

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ЯДЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
«МИФИ»

---

# ТЕОРИЯ КАСКАДОВ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ БИНАРНЫХ И МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ ИЗОТОПНЫХ СМЕСЕЙ

Под редакцией профессора В.Д. БОРМАНА

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2011

ББК 24.13я7

УДК 546.02+621.039.8

Г 33

**Теория каскадов для разделения бинарных и многокомпонентных изотопных смесей:** *Учебное пособие* / Г.А. Сулаберидзе, В.А. Палкин, В.Д. Борисевич, В.Д. Борман, А.В. Тихомиров; под ред. проф. В.Д. Бормана. М.: НИЯУ МИФИ, 2011. 368 с.

В учебном пособии рассмотрены процессы изотопно-селективные переноса в каскадах (многоступенчатых разделительных установках). Такие установки используются для получения обогащённого урана и широкого спектра стабильных и радиоактивных изотопов различных элементов, применяющихся в ядерной энергетике, а также в перспективе будут использоваться для переработки отработавшего ядерного топлива. В книге описана как классическая теория разделения бинарной смеси изотопов урана, так и дается анализ современного состояния исследований разделения бинарных и многокомпонентных изотопных смесей в каскадах. Пособие основывается на опубликованных отечественных и зарубежных работах и материалах конференций. Приводятся примеры обогащения в каскадах различных целевых изотопов из многокомпонентных изотопных смесей.

Учебное пособие написано по материалам читаемого в НИЯУ МИФИ курса «Молекулярно-кинетические методы разделения изотопов» и аналогичного курса в УГТУ-УПИ для студентов старших курсов и аспирантов, обучающихся по специальности «Физика кинетических явлений». Пособие также может быть полезно для специалистов, работающих на разделительных предприятиях.

Подготовлено в рамках Программы создания и развития НИЯУ МИФИ.

Рецензент д.ф.-м.н., профессор В.М. Жданов (НИЯУ МИФИ)

ISBN 978-5-7262-1527-3

© *Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ», 2011*

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|  |           |
|--|-----------|
| ВВЕДЕНИЕ .....   | 7         |
| Список литературы .....  | 20        |
| <b>ЧАСТЬ 1 ТЕОРИЯ КАСКАДОВ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ<br/>БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ .....</b>  | <b>22</b> |
| 1.1. Разделительный элемент, разделительная ступень.<br>Основные параметры и уравнения.....  | 23        |
| 1.2. Разделительная способность (мощность). Работа<br>разделения. Разделительный потенциал.....  | 27        |
| 1.3. Основные принципы каскадирования. Типы<br>разделительных каскадов .....   | 40        |
| 1.4. Основные параметры и уравнения симметричного<br>противоточного каскада.....   | 42        |
| 1.5. Критерии эффективности работы каскада.....  | 48        |
| 1.6. Идеальный каскад для разделения бинарной изотопной<br>смеси.....  | 50        |
| 1.6.1. Основные уравнения симметричного идеального<br>каскада. Классификация идеальных каскадов .....                                  | 50        |
| 1.6.2. Идеальный каскад с малым обогащением на ступени<br>(случай слабого обогащения) .....  | 51        |
| 1.6.3. Идеальный каскад с одинаковым немалым<br>коэффициентом разделения на ступенях .....   | 58        |
| 1.7. Оптимизация каскада с заданными внешними<br>концентрациями целевого изотопа.<br>Сравнение идеального и оптимального каскадов..... | 67        |
| 1.8. Идеальный каскад с потерями .....   | 75        |
| 1.9. Прямоугольно-секционированные (ПСК) и прямоугольные<br>каскады (ПК) для разделения бинарных смесей.....                           | 83        |
| 1.9.1. ПСК и ПК в случае «слабого обогащения».....   | 83        |
| 1.9.2. Противоточная ступень. Представление<br>разделительной колонны как прямоугольного<br>каскада из противоточных ступеней.....     | 87        |
| 1.9.3. Оптимизация ПК и ПСК в случае<br>слабого обогащения.....  | 93        |
| 1.10. ПК в случае произвольных обогащений<br>на его ступенях .....   | 104       |
| 1.11. Нестационарные (переходные) процессы в каскадах .....  | 108       |

|  |     |
|--|-----|
| 1.11.1. Дифференциальное уравнение нестационарного<br>разделительного процесса.<br>Некоторые особенности нестационарных<br>процессов ..... | 108 |
| 1.11.2. Приближенные решения уравнения<br>нестационарного процесса .....   | 117 |
| 1.12. Несимметричные каскады .....   | 133 |
| 1.12.1. Основные уравнения несимметричного каскада.<br>Идеальный несимметричный каскад<br>с произвольным обогащением на ступени.....       | 134 |
| 1.12.2. Несимметричный идеальный каскад с малым<br>обогащением на ступени .....  | 143 |
| 1.12.3. Прямоугольный несимметричный каскад .....  | 147 |
| Контрольные вопросы к первой части .....   | 148 |
| Список литературы .....  | 151 |
| Приложение 1. Численный метод решения<br>уравнения нестационарного переноса .....  | 156 |
| Приложение 2. Основные правила операционного исчисления.<br>Операторное изображение .....  | 159 |
| Приложение 3. Значения корней трансцендентного<br>уравнения .....  | 163 |

## ЧАСТЬ 2 ТЕОРИЯ КАСКАДОВ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ .....

|  |     |
|--|-----|
| 2.1. Разделительная ступень. Основные характеристики<br>и уравнения ступени .....        | 165 |
| 2.2. Основные уравнения противоточного симметричного<br>разделительного каскада.....     | 173 |
| 2.3. Каскад в случае слабого разделения .....  | 177 |
| 2.3.1. Основные уравнения .....  | 177 |
| 2.3.2. Исследование каскадов заданного профиля<br>методом ортогональной коллокации ..... | 179 |
| 2.3.3. Метод квазилинеаризации .....   | 183 |
| 2.3.4. Модельные каскады.<br>Анализ прямоугольно-секционированного                       |     |

|   |     |
|---|-----|
| каскада на основе модельных каскадов .....  | 188 |
| 2.3.4.1. $Q$ -каскады («свободные» каскады)<br>и их свойства .....  | 188 |
| 2.3.4.2. $R$ -каскады и их свойства .....   | 202 |
| 2.3.4.3. Решение системы уравнений каскада<br>с несмещением по относительной<br>концентрации для выбранной пары<br>компонентов методом Б.В.Жигаловского ..... | 205 |
| 2.3.4.4. $R$ -каскад с дополнительным потоком<br>отбора .....   | 217 |
| 2.3.4.5. Аппроксимация каскадов непрерывного<br>профиля прямоугольно-секционированным<br>каскадом .....   | 224 |
| 2.3.5. Нестационарные процессы в каскаде .....  | 231 |
| 2.3.5.1. Уравнение нестационарного переноса<br>в каскаде .....  | 231 |
| 2.3.5.2. Некоторые особенности нестационарных<br>процессов .....  | 236 |
| 2.3.5.3. Переходные процессы в двойных каскадах. ....   | 245 |
| 2.3.6. Разделение многокомпонентной смеси<br>изотопомодифицированных молекул в каскаде<br>при наличии внутрифазного изотопного обмена .....                   | 251 |
| 2.4. Каскады с немалыми обогащениями на ступенях .....  | 265 |
| 2.4.1. Основные уравнения .....   | 265 |
| 2.4.2. Обзор численных методов решения системы<br>уравнений переноса в каскадах<br>заданного профиля .....  | 272 |
| 2.4.2.1. «Классический» итерационный метод .....  | 273 |
| 2.4.2.2. «Матричный» метод .....  | 273 |
| 2.4.2.3. Метод, основанный на решении системы<br>уравнений переходного (нестационарного)<br>процесса в каскаде .....  | 276 |
| 2.4.2.4. Метод квазилинеаризации .....  | 281 |
| 2.4.2.5. Метод расчета на основе приближения<br>фактора разделения .....  | 286 |
| 2.4.3. Влияние параметров каскада на состав<br>получаемой смеси .....   | 288 |
| 2.4.4. Модельные каскады и их свойства .....  | 293 |

