$$\varepsilon_{\max} = \varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu (\sigma_2 + \sigma_3)].$$

Имея в виду, что  $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$ , окончательно получим

$$\sigma_{_{\mathcal{H}\mathcal{G}}} = \sigma_{_{1}} - \mu (\sigma_{_{2}} + \sigma_{_{3}}) \leq [\sigma].$$
(2.91)

Из условия прочности (2.91) видно, что с допускаемым напряжением нужно сравнивать не какое-либо из главных напряжений, а их комбинацию, которая представляет собой некоторое напряжение, называемое эквивалентным, или приведенным.

**Вторая теория** учитывает влияние на прочность всех трех главных напряжений, однако опытами она подтверждается только для хрупких материалов (например, для легированного чугуна, высокопрочных сталей после низкого отпуска и т. д.).

**Теория наибольших касательных напряжений** (третья теория прочности). В качестве фактора, определяющего прочность материала, здесь принимается величина наибольшего касательного напряжения. Предполагается, что предельное состояние в общем случае напряженного состояния наступит тогда, когда наибольшее касательное напряжение  $\tau_{\rm max}$  достигнет опасного значения, соответствующего предельному состоянию данного материала при растяжении.

Условие прочности имеет вид

$$\tau_{\max} \leq [\tau]. \tag{2.92}$$

Поскольку, согласно (2.25),

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$$
$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{2},$$

то условие прочности (2.90) окончательно можно записать так:

$$\sigma_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}}} = \sigma_{_{1}} - \sigma_{_{3}} \leq [\sigma]. \tag{2.93}$$

Рассмотрим часто встречающийся на практике случай плоского напряженного состояния (рис. 2.49), для которого  $\sigma_{\alpha} = \sigma, \tau_{\alpha} = \tau, \sigma_{\beta} = 0$ . Тогда, на основании формулы (2.22)

$$\sigma_1 = \frac{\sigma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

a

$$\sigma_{_{31}} = \frac{\sigma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2},$$

и условие прочности (2.93) можно записать в следующем виде:

$$\sigma_{\rm sec} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le [\sigma]. \tag{2.94}$$

Третья теория прочности хорошо подтверждается экспериментальными данными для пластичных материалов. Недостатком ее является то, что она не учитывает величину главного напряжения  $\sigma_2$ , которое также оказывает некоторое влияние на прочность материала. Кроме того, третья теория прочности неприменима при расчете деталей из хрупких материалов.

Энергетическая теория формоизменения (четвертая теория прочности). В качестве критерия прочности в данном случае принимается количество удельной потенциальной энергии формоизменения, накопленной деформированным элементом. Согласно этой теории переход материала в предельное состояние в общем случае напряженного состояния произойдет тогда, когда величина



удельной потенциальной энергии формоизменения достигнет значения, соответствующего предельному состоянию данного материала при растяжении. Условие прочности имеет вид

$$u_{\phi} \leq [u_{\phi}],$$

где  $u_{\phi}$  – удельная потенциальная энергия формоизменения, определяемая выражением (2.28).

Выразив  $u_{\phi}$  и  $[u_{\phi}]$  через главные напряжения, окончательно получим

$$\sigma_{_{3KB}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ \left( \sigma_{_{1}} - \sigma_{_{2}} \right)^{2} + \left( \sigma_{_{2}} - \sigma_{_{3}} \right)^{2} + \left( \sigma_{_{3}} - \sigma_{_{1}} \right)^{2} \right]} \leq [\sigma].$$
(2.95)

Для частного случая плоского напряженного состояния, рассмотренного выше (см. рис. 2.49), условие (2.95) принимает вид

$$\sigma_{_{\scriptscriptstyle \mathsf{SKG}}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le [\sigma]. \tag{2.96}$$

Энергетическая теория прочности дает для пластичных материалов более точное, по сравнению с третьей теорией, совпадение теоретических расчетов с экспериментальными данными, благодаря чему она получила большое распространение. Для расчета деталей из хрупких материалов данная теория прочности неприменима.

**Теория прочности Мора (пятая теория прочности).** Согласно этой теории, единого критерия прочности, общего для всех видов напряженного состояния, не существует. В каждом случае прочность материала зависит от величины и знака наибольших  $\sigma_1$  и наименьших  $\sigma_3$  главных напряжений; напряжение  $\sigma_2$  на прочность материала влияет незначительно и им можно пренебречь. Условие прочности записывается в следующем виде:

$$\sigma_{\rm see} = \sigma_{\rm 1} - k\sigma_{\rm 3} \le [\sigma], \qquad (2.97)$$

где  $k = \frac{[\sigma_p]}{[\sigma_{cm}]}$  – коэффициент, учитывающий различную способность

материала сопротивляться растяжению и сжатию;  $[\sigma_p]$  и  $[\sigma_{cm}]$  – допускаемые напряжения соответственно на растяжение и сжатие.

Для пластичных материалов, у которых k = 1, теория прочности Мора дает результаты, совпадающие с третьей теорией. Эту теорию в настоящее время широко применяют при расчете на прочность деталей из хрупких материалов. Недостатком ее является то, что здесь не учитывается влияние на прочность главного напряжения  $\sigma_2$ .

Оценивая рассмотренные выше теории прочности, следует указать на то, что в практических расчетах используют в настоящее время для пластичных материалов третью или четвертую теории, а для хрупких материалов – теорию прочности Мора.

# 2.5.2 Косой изгиб

Под косым изгибом понимается такой случай плоского изгиба, при котором плоскость действия изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных плоскостей инерции бруса.

Наиболее удобным способом решения задач на косой изгиб является приведение его к двум прямым плоским изгибам. Для этого возникающий в поперечном сечении изгибающий момент раскладывают на два изгибающих момента, которые действуют в плоскостях, проходящих через главные оси инерции сечения. При косом изгибе в поперечных сечениях бруса возникают в общем случае как поперечные силы, так и изгибающие моменты. Однако влиянием касательных напряжений, появление которых обусловлено действием сил Q, в расчетах на прочность обычно пренебрегают. Рассмотрим балку, защемленную одним концом и нагруженную на другом силой F (рис. 2.50, а). Сила F лежит в плоскости торца балки и направлена под угломак главной оси Оу. Вычислим напряжения в некоторой точке С поперечного сечения, отстоящего на расстоянии x от свободного конца балки Для показанного на рисунке направления главных осей точка С имеет положительные координаты z и y. В указанном сечении изгибающие моменты, возникающие при изгибе бруса в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 2.50, б), соответственно

$$M_z = F_y x = Fx \cos \alpha; \quad M_y = F_z x = Fx \sin \alpha;$$

здесь  $F_{y}$  и  $F_{z}$  – вертикальная и горизонтальная составляющие силы F.

Индексы z и y при M обозначатся главные оси, относительно которых действуют изгибающие моменты. Эти моменты будем считать положительными, если они вызывают в точках первого квадранта растягивающие напряжения.

Исходя из принципа независимости действия сил, напряжение  $\sigma$  в точке С можно вычислить, рассматривая два плоских изгиба отдельно. Тогда

$$\sigma = \sigma' + \sigma'',$$

где  $\sigma'$  и  $\sigma''$  – нормальные напряжения, вызываемые действием соответственно только момента  $M_z$  и только момента  $M_y$ .

Поскольку

$$\sigma' = \frac{M_z}{J_z} y, \text{ a } \sigma'' = \frac{M_y}{J_y} z,$$



*Puc. 2.50* 

то

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_y}{J_y} z.$$
 (2.98)

Хотя формула (2.98) получена из рассмотрения частного случая косого изгиба балки, однако она является общей формулой для вычисления напряжений при косом изгибе. Следует только помнить, что изгибающие моменты и координаты точек, в которых определяют напряжения, необходимо подставлять в указанную формулу со своими знаками.

Уравнение нейтральной линии при косом изгибе в любом поперечном сечении получим из выражения (2.98), положив  $\sigma = 0$  и обозначив координаты точек этой линии  $y_0$  и  $z_0$ , Тогда

$$\frac{M_z}{J_z}y_0 + \frac{M_y}{J_y}z_0 = 0. (2.99)$$

Уравнение (2.99) показывает, что нейтральная линия всегда проходит через начало координат (центр тяжести О сечения). Преобразуем полученную зависимость

$$M_{z}\left(\frac{y_{0}}{J_{z}} + \frac{M_{y}}{M_{z}}\frac{z_{0}}{J_{y}}\right) = 0.$$
  
Tak kak  $M_{z} \neq 0$ , to
$$\frac{y_{0}}{J_{z}} + \frac{M_{y}}{M_{z}}\frac{z_{0}}{J_{y}} = 0$$
(2.100)

Здесь

$$\frac{M_{y}}{M_{z}} = \frac{Px\sin\alpha}{Px\cos\alpha} = tg\alpha.$$

Поделив обе части уравнения (2.90), [13] на *z*<sub>0</sub> и проведя небольшие преобразования, получим

$$\frac{y_0}{z_0} = -\frac{J_z}{J_y} tg\alpha$$

Отношение  $\frac{y_0}{z_0}$  представляет собой тангенс угла  $\beta$  наклона ней-

тральной линии к оси z. Поэтому окончательно имеем

$$tg\beta = -\frac{J_z}{J_y}tg\alpha. \qquad (2.101)$$

При  $J_z \neq J_y$  также  $\beta \neq \alpha$ , т. е. нейтральная линия неперпендикулярна к силовой линии, как это имело место для прямого изгиба. Если же  $J_z = J_y$  (круг, квадрат и др.), то

указанные линии взаимно перпендикулярны, но в этом случае косой изгиб вообще невозможен, поскольку любая центральная ось сечения является главной осью инерции.

Используя зависимость (2.101) для определения положения нейтральной линии, необходимо помнить, что углы α и β положительны,



Puc. 2.51

если отсчитываются следующим образом:  $\alpha$  по часовой стрелке от оси *y*, а  $\beta$  против часовой стрелки от оси *z*. На рис. 2.51, а показано положение нейтральной линии в опасном сечении балки, рассмотренной выше.

Прочность балки следует проверять в тех сечениях, где изгибающие моменты  $M_z$  и  $M_y$  достигают одновременно больших значений. Таких сечений может оказаться несколько.

Если положение опасного сечения известно, то в нем нужно отыскать наиболее нагруженные точки. Наглядное представление о распределении нормальных напряжений по поперечному сечению балки дают эпюры  $\sigma$ . Применительно к рассмотренной балке эти эпюры показаны на рис. 2.51, б. Очевидно, что наиболее напряженными будут точки A и В, наиболее удаленные от нейтральной линии, причем в точке A действует максимальное растягивающее напряжение, а в точке B – максимальное сжимающее напряжение, Для пластичных материалов обе точки одинаково опасны. В случае хрупкого материала более опасной будет точка A Условие прочности имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max} + \frac{M_y}{J_y} z_{\max} \le [\sigma] \qquad (2.102)$$

где у<sub>тах</sub> и *Z* тах – координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной линии.

Для сечений, имеющих две оси симметрии (например, прямоугольник, двутавр и др.) и выступающие углы, опасной будет одна из угловых точек, для которой условие прочности можно записать так:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z} + \frac{M_y}{W_y} \le [\sigma], \qquad (2.103)$$

где  $W_z$  и  $W_y$  – моменты сопротивления сечения относительно осей z и y.

Если изгибу в двух плоскостях подвергаются брусья круглого, квадратного и тому подобных сечений, для которых косой изгиб невозможен, то их рассчитывают на прочность по суммарному изгибающему моменту. Этот момент представляет собой геометрическую сумму изгибающих моментов, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях:

$$M_{H} = \sqrt{M_{z}^{2} + M_{y}^{2}} . \qquad (2.104)$$

Условие прочности аналогично условию (2.59).

Определяя величину прогиба в какой-либо точке балки, вначале вычисляют прогибы  $f_y$  и  $f_z$  в направлении главных осей, а затем их суммируют геометрически Таким образом, полный прогиб

$$f = \sqrt{f_z^2 + f_y^2} \,. \tag{2.105}$$

Нетрудно установить, что линия полного прогиба при косом изгибе составляет с осью у угол  $\beta$ , т. е. она всегда перпендикулярна направлению нейтральной линии.

## 2.5.3 Изгиб с растяжением (сжатием)

Изгиб с осевым растяжением (сжатием) прямого бруса. В общем случае на брус могут действовать как поперечные, так и продольные нагрузки (рис. 2.52, а). Такое нагружение приводит к появлению в поперечных сечениях изгибающих моментов  $M_z$  и  $M_y$ , поперечных сил  $Q_z$  и  $Q_y$ , а также продольной силы N (рис. 2.52, б). Здесь имеет место сочетание косого изгиба с осевым растяжением.

Продольная сила *N* изменит напряжения в каждой точке сечения на величину

$$\sigma_{N} = \frac{Nl}{A}, \qquad (2.106)$$

где А – площадь поперечного сечения.

Учитывая указанное обстоятельство, а также формулу (2.98), получаем следующее выражение для определения нормального напряжения в произвольной точке С сечения:



*Puc. 2.52* 

Изгибающие моменты, продольную силу, а также координаты точки, в которой определяют напряжения, необходимо подставлять в зависимость (2.107) со своими знаками. Так как напряженное состояние в опасной точке можно считать линейным (не учитывается влияние касательных напряжений), то условие прочности имеет следующий вид:

$$\sigma_{\max} \le [\sigma]. \tag{2.108}$$

Если сечение имеет две оси симметрии и выступающие углы, то опасной будет одна из угловых точек. Напряжение в этой точке определяется либо по формуле

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_{z}}{W_{z}} + \frac{M_{y}}{W_{y}}, \qquad (2.109)$$

либо по формуле (2.107). Знаки перед слагаемыми в правой части зависимости (2.109) устанавливают путем анализа распределения напряжений по поперечному сечению бруса (рис. 2.52, в).

Внецентренное растяжение (сжатие) прямого бруса. Внецентренное растяжение (сжатие) характеризуется наличием силы, линия действия которой параллельна оси бруса, но не совпадает с ней (рис. 2.53, а).

Координаты точки приложения силы F обозначим через  $z_p$  и  $y_p$ . Отметим, что направления координатных осей z и y всегда следует выбирать такими, чтобы  $z_p$  и  $y_p$  были положительными.

Применив метод сечений, найдем, что в любом поперечном сечении бруса действуют изгибающие моменты  $M_z = Py_p$  и  $M_y = Pz_p$ , а также продоль-



*Puc. 2.53* 

ная сила N = F (рис. 2.53, б). Нетрудно заметить, что здесь, как и в рассмотренном выше случае, имеет место совместное действие косого изгиба с осевым растяжением (сжатием). А потому формула для определения напряжения в произвольной точке сечения с координатами *z* и *y* будет аналогична (2.107), т. е.