|   |     |
|---|-----|
| 2.4.4.1. Каскад с постоянными относительными коэффициентами разделения на ступенях («квазиидеальный» каскад).....                 | 293 |
| 2.4.4.2. Квазиидеальный каскад с несмещением относительных концентраций двух заданных компонентов смеси ( <i>R</i> -каскад) ..... | 298 |
| 2.4.4.3. Оптимальный каскад с заданными концентрациями по целевому изотопу. Сравнение с <i>R</i> -каскадом.....                   | 314 |
| 2.4.4.4. Квазиидеальный каскад с потерями рабочего вещества на ступенях .....   | 318 |
| 2.4.4.5. Квазиидеальный каскад с двумя питающими потоками .....   | 325 |
| Контрольные вопросы ко второй части .....   | 331 |
| Список литературы .....   | 333 |

|  |     |
|--|-----|
| ЧАСТЬ 3 ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛЕНИЯ НЕУРАНОВЫХ ИЗОТОПОВ НА КАСКАДАХ ГАЗОВЫХ ЦЕНТРИФУГ ..... | 340 |
| 3.1. Понятия и приемы, используемые в практике центробежного каскадирования .....                | 341 |
| 3.2. Многопараметричность разделительных задач .....   | 343 |
| 3.3. Организация разделительной кампании .....   | 346 |
| 3.4. Примеры разделительных кампаний.....  | 351 |
| 3.5. Некоторые экономические аспекты центробежного разделения стабильных изотопов.....           | 362 |
| Контрольные вопросы к третьей части.....   | 366 |
| Список литературы .....  | 366 |

## ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой читателю книге излагается теория процессов изотопно-селективного переноса в сложных многоступенчатых установках (каскадах), предназначенных для концентрирования – получения высокообогащенных изотопов. Книга написана по материалам опубликованных работ в иностранной и отечественной литературе и докладов, сделанных на прошедших в последние годы конференциях по разделению изотопов. Основные положения теории каскадов были разработаны в связи с проблемой разделения изотопов урана авторами П. Дираком, К. Коэном, Р. Пайерлсом, Р. Фейнманом [1], С.Л. Соболевым, Я.А. Смородинским, Б.В. Жигаловским, М.М. Добулевичем, Н.А. Колокольцовым, А.А. Сазыкиным, М.А.Ханиным, В.Я. Бирюковым [2,3], Е. фон Халле, А.Канагава, И. Ямамото и другими [4, 5]. Со времени опубликования кратко изложения теории каскадов для разделения бинарных смесей в статье Б. Бриголли «Теория каскадов» в коллективной монографии «Обогащение урана» под редакцией С. Виллани [4] прошло более 25 лет. В последние десятилетия было опубликовано много работ, посвященных разделению многокомпонентных изотопных смесей, теории идеальных и оптимальных противоточных каскадов из ступеней с произвольным обогащением, теории нестационарных процессов в каскадах для разделения многокомпонентных смесей, методам анализа оптимальных каскадов с произвольным обогащением на ступени. В последние годы были экспериментально исследованы процессы разделения и наработаны опытные партии изотопов ряда элементов [5].

В настоящей книге сделана попытка систематического изложения общих вопросов теории и её современного состояния. Предлагаемая читателю книга не является руководством по практическим расчетам каскадов, однако собранный и обобщенный в книге материал может служить учебным пособием для студентов старших курсов, обучающихся по специальности «Физика кинетических явлений». Книга полезна для аспирантов и специалистов разделительных предприятий.

В настоящее время каскады используются в промышленном масштабе для получения изотопов урана, а также в опытно-промышленном производстве изотопов более 30 элементов таблицы Менделеева. В производстве ядерного топлива, обогащенного изотопом урана  $^{235}\text{U}$ , используются каскады, в которых применяется метод газовой диффузии (США, Франция, Китай) и экономически более эффективный метод газовой центрифуги (Россия, англо-голландско-немецкий консорциум Urenco, Япония, Китай, Бразилия). Для обогащения изотопов ряда легких элементов, таких как бор, углерод, азот, кислород используются методы дистилляции и химического изотопного обмена.

Увеличение концентрации ценного компонента, вызванное первичным эффектом разделения в упомянутых методах, весьма мало с точки зрения практических потребностей. Поэтому высокое обогащение в каскаде получают путем многократного повторения процесса разделения в последовательности аппаратов каскада. Первичный эффект разделения в аппарате каскада вызывает пространственное изотопно-селективное перераспределение молекул смеси. Так в методе газовой центрифуги возникает первичный эффект разделения молекул газа, содержащих различные изотопы с разными массами по радиусу быстро вращающегося ротора за счет центробежного поля, величина которого пропорциональна массе молекул. При разделении изотопов урана рабочим газом является гексафторид урана ( $\text{UF}_6$ ), молекулы которого содержат изотопы  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$  и поэтому имеют различные массы. В настоящее время метод газовой центрифуги стал основным для концентрирования изотопов более 20 химических элементов. В методе газовой диффузии эффект разделения достигается при пропускании изотопической смеси газов через канал с пористыми стенками при условии, когда длина свободного пробега молекул сравнима с диаметром пор. В этих условиях поток каждого компонента смеси через пористую стенку канала зависит от массы молекул, причем скорость диффузии больше для легкого компонента. При движении потока смеси газов вдоль канала часть его проникает через пористую стенку. В результате прошедшая через стенку смесь обогащается легким газом, а не прошедший через стенку поток обедняется легким газом. Методы газовой центрифуги и газовой диффузии относятся к молекулярно-кинетическим методам разделения. Общим



для этих методов является использование газа как рабочей среды и газокинетических первичных эффектов для разделения молекул, содержащих различные изотопы. К этому классу разделительных методов относятся также методы термодиффузии и масс-диффузии и метод разделительного сопла. В методе термодиффузии первичный эффект разделения вызывается в смеси молекул градиентом температуры. В стационарном состоянии возникает такая разность концентраций, при которой диффузионный поток, вызванный градиентом концентрации, равен термодиффузионному потоку, вызванному градиентом температуры. В области пониженной температуры, как правило, концентрируются тяжелые молекулы, а области повышенных температур смесь обогащается легкими молекулами. Метод термодиффузии применяется в настоящее время для получения небольших количеств (1-100 г) изотопов легких (инертных) газов. В методе масс-диффузии первичный эффект разделения возникает за счет различной скорости диффузии молекул с различными изотопами в потоке другого газа, например, газа неона в потоке паров ртути. Нестационарный бародиффузионный эффект ро-странственного разделения компонент смеси, вызванный градиентом давления в поле центробежных сил, используется в методе разделительного сопла. Такое поле создается при движении газа вдоль вогнутой поверхности сверхзвукового разделительного сопла с вогнутой и выпуклой стенками, тяжелые молекулы при этом концентрируются на периферии у вогнутой стенки.