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_z}{J_z} y + \frac{M_z}{J_y} z. \qquad (2.110)$$

Для сечения с двумя осями симметрии максимальные напряжения определяют по формуле (2.109).

Преобразуем выражение (2.110), подставляя вместо N,  $M_z$  и  $M_z$  их значения:

$$\sigma = \frac{F}{A} + \frac{Fy_p}{J_z} y + \frac{Fz_p}{J_y} z,$$

или

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{A}{J_z} y_p y + \frac{A}{J_y} z_p z \right)$$

Так как отношения  $\frac{J_z}{A}$  и  $\frac{J_y}{A}$  представляют собой квадраты радиусов инерции сечения относительно осей *z* и *y* соответственно, то, обозначив их через  $i_z^2$  и  $i_y^2$ , имеем

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} \right).$$
(2.111)

Распространяя полученную зависимость на случай действия сжимающей силы *F* представим формулу (2.111) в ее общем виде:

$$\sigma = \pm \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_p y}{i_z^2} + \frac{z_p z}{i_y^2} \right).$$
(2.112)

Подчеркнем еще раз, что знак перед правой частью уравнения (2.112) определяется характером действующей силы: при растяжении ставится знак плюс, при сжатии – минус. Координаты *у* и *z* произвольной точки подставляют со своими знаками.

Положение опасной точки сечения можно найти, построив вначале нейтральную линию. Уравнение нейтральной линии получим, положив в формуле (2.112)  $\sigma = 0$  и обозначив координаты точек на этой линии  $z_0$  и  $y_0$ . Тогда, учитывая, что  $\frac{F}{4} \neq 0$ , имеем

$$1 + \frac{y_0 y_p}{i_z^2} + \frac{z_0 z_p}{i_y^2} = 0.$$
 (2.113)

Из полученного уравнения следует, что нейтральная линия никогда не проходит через начало координат, отсекая на осях *z* и *y* отрезки, равные соответственно

$$a_{z} = -\frac{i_{z}^{2}}{z_{p}}; \quad a_{y} = -\frac{i_{y}^{2}}{y_{p}};$$
 (2.113')

Примерное положение нейтральной линии для рассмотренного случая внецентренного растяжения бруса показано на рис. 2.54. Из этого же рисунка видно, что в растянутой и сжатой зонах сечения находятся наиболее напряженные точки А и В(в точке А – максимальное растягивающее напряжение, в точке В – максимальное на-



Puc. 2.54

пряжение сжатия). Полезно запомнить, что точка с наибольшим по абсолютному значению напряжением всегда расположена в одном квадранте с точкой приложения силы *F*, а знак напряжения в этой точке соответствует характеру действующей силы. Условие прочности записывается так:

$$\sigma = \frac{F}{A} \left( 1 + \frac{z_p}{i_y^2} z_{\max} + \frac{y_p}{i_z^2} y_{\max} \right) \le [\sigma], \qquad (2.114)$$

Здесь  $z_{\text{max}}$  и  $y_{\text{max}}$  – координаты точки, наиболее удаленной от нейтральной линии.

# 2.5.4 Изгиб с кручением

В конструкциях различных механизмов очень часто встречаются детали, работающие на совместное действие изгиба и кручения. Характерным примером таких деталей являются валы самых разнообразных устройств.

Силы, которые передаются на вал механизма, в общем случае приводят к появлению в поперечных сечениях вала крутящего момента  $M_{\kappa p}$ =  $M_x$ , изгибающих моментов  $M_y$  и  $M_z$ :, а также поперечных сил  $Q_y$  и  $Q_z$ . Под действием указанных силовых факторов в сечениях возникают нормальные (от изгиба) и касательные (от изгиба и кручения) напряжения. Величиной касательных напряжений от

изгиба обычно пренебрегают, поскольку она незначительна по сравнению с величиной касательных напряжений от кручения. Поэтому рассматривают фактически сочетание кручения с чистым изгибом.

Рассмотрим вал круглого поперечного сечения (рис. 2.55, а). Используя принцип независимости действия сил, строим эпюры изгибающих моментов от нагрузок, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях (рис. 2.55, б и б), а также эпюру крутящих моментов (рис. 2.55, г). Сопоставляя полученные эпюры, находим, что опасными являются сечения 1-1 и 2-2.

В каждом сечении круглого вала имеет место прямой изгиб от действия результирующего изгибающего момента.



Puc. 2.55

a)

перечного сечения, - также нормалы е напряжения  $\sigma$  (в данном случае - растягивающие). Остальные грани от напряжений свободны. Таким образом, при изгибе с кручением элемент в опасной точке находится в плоском напряженном состоянии (рис. 2.57, в).

В

(рис. 2.57, а) выделим элементарный объем (рис. 2.57, б). По четырем его граням действуют касательные напряжения т, а по двум граням, параллельным плоскости по-

зультирующего изгибающего момента  $M_{\mu}$  и эпюра касательных напряжений τ от кручения. Исследуем напряженное состояние в одной из опасных точек сечения (например, в точке А). В окрестности точки А

На рис. 2.56 показаны суммарная эпюра нормальных напряжений  $\sigma$  от действия ре-

формулой (2.101) и имея в виду, что для 🦉 круглого сечения  $J_z = J_y$ , получим  $\beta = -\alpha$ , где  $tg\alpha = \frac{M_y}{M_z}$ 

Положение нейтральной линии в данном

случае найти нетрудно. Воспользовавшись

вала (например, в сечении 1-1). Такими точками, очевидно, являются

чиной крутящего момента соотношением τ

(2.115)

$$T_{\max} = \frac{M_{\kappa p}}{W_{p}} = \frac{M_{\kappa p}}{2W}.$$
 (2.116)

В формулах (2.115) и (2.116) W – осевой момент сопротивления сечения вала.

 $M_{_{H}} = \sqrt{M_{_{y}}^{^{2}} + M_{_{z}}^{^{2}}} .$ 

Нормальные напряжения от этого момента достигают наибольших

 $\sigma = \frac{M_{H}}{M_{y}} = \frac{\sqrt{M_{y}^{2} + M_{z}^{2}}}{\sqrt{M_{y}^{2} + M_{z}^{2}}}$ 

значений в крайних волокнах вала и определяются по формуле

Найдем наиболее напряженные точки в одном из опасных сечений точки А и В, наиболее удаленные от нейтральной линии (рис. 2.56).



Puc. 2.57

в)

Для определения величин главных напряжений применяют зависимость (2.25), а прочность вала в опасном сечении проверяют по формулам приемлемых теорий прочности.

Воспользуемся, например, условием прочности (2.96), исходя из третьей теории:

$$\sigma_{\rm SKG} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq [\sigma].$$

Подставив в это условие выражения (2.115) и (2.116) для напряжений и т, получим

$$\sigma_{\scriptscriptstyle \mathsf{JKB}} = \frac{M_{\scriptscriptstyle H}^2 + M_{\scriptscriptstyle \mathsf{KP}}^2}{W} \leq [\sigma]. \qquad (2.117)$$

Если исходить из четвертой теории прочности, то согласно условию (2.96)

$$\sigma_{\rm SKG} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq [\sigma].$$

Осуществив подстановки, аналогичные предыдущим, имеем

$$\sigma_{_{3K6}} = \frac{\sqrt{M_{_{H}}^{2} + 0.75M_{_{Kp}}^{2}}}{W} \le [\sigma]. \qquad (2.118)$$

Условия прочности (2.117) и (2.118) можно заменить одной формулой

$$\sigma_{_{\scriptscriptstyle 3KG}} = \frac{M_{_{\scriptscriptstyle 3KG}}}{W} \le [\sigma], \qquad (2.119)$$

где  $M_{3K}$  – эквивалентный (приведенный) момент.

Для третьей теории прочности

$$M_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}}} = \sqrt{M_{_{H}}^{^{2}} + M_{_{\mathcal{K}p}}^{^{2}}};$$

для четвертой теории прочности

$$M_{_{^{3}\!K\!B}} = \sqrt{M_{_{H}}^{^{2}} + 0.75M_{_{K\!p}}^{^{2}}}$$

Заметим, что все приведенные формулы применимы и для расчета валов кольцевого сечения.

При проверочных расчетах, когда диаметр вала известен, коэффициент запаса прочности

$$n = \frac{\sigma_T}{\sigma_{_{\mathcal{F}\mathcal{G}}}},\tag{2.120}$$

где  $\sigma_{\tau}$  – предел текучести.

По третьей теории прочности значение  $\sigma_{_{\scriptscriptstyle 3K\!6}}$  определяется выражением (2.94). Для этого случая

$$n = \frac{\sigma_{\tau}}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} + \frac{\tau^2}{(0, 5\sigma_T)^2}}}.$$

В соответствии с третьей теорией  $\tau_T = 0.5\sigma_T$ , поэтому

$$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_T^2} + \frac{\tau^2}{\tau_T^2}}}.$$
(2.121)

Формула (2.121) после преобразований принимает вид

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}},\tag{2.122}$$

где  $n_{\sigma} = \frac{\sigma_{T}}{\sigma}$  – коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям;  $n_{\sigma} = \frac{\tau_{T}}{\tau}$  – коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям.

Следует отметить, что зависимости (2.121) и (2.122) остаются в силе и для четвертой теории прочности, только здесь  $\tau_r \approx 0.58\sigma_r$ .

### 2.6 Местные напряжения

### 2.6.1 Видимые местные напряжения

Изложенные выше методы расчетов на прочность для различных видов деформаций предполагают определенную схематизацию элементов конструкций и внешней нагрузки. Так, внешняя нагрузка переносится на ось бруса и прикладывается к ней в виде сил и пар. Полученная таким образом нагрузка на ось может, очевидно, соответствовать действительным способам приложения внешних сил к поверхности бруса. Однако распределение напряжений внутри бруса в том и другом случаях будет не везде одинаковым.

При решении практических задач указанной схематизацией пользуются весьма широко. Известные нам расчетные зависимости позволяют достаточно точно определять основные напряжения в брусе и дают погрешности только в тех областях бруса, которые непосредственно прилегают к месту приложения нагрузок Дополнительные напряжения, накладывающиеся на основные в отмеченных областях, носят название местных напряжений.

Резкое изменение размеров сечения, ослабления его всякого рода отверстиями и выточками также приводят к довольно значительным ме-

стным отклонениям от общего закона распределения напряжений. Это явление носит общее название концентрации напряжений, а причина, вызвавшая его (отверстие, выточка и т. д.), – концентратора напряжений.

Заметим, что концентрация напряжений возможна и в брусе постоянного сечения, если последнее имеет входящие углы, вырезы или малые внутренние полости.

Концентрация напряжений может существенно влиять на общую прочность бруса в случае действия динамической нагрузки. При статической нагрузке и пластичном материале ее можно в расчетах не учитывать, ограничиваясь определением основных напряжений.

# 2.6.2 Концентрация напряжений

Напряжения в местах их концентрации определяют либо теоретическими, либо экспериментальными методами. Поскольку аналитическое решение указанной задачи довольно сложно, приведем лишь основные результаты исследований применительно к каждому из основных видов деформаций.

Предварительно остановимся на некоторых понятиях и определениях, встречающихся при расчетах на прочность с учетом концентрации напряжений.

Номинальным называют такое напряжение, которое определяется по общим формулам сопротивления материалов в предположении, что концентрация напряжений отсутствует. При этом в некоторых случаях не учитываются ослабления поперечного сечения, вызванные наличием небольших отверстий, выточек и др., т. е. имеется в виду полная площадь (брутто) поперечного сечения.

Количественной характеристикой концентрации напряжений является коэффициент концентрации. Различают теоретический и эффективный коэффициенты концентрации. Первый зависит только от вида концентратора и его размеров, а второй – дополнительно и от свойств материала.

Теоретический коэффициент концентрации напряжений  $\alpha_K$  равен отношению максимального местного напряжения  $\sigma_{\max}$  к номинальному напряжению  $\sigma_U$ , т. е.

$$\alpha_{K} = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{H}} \,. \tag{2.123}$$

Эффективный коэффициент концентрации напряжений определяют опытным путем как отношение предела прочности  $\sigma_{\rm B}$  детали без кон-

центрации к пределу прочности  $\sigma_{B.K}$  детали, имеющей тот или иной концентратор напряжений:

$$K_{s} = \frac{\sigma_{B}}{\sigma_{B.K}}.$$
(2.124)

Подробные данные о коэффициентах  $\alpha_K$  и  $K_s$  приведены в справочниках.

1. Концентрация напряжений при растяжении (сжатии). На рис. 2.58, а показана эпюра нормальных растягивающих напряжений в сечении широкой полосы, ослабленном круглым отверстием, а на рис 2.58, б, в сечении, ослабленном полу-

круглыми выкружками.

Величина номинального напряжения вычисляется здесь как среднее напряжение в ослабленном сечении полосы по формуле (2.2):

$$\sigma_{H}=\frac{N}{A_{\min}},$$

где  $A_{\min}$  – площадь ослабленного сечения. При малых размерах концентратора можно принимать  $A_{\min} \approx A$ .



Для случаев, приведенных на рис. 2.58, а, б,  $\alpha_K = 3$  и  $\alpha_K = 2$  соответственно, если предположить весьма малые радиусы отверстия и выкружки. При этом чем меньше радиус, тем в большей степени максимальные напряжения отличаются от номинальных.

Чтобы уменьшить влияние концентрации напряжений на прочность элементов конструкций, следует по возможности избегать глубоких выточек, выкружек, резких переходов сечений и т. п. Необходимо также стремиться к тщательной обработке поверхностей деталей, особенно изготовленных из высокопрочных закаленных сталей.

2. Концентрация напряжений при изгибе. В местах резкого изменения формы или размеров поперечных сечений балки наблюдается концентрация напряжений. На рис. 2.59 приведены эпюры нормальных напряжений, возникающих в балке при отсутствии концентрации напряжений (рис. 2.59, а) и при наличии концентрации (рис. 2.59, б). В последнем случае вследствие резкого изменения сечения в его крайних волокнах действуют максимальные напряжения

$$\sigma_{\max} = \alpha_{K} \sigma_{H}$$
, где  $\sigma_{H} = \frac{M_{z}}{W_{z}} = \frac{Fl}{W_{z}}$ .

Величина теоретического коэффициента концентрации напряжений в данном случае зависит от соотношения диаметров d и D сопрягаемых участков балки, а также от радиуса закругления в месте сопряжения этих участков.