В методах дистилляции и химического изотопного обмена используются первичные эффекты разделения в двухфазных системах жидкость – газ. Разделение при дистилляции определяется неравновероятным распределением молекул с различными изотопами между двумя фазами – паром и жидкостью. Равновесные парциальные давления компонентов изотопической смеси зависят не только от масс молекул, но и от других молекулярных параметров и параметров взаимодействия молекул в жидкой фазе. Поэтому методом дистилляции могут быть разделены изотопические смеси молекул с одинаковыми массами. В случае химического изотопного обмена эффект разделения определяется константой равновесия реакции изотопного обмена и, в общем случае, константой межфазного обмена.

В результате действия первичного эффекта разделения возникают обогащенные и обедненные части смеси. Для количественного описания первичного эффекта разделения используют величину коэффициента разделения  $q_e$ , которая для двухкомпонентной смеси А+В вводится следующим образом:

$$q_e = \frac{c_{1A}/(1-c_{1A})}{c_{2A}/(1-c_{2A})}.$$

Здесь  $c_{1A}$  и  $c_{2A}$  – концентрации извлекаемого компонента А в обогащенной и обедненной частях смеси в результате ее разделения,  $c_B=1-c_A$ . В случае молекулярно-кинетических методов коэффициент  $q_e$  определяет отношение относительных концентраций ( $c_A/c_B$ ) в различных геометрических частях объема аппарата, в которых концентрируются обогащенные и обедненные смеси. Так, при разделении в газовой центрифуге – это области у стенки и вблизи оси вращающегося ротора. В случае разделения в двухфазных системах коэффициент  $q_e$  определяется отношением относительных концентраций в различных фазах.

Отметим, что в стационарном режиме в разделительный аппарат непрерывно поступает поток питания и одновременно из него выходят два потока: один, обогащенный ценным компонентом, и другой, обедненный им. При этом полный коэффициент разделения зависит от величин потоков и их соотношения и может оказаться как меньше, так и больше коэффициента разделения, характеризующего первичный эффект  $q_e$ .

Величины коэффициента  $q_e$  для ряда методов разделения, используемых для производства различных изотопов, приведены в табл. В.1.

Видно, что величина  $q_e$  незначительно превышает единицу ( $q_e - 1 \ll 1$ ). Это означает, что в результате первичного эффекта разделения концентрация ценного (целевого) изотопа в потоке, обогащенном этим изотопом, по сравнению с концентрацией в обедненном потоке и потоке питания изменяется на малую величину.

Таблица В.1

## Первичный эффект разделения для ряда изотопических смесей

| Изотопическая смесь  | Эффект разделения   | Условия  | Значение $q_e$ | Литература |
|--|---|--|----------------|------------|
| $^{235}\text{U}^{19}\text{F}_6$ -<br>$^{238}\text{U}^{19}\text{F}_6$         | Разделение в центробежном поле  | Линейная скорость вращения,<br>$V=500$<br>м/сек<br>$T=300\text{K}$       | 1,026          | [1, 2, 4]  |
| $^{235}\text{U}^{19}\text{F}_6$ -<br>$^{238}\text{U}^{19}\text{F}_6$         | Разделение на пористой перегородке (газовая диффузия)   | $T=300\text{K}$  | $1,004$<br>2   | [2, 4]     |
| $^{20}\text{Ne}$ - $^{22}\text{Ne}$  | Термодиффузия   | $T_1=300\text{ K}$<br>$T_2=700\text{ K}$                                 | 1,012          | [2,9]      |
| $^{36}\text{Ar}$ - $^{40}\text{Ar}$  | Термодиффузия   | $T_1=300\text{ K}$<br>$T_2=700\text{ K}$                                 | 1,008          | [2,9]      |
| $^{78}\text{Kr}$ - $^{84}\text{Kr}$  | Термодиффузия   | $T_1=300\text{ K}$<br>$T_2=700\text{ K}$                                 | 1,004          | [2,9]      |
| $^{20}\text{Ne}$ - $^{22}\text{Ne}$  | Масс-диффузия   | Разделение в потоке паров ртути  | 1,2            | [8]        |
| $^{10}\text{B}^{19}\text{F}_3$ -<br>$^{11}\text{B}^{19}\text{F}_3$           | Химический изотопный обмен в системе $\text{C}_6\text{H}_5\text{OCH}_3$ (анизол)- $\text{BF}_3$ | $T=298\text{K}$  | 1,03           | [2]        |
| $\text{H}_2^{16}\text{O}$ -<br>$\text{H}_2^{18}\text{O}$                     | Дистилляция воды  | $T=323\text{K}$  | $1,007$<br>8   | [9]        |
| $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ -<br>$^{13}\text{C}^{16}\text{O}$               | Дистилляция оксида углерода   | $T=84,7\text{K}$   | $1,006$<br>4   | [10]       |
| $\text{H}^{14}\text{NO}_3$ <sub>ж</sub> -<br>$^{15}\text{NO}$ <sub>газ</sub> | Химический изотопный обмен в системе азотная кислота – оксиды азота                             | $T=313\text{K}$<br>концентрация кислоты<br>$X_{\text{кислоты}}=9,6$<br>М | 1,053          | [11, 12]   |

| Изотопическая смесь  | Эффект разделения        | Условия           | Значение $q_e$ | Литература |
|--|--------------------------|-------------------|----------------|------------|
| $^{14}\text{N}^{16}\text{O}$ -<br>$^{15}\text{N}^{16}\text{O}$ | Дистилляция оксида азота | $T=119,6\text{K}$ | 1,028          | [13]       |
| $^{14}\text{N}^{16}\text{O}$ -<br>$^{14}\text{N}^{18}\text{O}$ | Дистилляция оксида азота | $T=121\text{K}$   | 1,034          | [14]       |

Так, для эффекта разделения изотопов кислорода  $^{16}\text{O}$  и  $^{18}\text{O}$  в виде молекул воды  $\text{H}_2^{16}\text{O}$  и  $\text{H}_2^{18}\text{O}$  в системе водяной пар – жидкость разница концентраций  $^{18}\text{O}$  в равновесии между жидкостью и паром составляет  $\Delta c \cong 0,003\%$ . Другой пример – первичный эффект разделения по радиусу ротора в центробежном поле сил. При линейной скорости вращения ротора  $V \cong 500\text{ м/с}$  концентрация молекул  $^{235}\text{UF}_6$  у оси вращающегося ротора составит  $c \cong 0,77\%$ , то есть по сравнению с начальной концентрацией, равной  $\approx 0,7\%$ , возрастание равно  $0,07\%$ . Аналогичные малые изменения концентраций возникают и при других рассмотренных эффектах разделения. Исключения составляют первичные эффекты разделения в лазерном, плазменном и электромагнитном методах разделения, для которых коэффициент разделения  $q$  достигает значений 10-100. В этих методах кроме проблемы умножения первичного эффекта разделения возникает также задача увеличения доли потока исходного вещества, которая может участвовать в процессе разделения.

Для получения высоких концентраций изотопов используют различные методы, позволяющие увеличить разделение путем умножения первичного эффекта в одном аппарате, а также соединение отдельных аппаратов в каскад. В газовой центрифуге для увеличения радиального эффекта разделения возбуждают осесимметричное замкнутое циркуляционное течение разделяемой смеси, при котором у стенки ротора и вблизи оси газ движется в противоположных направлениях. Такое движение может быть обеспечено, например, за счет подтормаживания газа у одного из торцов ротора. Поскольку газ в центробежном поле сил у стенки ротора обогащен тяжелыми молекулами, а у оси – легкими, то в таком противотоке возникает перенос тяжелых и легких молекул к разным тор-

цам. Одновременно нарушение равновесия приводит к уменьшению радиального разделения и к возникновению диффузионных потоков в радиальном направлении, стремящихся восстановить (увеличить) разность концентраций в радиальном направлении. В результате в закрытом роторе вдоль его оси может установиться разность концентраций, которая будет превосходить первичный эффект разделения. Так, при коэффициенте разделения между нижней и верхней торцами ротора, равном 2, концентрация молекул  $^{235}\text{U}^{19}\text{F}_6$  в обогащенном газе составит  $\sim 1,4\%$ , что превышает природную концентрацию  $c \cong 0,7\%$  в потоке питания на  $0,7\%$ . Возбуждение циркуляции используется также для умножения первичного эффекта и в других аппаратах молекулярно-кинетических методов (термодиффузионных и масс-диффузионных колоннах).