Для определения величины эффективного коэффициента концентрации проводят испытания на изгиб специальных образцов. Установив значения временного сопротивления материала образца без концентрации напряжений ( $\sigma_{B.H}$ ) и с концентрацией ( $\sigma_{B.H.K}$ ), находят  $K_s$ :



$$K_{s} = \frac{\sigma_{B.M}}{\sigma_{B.M.K}}$$

Чтобы уменьшить концентрацию напряжений в деталях, испытывающих деформацию изгиба, необходимо предусматривать плавные переходы от одного размера сечения к другому, закругления в углах, уменьшение жесткости более массивной части детали в месте перехода и т. п. Все это приводит к заметному снижению коэффициента концентрации и, следовательно, благоприятно сказывается на прочности деталей.

3. Концентрация напряжений при кручении. Местное увеличение напряжений при кручении вызывается резким изменением контура поперечного или продольного сечения вала (наличием отверстия, резьбы, выточки, канавки и т. д.) Как при растяжении или изгибе, величина максимального касательного напряжения в зоне концентрации определяет-

ся произведением номинального напряжения  $\tau_{H}$  на коэффициент  $\alpha_{K}$ , т. е.

$$\tau_{\max} = \alpha_{\kappa} \tau_{H}$$

Значение  $\tau_{H}$  вычисляют для наименьшего сечения по обычным формулам сопротивления материалов. Например, при расчете круглых валов используется зависимость (2.86):

$$au_{_{H}}=rac{M_{_{KP}}}{W_{_{P}}}.$$



Большой практический интерес при кручении круглых валов представляет концентрация напряжений у

продольных пазов, предназначенных для помещения шпонок. Если

шпоночный паз имеет прямоугольное сечение (рис. 2.60, а), то в выступающих углах *m* касательные напряжения равны нулю, а во входящих углах  $\eta$  напряжения теоретически бесконечно велики (практически же их величина ограничена пределом текучести). Как показали исследования, коэффициент концентрации напряжений для паза при заданных глубине его и размерах вала зависит главным образом от кривизны поверхности по дну паза. Поэтому углы *n* необходимо скруглять, причем с увеличением радиуса скругления концентрация напряжений будет уменьшаться. Так, с увеличением радиуса от 0,1 до 0,5 глубины паза коэффициент  $\alpha_{\kappa}$  снижается более чем в 2 раза.

Если вал имеет поперечную кольцевую выточку полукруглого сечения с очень малым радиусом (рис. 2.60, б), то касательное напряжение в глубине выточки вдвое больше, чем на поверхности вала без выточки.

На практике часто применяют цилиндрические валы с различными диаметрами на разных участках, причем участки сопрягаются кольцевыми выкружками (рис. 2.61, а). При кручении таких валов в начале закругления имеет место высокая концентрация напряжений (эпюра касательных напряжений в зоне концентрации показана на рис. 2.61, б). Для случая, когда  $\frac{D}{d} = 2$  и  $\frac{2\rho}{d} = 0,04$ , величина теоретического коэффициента концентрации  $\alpha_{\kappa} = 2,4$  (здесь  $\rho$  – радиус закругления). Чтобы уменьшить концентрацию напряжений, следует избегать резких изменений контура сечения, применяя в местах ступенчатого изменения диаметра вала переходные кривые возможно большего радиуса. Влияние концентрации напряжений на прочность деталей машин, испытывающих деформацию растяжения (сжатия), изгиба или кручения, проявляется примерно одинаково. Опыты показывают, что для пластичных

материалов концентрация напряжений при статических нагрузках не представляет опасности, поскольку за счет текучести в зоне концентрации происходит перераспределение (выравнивание) напряжений. Величина эффективного коэффициента концентрации  $K_s$  в этом случае близка к единице.

Хрупкие материалы, напротив, весьма чувствительны к концентрации напряжений. Например, разрушение при кручении ступенчатого вала, изготовленного из закаленной стали, может произойти и при статической на-



грузке, так как вследствие концентрации напряжений в местах перехода

двух смежных диаметров возможно появление трещин. Поэтому в расчетах на статическую прочность деталей из хрупких и малопластичных материалов учитывать концентрацию напряжений необходимо, причем для таких материалов эффективный коэффициент концентрации весьма близок по своему значению к теоретическому.

В случае динамических нагрузок концентрация напряжений существенно снижает прочность деталей как из хрупких, так и пластичных материалов, что необходимо учитывать в практических расчетах.

# 2.6.3 Контактные напряжения

Местные напряжения, возникающие при взаимном нажатии двух соприкасающихся тел, называют контактными напряжениями. Вследствие деформации материала в месте соприкосновения возникает площадка контакта, по которой и происходит передача давления. Материал вблизи такой площадки, не имея возможности свободно деформироваться, испытывает объемное напряженное состояние.

Контактные напряжения играют основную роль при расчете шариковых и роликовых подшипников, зубчатых колес, элементов кулачковых механизмов и т. д. Эти напряжения определяют методами теории упругости при следующих допущениях: а) в зоне контакта возникают только упругие деформации, следующие закону Гука; б) линейные размеры площадки контакта малы по сравнению с радиусами кривизны соприкасающихся поверхностей; в) силы давления, распределенные по поверхности контакта, нормальны к этим поверхностям; г) на поверхности контакта возникают только нормальные напряжения.

При этих допущениях нормальные напряжения по площадке контакта распределяются по закону поверхности эллипсоида, площадка контакта имеет в общем случае форму эллипса, а максимальное напряжение действует в центре площадки контакта.

Приведем без вывода расчетные формулы для некоторых частных случаев контактной задачи в предположении, что коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ . Отметим, что для практических расчетов указанные формулы пригодны и при других значениях  $\mu$ .



Puc. 2.62

1. Сжатие шаров. В случае взаимного сжатия силами Pдвух упругих шаров радиусов  $R_1$  и  $R_2$  (рис. 2.62) образуется круглая площадка контакта, радиус которой

$$a = 0,88_{3} \sqrt{F \frac{R_{1}R_{2}(E_{1} + E_{2})}{E_{1}E_{2}(R_{1} + R_{2})}},$$
(2.125)

где  $E_1$  и  $E_2$  – модули упругости материалов шаров.

Максимальное нормальное напряжение в центре площадки контакта

$$\sigma_{\text{max}} = 0,388_{3}\sqrt{4F \frac{E_{1}^{2}E_{2}^{2}}{(E_{1}+E_{2})^{2}} \frac{(R_{1}+R_{2})^{2}}{R_{1}^{2}R_{2}^{2}}}.$$
 (2.126)

Наиболее напряженная точка находится в центре площадки контакта, где материал испытывает напряженное состояние, близкое к равномерному сжатию (главные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_2 \approx -0.8\sigma_{max}$  и  $\sigma_3 = -\sigma_{max}$ ). Опасная же точка расположена на линии действия сил *F* на глубине, примерно равной половине радиуса площадки контакта. Главные напряжения в этой точке

$$\sigma_{1} = \sigma_{2} = -0.8\sigma_{\max};$$

$$\sigma_{3} = -0.8\sigma_{\max}.$$
(2.127)

Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0.31 \sigma_{\max} \,. \tag{2.128}$$

 $R_{i}$ 

Формула (2.126) справедлива и в случае давления шара на вогнутую сферическую поверхность радиуса  $R_2$  (рис. 2.63, а). Изменив в указанной формуле знак при  $R_2$  на обратный, имеем

$$\sigma_{\text{max}} = 0,388_{3}\sqrt{4F \frac{E_{1}^{2}E_{2}^{2}}{(E_{1}+E_{2})^{2}} \frac{(R_{1}+R_{2})^{2}}{R_{1}^{2}R_{2}^{2}}}.$$
 (2.129)

При взаимном давлении шара и плоскости (рис. 2.63, б), полагая  $R_2 = \infty$ , получим

$$\sigma_{\max} = 0.388_{3} \sqrt{4F \frac{E_{1}^{2}E_{2}^{2}}{R_{1}^{2}(E_{1}+E_{2})^{2}}}.$$
 (2.130) *Puc. 2.63*

2. Сжатие цилиндров. Два цилиндра, соприкасающиеся по образующей (рис. 2.64), испытывают взаимное давление по всей длине линии контакта. При равномерно распределенной нагрузке *q* площадка касания имеет вид узкого прямоугольника, ширина которого

$$b = 2,15 \sqrt{q \, \frac{R_1 R_2 (E_1 + E_2)}{E_1^2 E_2^2 (R_1 + R_2)}}.$$
 (2.131)

Максимальное напряжение сжатия действует в точках оси площадки контакта:

$$\sigma_{\max} = 0.418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{(E_1 + E_2)} \frac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}.$$
 (2.132)

В опасной точке, расположенной на глубине, равной 0,4*b*, главные напряжения имеют значения



Puc. 2.64

 $\sigma_1 = -0,108\sigma_{\text{max}}; \quad \sigma_2 = -0,288\sigma_{\text{max}}; \quad \sigma_3 = -0,780\sigma_{\text{max}}; \quad (2.133)$ Наибольшее касательное напряжение в опасной точке

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0.3\sigma_{\max}. \qquad (2.134)$$

В случае давления цилиндра на деталь с вогнутой цилиндрической поверхностью значение  $\sigma_{\text{max}}$  определяют по формуле (2.132), предварительно изменив в ней знак при  $R_2$  на обратный. Подставив в формулу (2.132) величину  $R_2 = \infty$ , получим выражение для  $\sigma_{\text{max}}$  в случае взаимного давления цилиндра и детали с плоской поверхностью.

На основании формул для определения  $\sigma_{max}$  нетрудно установить, что контактные напряжения не являются линейной функцией нагрузки, с ростом сил они возрастают все медленнее. Это объясняется тем, что с увеличением нагрузки увеличивается и площадка контакта. Здесь следует обратить внимание на следующее обстоятельство: если размеры площадки контакта окажутся сопоставимыми с величиной радиусов кривизны соприкасающихся поверхностей, то приведенные выше расчетные зависимости применять нельзя.

Аналогичная картина имеет место при определении контактных напряжений между поверхностью тела болта или заклепки и цилиндрической поверхностью отверстия. Местные напряжения в этом случае обычно называют напряжениями смятия и считают, что по площадке контакта (смятия) они распределены равномерно. Такой же закон распределения напряжений по площади контакта принимают и в том случае, если тела до соприкосновения имели плоские поверхности. Учитывая указанное допущение, имеем следующую формулу для определения напряжения смятия:

$$\sigma_{\rm CM} = \frac{F}{A_{\rm CM}}, \qquad (2.135)$$

где  $A_{cm}$  – площадь смятия.

В расчетах на прочность допускаемые напряжения на смятие принимают (на основании опытных данных) в 2-2,5 раза больше допускаемых напряжений на обычное сжатие, т. е.

$$[\sigma_{cm}] = (2 \div 2,5)[\sigma_{cm}]$$

Проверку прочности при контактных напряжениях следует производить по формулам третьей или четвертой теорий прочности.

# 2.7 Прочность материалов при переменном напряжении

# 2.7.1 Основные понятия об усталостной прочности

Выше были рассмотрены основные вопросы, связанные с расчетом на прочность упругих элементов конструкций, испытывающих действие статических нагрузок. При этом всегда считалось, что прочность элементов будет обеспечена, если максимальные напряжения в их опасных сечениях не превышают предельных значений.

Однако, как установлено практикой, в случае действия на элементы конструкций нагрузок, периодически изменяющихся во времени по величине или по величине и направлению, разрушение материала происходит при напряжениях, значительно меньших предельных значений. С подобными действиями нагрузок приходится встречаться, как правило, при расчетах движущихся элементов машин и механизмов: коленчатых и торсионных валов, клапанных пружин, кривошипно-шатунных механизмов и др.

Нагрузки, вызывающие появление в поперечных сечениях периодически изменяющихся напряжений, называют циклическими нагрузками. Совокупность всех значений напряжений за время одного периода их изменения носит название цикла напряжений. Частота изменения напряжений характеризуется числом циклов в единицу времени, а продолжительность цикла во времени определяет период цикла.

Характер разрушения материала от воздействия на него циклических нагрузок существенно отличается от характера разрушения при статических нагрузках. Разрушение начинается обычно с образования микротрещин, которые прогрессивно развиваются вглубь материала, уменьшая тем самым площадь поперечного сечения детали. Разрушение всегда происходит внезапно, после того как площадь сечения сократится настолько, что не может выдержать заданной нагрузки. На поверхности излома всегда можно видеть две характерные зоны: зону постепенного разрушения от развития трещин (с гладкой поверхностью) и зону внезапного разрушения (имеющую вид крупнозернистого хрупкого излома). Явление разрушения материала от действия переменных напряжений называют усталостью материала. Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений без разрушения носит название выносливости, или циклической прочности.

Максимальные переменные напряжения, при которых материал способен сопротивляться, не разрушаясь, при любом произвольно большом числе циклов нагружения, называют пределом выносливости.

Законы изменения переменных напряжений могут быть самыми разнообразными, но наибольший интерес представляет случай изменения их во времени по синусоидальному закону.

Основными параметрами цикла (рис. 2.65) являются:

наибольшее  $\sigma_{\max}$  и наименьшее  $\sigma_{\min}$  (в алгебраическом смысле) напряжения цикла;

среднее напряжение

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}; \qquad (2.136)$$

амплитуда цикла

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}; \qquad (2.137)$$

коэффициент асимметрии цикла

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}.$$
 (2.138)

Из приведенных выражений следует, что

$$\sigma_{m} + \sigma_{a} = \sigma_{\max}; \quad \sigma_{m} - \sigma_{a} = \sigma_{\min}.$$

Если  $\sigma_{\text{max}} = \sigma$  и  $\sigma_{\text{min}} = -\sigma$ , то имеем симметричный цикл напряжений (рис. 9,1, б), для которого

$$\sigma_m = 0; \quad \sigma_a = \sigma; \quad r = -1.$$

Цикл напряжений, показанный на рис. 2.65, в, называют пульсирующим (или отнулевым) циклом. Для него

$$\sigma_{\min} = 0; \quad \sigma_{\max} = \sigma; \quad \sigma_m = \sigma_a = \frac{\sigma}{2}; \quad r = 0.$$

Постоянное статическое напряжение (рис. 2.65, г) можно рассматривать как частный случай переменного цикла с параметрами

$$\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma; \quad \sigma_m = \sigma; \quad \sigma_a = 0; \quad r = +1.$$

В отличие от симметричного, все другие знакопеременные циклы называются несимметричными (или асимметричными). На рис. 2.65, а показан несимметричный цикл напряжений.

Из рассмотренных циклов напряжений наиболее опасным является симметричный цикл, поскольку именно для него предел выносливости имеет минимальное значение.



В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные выше термины и соотношения с заменой  $\sigma$  на  $\tau$ .