Для умножения первичного эффекта разделения в системе газ – жидкость используют дистилляционные колонны и колонны химического изотопного обмена. Для увеличения поверхности контакта между жидкостью и газом (паром) колонны, как правило, заполняют насадкой, состоящей из мелких элементов, например, коротких спиралей, на поверхности которых формируют тонкую пленку жидкости. Остальной объем колонны занимает газ. Если потоки жидкости и газа равны нулю и температура постоянна по длине колонны, то в колонне устанавливается первичный равновесный эффект разделения между газом и пленкой жидкости на насадке. В колонне возбуждают встречные потоки жидкости и газа. Для этого, например, в случае дистилляции газ в верхней части колонны конденсируют, а жидкость внизу колонны испаряют. В результате в колонне возникает поток жидкости по поверхности насадки вниз колонны к испарителю, а поток газа – вверх от испарителя к конденсатору. Поток газа переносит концентрирующийся в газе более летучий компонент смеси вверх по колонне, а поток жидкости – менее летучий компонент вниз по колонне. Это приводит к уменьшению первичного эффекта разделения в каждом сечении колонны, и поэтому возникает преимущественное испарение из пленки жидкости более летучего компонента. В результате циркуляции вещества вдоль колонны и вызванного циркуляцией селективного переноса между верхом и низом колонны установится разность концентраций, которая в определенных условиях может намного превышать разность концентраций при первичном эффекте разде-

ления. Можно выделить высоту колонны  $h$ , на которой коэффициент разделения в неравновесном стационарном процессе переноса равен равновесному коэффициенту для первичного эффекта разделения. Для используемых в разделении изотопов колонн высота  $h$  обычно составляет 2-10 см. При длине колонны 1500 см, если принять, что  $h=5$  см, то первичный эффект разделения повторяется  $\sim 300$  раз. Поэтому при разделении изотопов  $^{16}\text{O} - ^{18}\text{O}$  дистилляцией воды и при значении  $q_e=1,01$  можно получить воду с концентрацией изотопа  $^{18}\text{O}$ , равной  $\sim 4\%$ .

В рассмотренных случаях умножения эффекта разделения в газовой центрифуге и дистилляционной колонне достигают концентрации большие, чем при первичном эффекте разделения. Однако эти концентрации могут оказаться меньше, чем требуемые. Так, для энергетических атомных реакторов необходимо топливо с концентрацией изотопа  $^{235}\text{U}$  3-5%, которая существенно больше, чем та, что достигается на одиночной центрифуге при умножении первичного (радиального) эффекта разделения. Для использования тяжелого стабильного изотопа  $^{18}\text{O}$  в медицинской позитронно-эмиссионной томографии необходима его концентрация  $>95\%$ . Поэтому для получения продуктов с высокой концентрацией изотопов необходимо соединять аппараты, например, газодиффузионные ступени, центрифуги, последовательно друг с другом, передавая обогащенный выделяемым изотопом поток в последующий аппарат (ступень разделения). Поскольку производительность одного аппарата ограничена, то может возникнуть необходимость для обеспечения требуемой производительности соединять в одной ступени разделения отдельные аппараты параллельно друг другу. Поток питания исходной смеси подают на вход промежуточной ступени каскада, а потоки отбора и отвала, обогащенные и обедненные выделяемым изотопом, выводят, как правило, из крайних ступеней каскада. Очевидно, что, чем ниже концентрация выделяемого изотопа в потоке питания, тем большее число ступеней должно быть в каскаде и большее количество исходного вещества требуется перерабатывать для выделения единичной массы изотопа. При заданной концентрации в отборе и заданном потоке отбора по мере повышения концентрации в последовательных ступенях каскада от точки питания к концам каскада перерабатываемый ступенями поток или число параллельных аппаратов в ступенях можно уменьшать. При

повышении концентрации выделяемого изотопа и заданной величине коэффициента разделения ступени увеличивается и концентрация в обедненном потоке из аппаратов ступени. Поэтому для увеличения количества извлекаемого изотопа обедненный поток из каждой ступени подают назад относительно основного направления движения целевого изотопа в каскаде в поток питания какой-либо предыдущей ступени. Таким образом, в каскадах для разделения изотопов используют противоточные коммутации потоков, которые по аналогии с электроникой можно считать положительными обратными связями. Такие каскады принято называть противоточными, если обедненный поток из ступени направляется на питание предыдущей ступени, а обогащенный – на вход последующей ступени, то такой каскад принято называть симметричным. Впервые каскады для разделения изотопов неона, аргона, азота и углерода были созданы из термодиффузионных колонн немецкими учеными Клузиусом и Диккелем, из масс-диффузионных – Герцем [2, 16].

Следует обратить внимание на то, что в таких разделительных элементах, как термодиффузионная, масс-диффузионная, дистилляционная колонны, газовая центрифуга, циркуляционный поток в направлении, противоположном переносу обогащенного продукта к отбору, выполняет ту же роль, что и обедненный поток в каскаде. Поэтому процесс умножения первичного эффекта в таких разделительных элементах аналогичен процессу в противоточном каскаде. Точнее говоря, разделительные аппараты колонного типа являются частным случаем такого каскада, поскольку в каскаде величина потока может изменяться от ступени к ступени, а в простом умножающем аппарате (в идеальном случае) поток постоянен по его длине. Аналогом ступени каскада в разделительном аппарате можно считать часть аппарата высотой эквивалентной теоретической ступени (ВЭТС), на которой достигается коэффициент разделения, равный коэффициенту разделения первичного эффекта.

Таким образом, несмотря на то, что процессы разделения изотопов основаны на различных физических явлениях, проблемы умножения разделения вызванного первичным эффектом в многоступенчатых установках имеют большое сходство. Поэтому в теории каскадов описывают общие закономерности молекулярно-селективного переноса в каскаде без анализа физики (физико-

химии) первичного процесса и гидрогазодинамических режимов работы аппаратов каскада.

Книга состоит из двух частей. Первая часть содержит изложение как классических вопросов, так и достижений последних лет в теории каскадов для разделения двухкомпонентной смеси изотопов. К ним относятся разделительные свойства ступени, принципы каскадирования, схемы симметричных и несимметричных каскадов, критерии эффективности процесса разделения, понятия потенциала и работы разделения, идеального и оптимального каскада. При анализе работы противоточного каскада возникают два вопроса. Сколько ступеней необходимо, чтобы получить поток отбора и отвала с заданными концентрациями? Другой вопрос: как минимизировать удельные затраты на получение изотопов? Оптимальным называется каскад, в котором минимален суммарный поток питания всех ступеней каскада. Удельные затраты на разделение с использованием молекулярно-кинетических методов, как правило, пропорциональны суммарному количеству разделяющих элементов (например, центрифуг) в каскаде. Поскольку число элементов может быть определено как отношение суммарного потока питания к потоку питания одного элемента, то задача оптимизации сводится к задаче поиска минимума суммарного потока. В другом подходе исходным является требование, чтобы величина энтропии смешения при соединении потоков в каскаде не возрастала. Идеальным называется каскад, в котором концентрации различных потоков на входе в каждую ступень каскада были одинаковыми. В этом случае энтропия смешения не возрастает. В этой части книги излагается классическая теория разделительного потенциала, введенного Пайерлсом и Дираком, которая позволяет оценить число элементов в каскаде и удельные затраты, не прибегая к сложным расчетам. Излагается также теория идеального симметричного каскада для случая слабого ( $q-1 \ll 1$ ) обогащения на ступени, которая приводит к практически важному понятию единицы работы разделения. Проведено сравнение оптимального и идеального каскадов ступеней с немалым ( $q-1 \geq 1$ ) обогащением, и описан сравнительно новый результат, что оптимальный (смешивающий) каскад может иметь меньший суммарный поток, чем идеальный каскад из несимметричных ступеней.



В идеальном каскаде в случае слабого обогащения поток должен изменяться непрерывным образом от ступени к ступени. Приближением к профилю идеального каскада являются прямоугольно-секционированный и прямоугольный (с постоянным потоком) питания каскады. В этой части книги излагаются методы анализа таких каскадов, вводится понятие КПД каскада. В конце первой части дан анализ нестационарных процессов в каскадах для разделения двухкомпонентной смеси, а также основы теории несимметричных каскадов, включая прямоугольный несимметричный каскад с произвольным обогащением на ступени.

Вторая часть книги посвящена теории разделения многокомпонентной смеси изотопов в каскадах. В настоящее время актуальной становится проблема использования регенерированного урана, полученного из отработанного ядерного топлива (ОЯТ). В ОЯТ кроме  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$  содержатся изотопы  $^{232}\text{U}$ ,  $^{234}\text{U}$  и  $^{236}\text{U}$ . Поэтому дообогащение  $^{235}\text{U}$  становится задачей разделения многокомпонентной изотопной смеси. Число стабильных изотопов у элементов может достигать десяти (олово). Поскольку коэффициент обогащения изотопов смеси молекулярно-кинетическими методами зависит от их масс, то в разделительном элементе происходит различное по величине одновременное обогащение всех компонентов. В противоточном каскаде в стационарном состоянии это приводит к распределению промежуточных по массе компонентов вдоль каскада с максимумами концентраций компонентов во внутренних ступенях каскада, в то время как крайние по массе компоненты концентрируются на концах каскада. Знаки величин обогащения промежуточных компонентов зависят от концентраций в смеси. Поэтому в каскаде удастся лишь ограниченное обогащение компонентов в отборе, и если в каскаде один поток отвала и один поток отбора, то существует предельное обогащение компонентов смеси. Задача получения обогащенных изотопов многокомпонентной смеси по сравнению с разделением двухкомпонентной смеси существенно усложняется в случае выделения промежуточного по массе изотопа. Другой существенной особенностью разделения многокомпонентной смеси является невозможность построить каскад, на входах в ступени которого выполнялось бы условие несмешения по всем компонентам смеси, и можно добиться несмешения лишь по выбранной паре компонентов. В связи с этим в теории разделения

многокомпонентных смесей развиваются различные методы решения системы нелинейных уравнений каскада. Невозможность выполнить условие несмещения привели также к разработке различных описанных в книге моделей каскадов, таких как  $Q$ -каскад (свободный каскад), квазиидеальный каскад,  $R$ -каскад. Специальный раздел второй части посвящен методам описания нестационарных процессов в каскадах. Описаны закономерности нестационарного изотопно-селективного переноса, приводящего к перераспределению компонентов по длине каскада, методы управления изотопным составом рабочего вещества в каскаде, возможности сокращения времени переходного процесса и получения высокообогащенного продукта в нестационарном режиме. Описаны также различные методы численного расчета каскадов заданного профиля с немалым обогащением на ступени, влияние параметров каскада на состав получаемой смеси, способы учета потери рабочего вещества на ступенях.

В этой же части книги приведены примеры разделения многокомпонентных изотопных смесей на прямоугольно-ступенчатом каскаде из газовых центрифуг. В частности, описаны разделительные кампании по наработке изотопов ксенона  $^{124}\text{Xe}$ , теллура  $^{123}\text{Te}$ , хрома  $^{50}\text{Cr}$ .

Собранные в книге материалы не исчерпывают все современные проблемы разделения изотопов в каскадах. В силу дискуссионности вопроса авторы посчитали возможным опустить анализ работ по потенциалу разделения многокомпонентных смесей, приведя лишь краткое упоминание о них и библиографию, несмотря на появление в последние годы ряда новых моделей потенциала разделения и положительных результатов их применения для анализа разделения крайних по массе изотопов [3, 17-21].

Авторы пособия полагают, что читатель знаком с материалами лекций по курсам «Общая физика», «Молекулярная физика», «Термодинамика», «Статистическая физика», «Гидрогазодинамика», «Физические основы разделительных процессов», изучаемых студентами и аспирантами, обучающимися по специальности «Физика кинетических явлений». Осознавая, что у некоторых читателей могут возникнуть трудности с пониманием физико-математических моделей и решений задач по разделению изотопных смесей в каскаде, авторы предприняли попытку наряду со

строгими математическими доказательствами использовать простые объяснения исследуемых физических процессов.

Настоящее пособие подготовлено на основе материалов лекций по курсам «Молекулярно-кинетические методы разделения изотопов», читаемым доцентом Г.А. Сулаберидзе на кафедре Молекулярной физики МИФИ и аналогичному курсу лекций, читаемому в УГТУ-УПИ профессором В.А. Палкиным, а также по материалам работ, опубликованных в зарубежной и отечественной литературе и трудах научных конференций.

Введение написано В.Д. Борманом при участии Г.А. Сулаберидзе, параграфы 1.1-1.7 написаны В.А. Палкиным и Г.А. Сулаберидзе, причем параграф 1.2 при участии В.Д. Бормана, а параграф 1.7 при участии В.Д. Борисевича. Параграфы 1.8-1.14 части 1 и часть 2 написаны Г.А. Сулаберидзе. В подготовке рукописи принимали участие В.Д. Борисевич и В.Д. Борман. Раздел книги «Примеры разделения многокомпонентных смесей» написан А.В. Тихомировым при участии В.Д. Борисевича, В.Д. Бормана и Г.А. Сулаберидзе.

Коллектив авторов благодарен руководителю Департамента ядерного топливного цикла Минатома (2004 г.) В.М. Короткевичу за поддержку идеи создания цикла книг по основным курсам лекций, читаемым для студентов, обучающихся по специальности «Физика кинетических явлений».

После появления первого издания пособия в 2007 году авторы получили большое количество замечаний по исправлению встретившихся в тексте неточностей и опечаток, а также предложение по переработке материала, изложенного в разделах 2.3. и 2.4, что и было сделано в настоящем издании.