# 2.7.2 Предел выносливости при симметричном цикле. Диаграмма пределов выносливости



Puc. 2.66

Величину предела выносливости при симметричном цикле определяют на основании опытных данных. Для этого изготовляют серию одинаковых образцов, каждый из которых подвергают действию переменных напряжений. Целью испытаний является определение числа циклов N, при котором разрушается каждый образец. Кривую, построенную по экспериментальным данным в координатах ( $\sigma_{max}$ , N), называют кривой выносливости (рис. 2.66).

Для большинства металлов характерной особенностью кривой выносливости является наличие горизонтальной асимптоты. Последняя является следствием того, что при некотором значении наибольшего напряжения цикла образец может выдержать теоретически бесконечно большое число циклов нагружения. Это напряжение, как отмечалось, носит название предела выносливости и обозначается в общем случае  $\sigma_r$ , где r – коэффициент асимметрии цикла. При симметричном цикле r = -1, а потому  $\sigma_r = \sigma_{-1}$ .

Для черных металлов за предел выносливости принимают то предельное значение наибольшего напряжения, при котором не происходит разрушения после прохождения  $10^7$  циклов. Это число циклов называют базовым и обозначают  $N_0$ . Для цветных металлов и закаленных сталей  $N_0=10^8$  циклов.

Число циклов, выдерживаемых образцом до разрушения при напряжениях, превышающих предел выносливости, определяет его долговечность.

Многочисленными опытами установлено, что между пределами выносливости при изгибе ( $\sigma_{-1}$ ), кручении ( $\tau_{-1}$ ) и растяжении-сжатии ( $\sigma_{-1p}$ ) в случае симметричных циклов имеют место для некоторых материалов определенные соотношения Примерные их значения следующие: при растяжении-сжатии  $\sigma_{-1p} = 0,7\sigma_{-1}$  (для сталей) и  $\sigma_{-1p} = 0,65\sigma_{-1}$ (для чугуна); при кручении  $\tau_{-1} = 0,55\sigma_{-1}$  (для сталей и легких сплавов) и  $\tau_{-1} = 0,8\sigma_{-1}$  (для чугуна).

Зная величину временного сопротивления  $\sigma_{_B}$ , можно найти приближенные значения предела выносливости  $\sigma_{_{-1}}$  по следующим эмпирическим соотношениям: для углеродистой стали  $\sigma_{_{-1}} = (0,4 \div 0,45)\sigma_{_B}$ ; для легированной стали  $\sigma_{_{-1}} = 0,35\sigma_{_B} + (7-12) \text{ даH/мм}^2$ ; для чугуна  $\sigma_{_{-1}} = 0,4\sigma_{_B}$ ; для цветных металлов  $\sigma_{_{-1}} = (0,24 \div 0,5)\sigma_{_B}$ .

У большинства металлов предел выносливости при симметричном цикле ниже предела упругости; только для мягкого железа и красной меди он оказывается выше.

Диаграмма предельных напряжений. Для полной характеристики усталостной прочности материала необходимо иметь данные о его пределах выносливости при различных циклах напряжений. Экспериментальные исследования показывают, что значительное

влияние на величину предела выносливости оказывает асимметрия цикла. Наименьшее значение предел выносливости имеет при симметричном цикле напряжений и наибольшее – при постоянном. В последнем случае величина предела выносливости равна пределу прочности.

Циклы напряжений, у которых наибольшее напряжение равно пределу выносливости, называют предельными. Чтобы дать характеристику усталостной прочности материала, определяют опытным путем наибольшие напряжения различных

предельных циклов, на основании которых строят диаграмму предельных напряжений. Одна из таких диаграмм, построенная в координатах ( $\sigma_m, \sigma_a$ ), показана на рис. 2.67.



Каждая точка кривой ABC диаграммы характеризует определенный цикл. Точка A соответствует пределу выносливости при симметричном цикле, для которого  $\sigma_m = 0$ , точка C – пределу прочности при постоянном напряжении (здесь  $\sigma_a = 0$ ), а точка B – пределу выносливости при пульсирующем цикле, поскольку при таком цикле  $\sigma_a = \sigma_m$ .

Площадь диаграммы, ограниченная кривой ABC и осями координат, определяет область безопасных (в отношении усталостных разрушений) циклов напряжений.

Отметим некоторые особенности приведенной диаграммы.

1. Луч OB, характеризующий пульсирующий цикл, является границей областей знакопеременных и знакопостоянных циклов. Так как для знакопеременных циклов  $\sigma_a > \sigma_m$ , то область этих циклов расположена выше луча OB. Для знакопостоянных циклов  $\sigma_a < \sigma_m$ , а потому их область находится ниже луча OB.

2. Произвольный луч ON является геометрическим местом точек, характеризующих циклы с одинаковыми коэффициентами асимметрии. Такие циклы называют подобными. Для подобных циклов

$$tg\varphi = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = const$$

Воспользовавшись выражениями (2.136) и (2.137), а также учитывая соотношение (2.138), найдем, что

$$tg\varphi = \frac{1-r}{1+r}.$$
(2.139)

Имея диаграмму предельных циклов для того или иного материала, построенную по экспериментальным данным, всегда можно определить степень опасности рассматриваемого цикла напряжений в отношении усталостной прочности. Вначале по формуле (2.139) находят угол  $\varphi$ , а затем под этим углом проводят луч до пересечения с кривой ABC. Сумма координат точки пересечения равна величине<sup> $\sigma_r$ </sup>. Совершенно очевидно, что если точка M, характеризующая заданный цикл, расположена внутри области OABC, то циклическая прочность материала будет обеспечена.

Для пластичных материалов предельное напряжение цикла не должно превышать предела текучести, т. е.  $\sigma_a + \sigma_m \leq \sigma_T$ .

Если на горизонтальной оси диаграммы взять точку D, абсцисса которой равна  $\sigma_T$ , и провести под углом 45° прямую DE, то эта прямая разделит поле диаграммы на две области: 1) область AKDO безопасных циклов, при которых нет как усталостного разрушения материала, так и недопустимых пластических деформаций; 2) область CKD циклов, безопасных в отношении усталостного разрушения, но опасных в отношении появления пластических деформаций.

Для пластичных материалов диаграмма предельных напряжений должна ограничиваться областью AKDO.

# 2.7.3 Факторы, влияющие на величину предела выносливости

На выносливость элементов конструкций, находящихся в реальных условиях эксплуатации, влияет ряд факторов, которые при обычном статическом расчете не играют существенной роли. В частности, предел выносливости зависит не только от свойств материала, из которого изготовлены указанные элементы, но и от их формы, размеров, способа изготовления и условий работы.

Влияние концентрации напряжений. В местах резкого изменения поперечных размеров детали, у отверстий, надрезов, выточек и т. п. возникает, как известно, местное повышение напряжений, снижающее предел выносливости по сравнению с таковым для гладких цилиндрических образцов. Это снижение учитывается эффективным коэффициентом концентрации напряжений  $K_{\sigma}$  (или  $K_{\tau}$ ), который определяется экспериментальным путем. Указанный коэффициент представляет собой отношение предела выносливости  $\sigma_{-1}$  гладкого образца при сим-

метричном цикле к пределу выносливости  $\sigma_{-1\kappa}$  образца тех же размеров, но имеющего тот или иной концентратор напряжений, т. е.

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1K}}.$$
 (2.140)

Зависимость между теоретическим и эффективным коэффициентами концентрации напряжений определяется следующим выражением:

$$K_{\sigma} = 1 + q_{\sigma}(\alpha_{\sigma} - 1), \qquad (2.150)$$

где  $q_{\sigma}$  – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений.