## Список литературы

1. Бенедикт М, Пигфорд Т. Химическая технология ядерных материалов. Атомиздат, 1960.
2. Розен А.М. Теория разделения изотопов в колоннах Атомиздат, 1960.
3. Жигаловский Б.В. Лекционные материалы по многокомпонентным смесям. Новоуральск, УЭХК, 1999.
4. Обогащение урана / Под ред. С. Виллани: пер. с англ. под ред. И.К. Кикоина. М: Энергоатомиздат, 1983.
5. Изотопы (Свойства. Получение. Применение.) / Под ред. В.Ю. Баранова. М: ИздАТ, 2004.
6. Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул: сб. докладов XI международной научной конференции. Звенигород, Цнииатоминформ 2006.
7. Proc. 9th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases, 2006, China, Beijing.
8. Гвердцители И.Г., Цхакая В.К. В сб. «Получение изотопов» Тр. Всес. конф. По разделению и применению изотопов. М: Изд-во АН СССР, 1958, с. 113.
9. Palko A.A. // J. Chem. Phys. 1959. V. 30. P. 1187.
10. Jicrlı D., Staschewski D.F. // Chem. Soc. Farad. Soc. 1977. V. 71. P. 1505.
11. Ancona E., Boato G., Casanova N. // Nuova Cimento. 1962. № 24. P. 111.
12. Stern M., Kauder L., Spindel W. // J. Chem. Phys. 1962. V. 36. P. 764.
13. Clusius K., Vecchi M. // Helv. Chim. Acta. 1959. V. 42. P. 1921.
14. Clusius K., Schleich K., Vecchi M. // Helv. Chim. Acta. 1959. V. 42. P. 2654.
15. Джонс К., Ферри В. Разделение изотопов методом термодиффузии. М.: ИЛЛ, 1947.
16. Muller G., Vasaru G. The Clusius-Dickel thermodiffusion column – 50 year after its invention // Isotopenpraxis. 1988. V. 24. № 11/12. P. 455–464.

17. Сазыкин А.А. Термодинамический подход к разделению изотопов, в кн. Изотопы (Свойства. Получение. Применение.) / Под ред. В.Ю. Баранова. М: ИздАТ, 2000, С. 72–108.

18. Wood H.G., Borisevich V.D., Sulaberidze G.A. On a criterion efficiency for multi-isotope mixtures separation // *Separ. Sci. Technol.* 1999. V. 34 (3). P. 343–357.

19. Палкин В.А. Обобщение решения Смородинского для потенциала разделения многокомпонентной смеси изотопов // *Атомная энергия.* 2003. Т. 95. № 5. С. 373–382.

20. Палкин В.А., Фролов Е.С. Оптимизация каскадов по критерию максимума использования разделительной способности элементов // *Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул: сб. докладов XI международной научной конференции.* Звенигород, Цнииатоминформ 2006. С. 21–28.

21. Song T.M., Zeng S. On the optimity of separation cascade for a binary and a multi-component case // *Proc. 9th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases.* September 18-21, 2006, China, Beijing. P. 132–143.

# **Часть 1**

## **ТЕОРИЯ КАСКАДОВ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ БИНАРНЫХ СМЕСЕЙ**

В настоящем разделе описывается теория каскадов, состоящих из дискретных элементов и предназначенных для разделения бинарных изотопных смесей, прежде всего в приложении к однофазным молекулярно-кинетическим методам разделения. Рассматриваются как малые, так и большие эффекты разделения, реализуемые в разделительном элементе, в качестве которого используются такие аппараты как газодиффузионная машина, газовая центрифуга, масс-диффузионный насос Герца и др. Излагаемая теория основана на общих принципах умножения элементарного (однократного) эффекта разделения, которые позволяют использовать её, в частности, для расчета противоточных разделительных колонн (термодиффузионных, масс-диффузионных, дистилляционных, химобменных) и каскадов, составными частями которых являются такие колонны (каскады колонн с сокращением потоков).

### 1.1. Разделительный элемент, разделительная ступень. Основные параметры и уравнения [1-5]

В общем случае разделительный элемент может иметь несколько входов и выходов. В практике разделения изотопов однофазными методами, он имеет, как правило, один вход и два выхода и называется *простым разделительным элементом* (рис. 1.1). В этом случае в разделительный элемент подают поток разделяемой смеси  $L_3$  с концентрацией (мольной долей\*) ценного (целевого изотопа)  $c$ , а из него отбирают два потока: «обогащенный», с более высокой, чем во входящем потоке, кон-

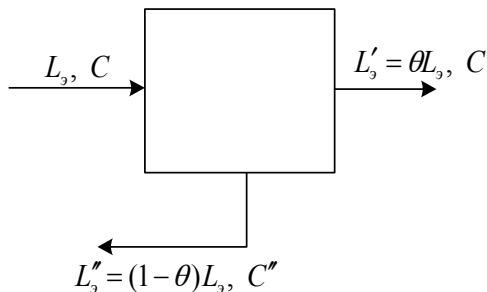


Рис. 1.1. Схема разделительного элемента

---

\* Если речь идет о разделении изотопов тяжелых элементов, то в этом случае величины мольной и массовой концентрации практически совпадают.

центрацией  $c'$ , и «обедненный», с более низкой концентрацией  $c''$ . В отсутствие потерь рабочего вещества, которые могут быть вызваны, например, его частичным разложением в процессе разделения, обогащенный поток будет равен  $L'_3 = \theta L_3$ , а обедненный, соответственно,  $L''_3 = (1 - \theta)L_3$ . Отношение  $\theta = \frac{L'_3}{L_3}$  называют *ко-*

*эффицентом деления потока*, а расход  $L_3$  – *производительностью элемента*. В разделительную ступень параллельно соединяют

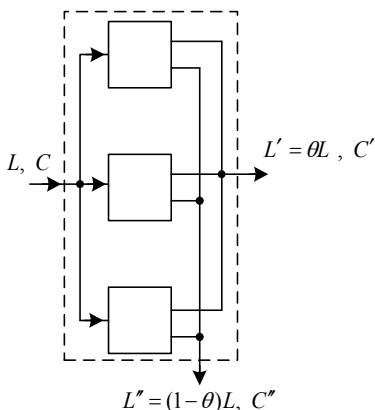


Рис. 1.2. Схема параллельного соединения разделительных элементов в ступень

элементы с одинаковыми величинами  $\theta$ ,  $c$ ,  $c'$  и  $c''$  (рис. 1.2). Она имеет суммарную производительность  $L$  и выходящие потоки  $L' = \theta L$  и  $L'' = (1 - \theta)L$ . Такое представление о работе элементов в ступени предполагает, что все они работают в одинаковых условиях и имеют одинаковые характеристики.

Между приращением  $\delta' = c' - c$  и уменьшением  $\delta'' = c - c''$  концентрации целевого компонента в выходящих потоках разделительного элемента существует определенная

связь. Для стационарного состояния эта связь может быть найдена из следующих уравнений материального баланса:

$$L = L' + L'', \quad (1.1)$$

$$Lc = L'(c + \delta') + L''(c - \delta''). \quad (1.2)$$

Из (1.1) и (1.2) следует, что

$$\delta'' = \frac{L'}{L''} \delta' = \frac{\theta}{1 - \theta} \delta'. \quad (1.3)$$



Одной из основных разделительных характеристик ступени является *полный коэффициент разделения*, который для большинства однофазных методов разделения не зависит от состава изотопной смеси

$$q = \frac{c'}{1 - c'} \bigg/ \frac{c''}{1 - c''} = \frac{R'}{R''}. \quad (1.4)$$

Здесь  $R'$  и  $R''$  - значения относительной концентрации ценного (целевого) изотопа ( $R = \frac{c}{1 - c}$ ) в потоках обогащенной и обедненной фракции. Коэффициент разделения  $q$  характеризует эффект разделения, достигаемый в одном элементе или ступени, и может зависеть от производительности ступени  $L$  и коэффициента деления потока  $\theta$ :

$$q = q(L, \theta), \quad (1.5)$$

где  $q(L, \theta)$  – некоторая функция, которую определяют по результатам теоретических или экспериментальных исследований.

В соответствии со сказанным, к числу основных параметров ступени относятся восемь величин:  $L, L', L'', c, c', c'', q, \theta$ , которые связаны независимыми соотношениями (1.1)–(1.5). Причём из перечисленных параметров свободными (независимыми) являются только три. Как правило, в качестве свободных параметров рассматривают величины  $L, c$  и  $\theta$ . Однако в зависимости от рассматриваемой задачи могут быть выбраны их различные комбинации.