На рис. 2.68 приведен график приближенных значений  $q_{\sigma}$  для стали различных марок в зависимости от коэффициента  $\alpha_{\sigma}$  и предела прочности  $\sigma_{B}$  материала. Как видно из графика, чем выше прочность стали, тем выше ее чувствительность к концентрации напряжений Поэтому применение высокопрочных сталей для изготовления деталей, работающих в условиях переменных напряжений, не всегда оказывается целесообразным.





Следует отметить, что все рассуждения, относящиеся к нормальным напряжениям, сохраняют свою силу и для касательных напряжений. Только в соответствующих математических выражениях обозначение  $\sigma$  необходимо изменить на  $\tau$ .

Значения эффективных коэффициентов концентрации  $K_{\sigma}$  и  $K_{\tau}$  приводятся в справочниках.

Влияние размеров деталей. Экспериментально установлено, что с увеличением размеров испытуемого образца предел выносливости его понижается. Это объясняется тем, что, во-первых, на образцах больших размеров более вероятны дефекты материала, а во-вторых, при изготовлении малых образцов имеет место упрочнение (наклеп) поверхностного слоя на относительно большую глубину, чем у образцов больших размеров.

Влияние размеров деталей на величину предела выносливости учитывается коэффициентом  $\varepsilon$ , представляющим собой отношение предела выносливости детали заданных размеров (диаметром *d*) к пределу выносливости лабораторного образца подобной конфигурации, имеющего малые размеры ( $d_0 = 7 \div 10$ мм) Это отношение называют коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения или масштабным фактором. Применительно к нормальным напряжениям

$$\varepsilon_{\sigma} = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}.$$
(2.142)

Масштабные коэффициенты можно определять и на образцах с концентрацией напряжений.

На рис. 2.69 приведена графическая зависимость между диаметром d детали и коэффициентом  $\varepsilon_{\sigma}$  (шкала d – логарифмическая).



Кривая 1 соответствует детали из углеродистой стали без концентрации напряжений, кривая 2 – то же, но с умеренной концентрацией. При расчете деталей из легированной стали пользуются кривыми 2 и 3 (соответственно при отсутствии и наличии концентрации напряжений). Если деталь имеет большую концентрацию напряжений (типа нарезки), то зависимость  $\varepsilon_{\sigma} = f(d)$  для любой стали изображается кривой 4.

Вследствие недостаточного количества экспериментальных данных о коэффициентах  $\varepsilon_{\tau}$  (при кручении) приближенно принимают  $\varepsilon_{\tau} \approx \varepsilon_{\sigma}$ 

Влияние состояния поверхности. Состояние поверхности деталей зависит от качества механической обработки. Так как разрушение материала от периодически изменяющихся нагрузок начинается с образования на поверхности микроскопических трещин, то очевидно, что их образованию способствует наличие на поверхности острых рисок и царапин. Последнее приводит, естественно, к уменьшению предела выносливости материала.

Влияние состояния поверхности на предел выносливости при симметричном цикле характеризуется коэффициентом  $\beta$  состояния поверхности. Этот коэффициент представляет собой отношение предела выносливости  $\sigma_{-1n}$  детали с данной обработкой поверхности к пределу выносливости  $\sigma_{-1}$  полированного образца:

$$\beta = \frac{\sigma_{-1n}}{\sigma_{-1}}.$$
(2.143)

Графики изменения коэффициента<sup> $\beta$ </sup> в зависимости от временного сопротивления материала<sup> $\sigma_в$ </sup> и вида обработки поверхности приведены на рис. 2.70.

Кривые на графике соответствуют следующим видам обработки поверхности: 1 – полирование; 2 – шлифование; 3 – тонкое обтачивание; 4 – грубое обтачивание; 5 – наличие окалины. Различные способы поверхностного упрочнения детали могут существенно повысить значение коэффициента качества поверхности  $\beta$  (до 1,5-2 и более вместо 0,6-0,8 для деталей без упрочнения). Подробные данные о величине  $\beta$  в зависимости от способа упрочнения поверхностного слоя (наклепа, цементации, азотирования, поверхностной закалки нагревом т.в.ч. и т.д.) приведены в справочниках.

Учитывая изложенное выше, можно определить общий коэффициент изменения предела выносливости при симметричном цикле:

$$K_{-1} = \frac{K_{\sigma}}{\varepsilon_{\sigma}\beta}.$$
 (2.144)

Действительный предел выносливости рассчитываемой детали в этом случае определяется так:

$$(\sigma_{-1k})_d = \frac{\sigma_{-1}}{K_{-1}} = \frac{\sigma_{-1}\varepsilon_{\sigma}\beta}{K_{\sigma}}.$$
(2.145)

# 2.7.4 Расчеты на прочность при переменных напряжениях

Расчет элементов конструкций, находящихся под действием переменных нагрузок, обычно начинают со статического расчета, целью которого является предварительное определение размеров. Только после этого проводят проверочный расчет на выносливость, в результате которого определяют фактический коэффициент запаса прочности. Коэффициент запаса прочности при симметричном цикле характеризуется отношением действительного предела выносливости детали к максимальному напряжению цикла  $\sigma_{\alpha}$ , т. е.

$$n_{\alpha} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a} = \frac{\sigma_{-1}\varepsilon_{\sigma}\beta}{K_{\sigma}\sigma_a}.$$
 (2.146)

Аналогично определяют коэффициент запаса прочности при кручении:

$$n_{\alpha} = \frac{(\tau_{-1k})_d}{\tau_a} = \frac{\tau_{-1}\varepsilon_{\tau}\beta}{K_{\tau}\tau_a}.$$
(2.147)

При сложном напряженном состоянии коэффициент запаса прочности вычисляют по формуле (2.122), т. е.

$$n = \frac{n_{\sigma} n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}.$$
(2.148)

Для определения запасов прочности при несимметричных циклах в случае любого вида нагружения (изгиба, растяжения – сжатия, кручения) можно воспользоваться следующими зависимостями:

для касательных напряжений

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_{\sigma}\sigma_{a}}{\varepsilon_{\sigma}\beta} + \varphi_{\sigma}\sigma_{m}};$$
(2.149)

для нормальных напряжений

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_{\tau}\tau_{a}}{\varepsilon_{\tau}\beta} + \varphi_{\tau}\tau_{m}};$$
(2.150)

В приведенных выражениях  $\varphi_{\sigma}$  и  $\varphi_{\tau}$  – коэффициенты, характеризующие чувствительность материала к асимметрии цикла соответственно при растяжении-сжатии и изгибе, а также при кручении. Значения этих коэффициентов даются в справочниках в зависимости от предела прочности материала.

Коэффициент запаса прочности при сложном напряженном состоянии вычисляют по формуле (2.148).

Определив коэффициент запаса прочности по сопротивлению усталости, необходимо сравнить его с коэффициентом запаса по сопротивлению пластическим деформациям. Последние определяются формулами

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{T}}{\sigma_{\max}} = \frac{\sigma_{T}}{\sigma_{a} + \sigma_{m}}; \qquad (2.151)$$

$$n_{\sigma} = \frac{\tau_T}{\tau_{\max}} = \frac{\tau_T}{\tau_a + \tau_m}; \qquad (2.152)$$

Прочность рассчитываемой детали оценивают по наименьшему из запасов, полученных по соответствующим формулам в том и другом случаях.