Для удобства анализа эффекта разделения в элементе (ступени) могут быть введены дополнительные параметры и характеристики. Например, коэффициенты разделения по обогащённой  $\alpha$  и обеднённой  $\beta$  фракциям, рассчитываемые как

$$\alpha = \frac{c'}{1 - c'} \bigg/ \frac{c}{1 - c}, \quad \beta = \frac{c}{1 - c} \bigg/ \frac{c''}{1 - c''}. \quad (1.6)$$

Эти параметры характеризуют величину эффекта разделения в обогащённой и обеднённой фракций по отношению к концентрации в потоке питания. Кроме того, для описания процесса разделе-

ния удобно пользоваться коэффициентами обогащения  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$ , равными

$$\varepsilon = q - 1, \quad \varepsilon' = \alpha - 1, \quad \varepsilon'' = 1 - 1/\beta. \quad (1.7)$$

Набор параметров  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  позволяет определить *полное обогащение ступени*

$$\delta = c' - c'' = \delta' + \delta'', \quad (1.8)$$

где  $\delta' = c' - c$ ,  $\delta'' = c - c''$ . Если выразить  $c'$  и  $c''$  из (1.6) и использовать (1.7), то в результате получим

$$\delta' = \frac{\varepsilon'c(1-c)}{1+\varepsilon'c}, \quad \delta'' = \frac{\varepsilon''c(1-c)}{1-\varepsilon''c}. \quad (1.9)$$

Отсюда видно, что при заданных коэффициентах  $\varepsilon'$ ,  $\varepsilon''$  зависимости  $\delta'$  и  $\delta''$  от  $c$  имеют максимумы, не совпадающие друг с другом. В случае «слабого обогащения» ( $\varepsilon = q - 1 \ll 1$ ) наибольшие значения  $\delta'$  и  $\delta''$  достигаются в одной точке  $c = 0,5$ , а формулы (1.9) существенно упрощаются:

$$\delta' = \varepsilon'c(1-c), \quad \delta'' = \varepsilon''c(1-c). \quad (1.10)$$

При подстановке (1.10) в (1.8) имеем

$$\delta = \varepsilon c(1-c), \quad \varepsilon' = \varepsilon(1-\theta), \quad \varepsilon'' = \theta\varepsilon. \quad (1.11)$$

Согласно (1.3) и (1.8) обогащения  $\delta$ ,  $\delta'$ ,  $\delta''$  связаны друг с другом балансовыми соотношениями

$$\delta' = (1-\theta)\delta, \quad \delta'' = \theta\delta. \quad (1.12)$$

Следовательно, если коэффициенты разделения не зависят от параметров  $L$  и  $\theta$ , можно путем уменьшения  $\theta$  повысить концентрацию ценного компонента в обогащённом потоке  $c'$ , произведя таким образом «перераспределение» полного обогащения  $\delta$  в выходных потоках. При этом концентрация в обеднённом потоке  $c''$  будет приближаться к концентрации во входном потоке  $c$ . Очевидно, что возможность такого изменения обогащений  $\delta'$  и  $\delta''$  связана с условиями сохранения материального баланса в раздельном элементе.

## 1.2. Разделительная способность (мощность). Работа разделения. Разделительный потенциал [1-7, 52]

В технологии разделения изотопов понятия работы разделения, разделительной мощности и разделительного потенциала имеют весьма важное значение, так как их использование позволяет, не прибегая к сложным расчетам, оценить необходимое число элементов в каскаде и удельные затраты на производство обогащенного продукта. Количественное определение работы разделения впервые было предложено английскими физиками Пайерлсом и Дираком. Они предположили, что должна существовать функция  $\tilde{U}$ , с помощью которой можно охарактеризовать «ценность» изотопной смеси как в качественном, так и в количественном отношении, и которую можно представить в виде произведения экстенсивной величины – количества разделяемой смеси  $M$  – на интенсивную величину – функцию  $V(c)$ , зависящую только от концентрации ценного изотопа и характеризующую качество смеси

$$\tilde{U} = MV(c). \quad (1.13)$$

Функцию  $V(c)$  было предложено называть *разделительным потенциалом*. Необходимо иметь в виду, что функция  $\tilde{U}$  ничего общего со стоимостным выражением не имеет и поэтому ее не следует смешивать с реальной ценой изотопной смеси.

Процесс разделения смеси в разделительной установке\* для любого метода разделения схематически можно представить следующим образом. До начала процесса имелось некоторое количество исходной смеси  $F^*$  (в ед. массы) с концентрацией ценного изотопа  $c_F$ . С использованием введенных понятий изотопная ценность этой смеси будет определяться значением функции  $\tilde{U}_{F^*} = F^* V(c_F)$ . В результате процесса разделения получают обогащенный продукт в количестве  $P^*$  (в ед. массы) с концентрацией ценного изотопа  $c_P$  и обедненный продукт в количестве  $W^*$  (в ед. массы) с концентрацией  $c_W$ . Изотопная ценность этих продуктов будет  $\tilde{U}_{P^*} = P^* V(c_P)$

---

\* Под разделительной установкой здесь будем понимать разделительный каскад, отдельной ячейкой которого является разделительный элемент.

и  $\tilde{U}_{W^*} = W^*V(c_W)$  соответственно. В результате проведения процесса разделения функция  $\tilde{U}_{F^*}$  изменится на величину  $\Delta\tilde{U}$ :

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{U} &= \tilde{U}_{P^*} + \tilde{U}_{W^*} - \tilde{U}_{F^*} = \\ &= P^*V(c_P) + W^*V(c_W) - F^*V(c_F).\end{aligned}\quad (1.14)$$

Следовательно, «ценность» смеси будет выражаться соотношением

$$F^*V(c_F) + \Delta\tilde{U} = P^*V(c_P) + W^*V(c_W).\quad (1.15)$$

Из соотношения (1.15) следует, что величина  $\Delta\tilde{U}$  характеризует меру усилий, которую необходимо затратить на получение из первоначальной бинарной смеси изотопов два новых продукта – обогащенный и обедненный одним из изотопов этой смеси. Приращение функции  $\tilde{U}$ , характеризующее перераспределение первоначальной массы разделяемого вещества между двумя выходными потоками, и изменение изотопного состава в них при прохождении смеси через разделительную установку, называются *работой разделения*. Введенное понятие работы разделения не имеет ничего общего с реальными энергетическими затратами на поддержание внешних и внутренних потоков в разделительной установке. Из формулы (1.14) следует, что введенная таким образом работа разделения имеет размерность количества вещества.

Отметим также, что величина работы разделения не дает ответ на вопрос о том, за какое время эта работа может быть выполнена на той или иной разделительной установке. Для получения ответа на этот вопрос необходимо знать *разделительную мощность (способность)* установки  $\Delta U$ , то есть работу разделения, выполняемую установкой в единицу времени. Для перехода от  $\Delta\tilde{U}$  к  $\Delta U$  достаточно в соотношении (1.14) вместо  $F^*, P^*, W^*$  подставить величины входящего ( $F$ ) и выходящих ( $P$  и  $W$ ) в установку потоков соответственно.

$$\Delta U = PV(c_P) + WV(c_W) - FV(c_F).\quad (1.16)$$

Для вычисления работы разделения и разделительной способности необходимо знать явный вид функции  $V(c)$ . Пайерлс и Дирак

решили этот вопрос, рассматривая разделительную способность ступени (элемента), которую в соответствии с вышесказанным можно выразить следующим образом

$$\delta U = \theta L V(c') + (1 - \theta) L V(c'') - L V(c). \quad (1.17)$$

В случае слабого разделения ( $q \sim 1$ ) функции  $V(c')$  и  $V(c'')$  можно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки  $c$ , ограничиваясь членами второго порядка малости

$$V(c') \approx V(c) + \frac{dV}{dc} \delta' + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dc^2} (\delta')^2, \quad (1.18)$$

$$V(c'') \approx V(c) - \frac{dV}{dc} \delta'' + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dc^2} (\delta'')^2. \quad (1.19)$$

Подставив их в (1.17), находим

$$\begin{aligned} \delta U = & [\theta L + (1 - \theta)L - L]V(c) + [\theta L \delta' - (1 - \theta)L \delta''] \frac{dV}{dc} + \\ & + \frac{1}{2} [\theta L (\delta')^2 + (1 - \theta)L (\delta'')^2] \frac{d^2 V}{dc^2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Из условий баланса (1.1), (1.2) и (1.12) коэффициенты при  $V(c)$  и  $dV/dc$  равны нулю. Поэтому с учётом (1.11) и (1.12) имеем

$$\delta U = \frac{1}{2} \theta (1 - \theta) L \varepsilon^2 \frac{d^2 V}{dc^2} c^2 (1 - c)^2. \quad (1.21)$$

Пайерлс и Дирак ввели условие, согласно которому разделительная способность (мощность) ступени или элемента определяется только его разделительными характеристиками  $L, \theta, \varepsilon$  и не должна зависеть от состава питающей его смеси. Это условие обосновывается следующим соображением. Если разделительная способность отдельной ячейки установки – разделительного элемента – не зависит от концентрации и все элементы работают в идентичных условиях, т.е. с одинаковыми  $L, \theta, \varepsilon$ , то суммарная разделительная способность элементов, составляющих эту установку, будет равна произведению  $Z \cdot \delta U_{эл}$ , где  $\delta U_{эл}$  – разделительная способность одного элемента,  $Z$  – число элементов в установке. Если процесс разделения организован так, что потери работы разделения (разделительной способности) отсутствуют, то ве-

личина  $Z \cdot \delta U_{эл}$  будет равна разделительной способности всей установки  $\Delta U$ , вычисляемой по формуле (1.16), т.е.

$$\Delta U = Z \cdot \delta U_{эл}. \quad (1.22)$$

Откуда число разделительных элементов в каскаде будет определяться по формуле

$$Z = \frac{\Delta U}{\delta U_{эл}}. \quad (1.23)$$

Таким образом, если условие независимости разделительной способности от концентрации выполнено, то появляется возможность вычислить важную характеристику процесса разделения – суммарное число элементов, обеспечивающих необходимую разделительную способность установки для решения заданной разделительной задачи.

Условие независимости разделительной способности ступени (элемента) от концентрации приводит к следующему уравнению

$$\delta U = \frac{1}{2} \theta (1 - \theta) L \varepsilon^2 \frac{d^2 V}{dc^2} c^2 (1 - c)^2 = \text{const}. \quad (1.24)$$

Если в уравнении (1.24) выбрать постоянную в виде

$$\text{const} = \frac{1}{2} \theta (1 - \theta) L \varepsilon^2, \quad (1.25)$$

то для определения потенциала  $V(c)$  получается дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 V}{dc^2} = \frac{1}{c^2 (1 - c^2)}, \quad (1.26)$$

общее решение которого имеет вид

$$V(c) = (2c - 1) \ln \frac{c}{1 - c} + ac + b. \quad (1.27)$$

Произвольные постоянные в выражении (1.27) должны быть определены дополнительными условиями. Однако нетрудно видеть, что эти постоянные не имеют существенного значения, так как при вычислении работы разделения по формуле (1.15) или разделительной способности по формуле (1.16) они не входят в окончательный результат с учетом уравнений материального баланса. По-

этому, следуя Пайерлсу, можно положить  $a = b = 0$  и тогда потенциал приобретает вид

$$V(c) = (2c - 1) \ln \frac{c}{1 - c}. \quad (1.28)$$

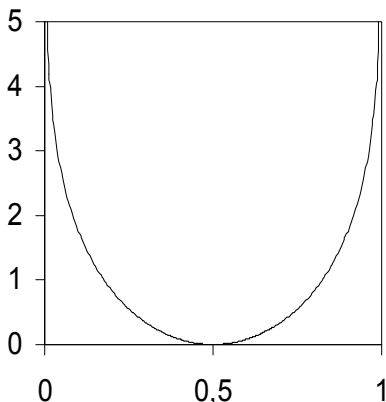


Рис. 1.3. Зависимость разделительного потенциала от концентрации.

В этой форме его обычно называют потенциалом Пайерлса-Дирака. Графический вид функции  $V(c)$  показан на рис. 1.3.

Разделительный потенциал Пайерлса-Дирака и его производная равны нулю при  $c=0,5$ . При любых других значениях концентрации потенциал  $V(c) > 0$ , а при  $c \rightarrow 0$  или  $c \rightarrow \infty$  потенциал  $V(c) \rightarrow \infty$ , что означает необходимость бесконечно большой работы разделения для получения чистых изотопных продуктов.

Таким образом, в случае «слабого обогащения» разделительный потенциал определяется формулой (1.28), а разделительная способность – соотношением (1.25).

Какой физический смысл имеет разделительная способность? Пайерлс и Фукс установили прямую связь величины  $\delta U$  с уменьшением энтропии смеси в единицу времени  $\Delta S_{разд}$ , которая имеет место при стационарной работе разделительной ступени (элемента). Величину  $\Delta S_{разд}$  можно рассчитать из следующих соображений. Энтропия при образовании одного моля смеси идеальных газов или сильно разбавленного раствора из чистых компонентов равна

$$S = -\tilde{R}[c \ln c + (1 - c) \ln(1 - c)], \quad (1.29)$$

где  $\tilde{R}$  – газовая постоянная.

Если из  $L$  молей питающей смеси с концентрацией  $c$  получается на выходе ступени (элемента) в единицу времени  $L' = \theta L$  молей

обогащенного до концентрации  $c'$ , и  $L'' = (1 - \theta)L$  молей, обедненных до концентрации  $c''$ , то изменение энтропии в единицу времени  $\Delta S_{разд}$  будет равно

$$\Delta S_{разд} = -[LS(c) - \theta LS(c') - (1 - \theta)LS(c'')]. \quad (1.30)$$

В случае «слабого обогащения» выражение для  $\Delta S_{разд}$  заметно упрощается, если соотношение (1.30) представить в виде

$$\Delta S_{разд} = \theta LS(c + \delta') + (1 - \theta)LS(c - \delta'') - LS(c). \quad (1.31)$$

Разлагая в ряд функции  $S(c + \delta')$  и  $S(c - \delta'')$  в ряд Тейлора в окрестности точки  $c$  и ограничиваясь членами второго порядка малости, после несложных преобразований получаем

$$\Delta S_{разд} = \frac{\theta(1 - \theta)}{2} \delta^2 \frac{d^2 S}{dc^2}. \quad (1.32)$$

Учитывая, что  $\delta = \varepsilon c(1 - c)$  и  $\frac{d^2 S}{dc^2} = -\frac{\tilde{R}}{c(1 - c)}$ , и подставляя выражение (1.32) в (1.31), получим

$$\Delta S_{разд} = -\frac{\theta(1 - \theta)}{2} L\varepsilon^2 \tilde{R}c(1 - c), \quad (1.33)$$

которое с учетом выражения (1.25) может быть переписано в виде

$$\Delta S_{разд} = -\delta U \cdot \tilde{R}c(1 - c). \quad (1.34)$$

Из полученного выражения (1.34) следует, что величина разделительной способности  $\delta U$  прямо пропорциональна уменьшению величины безразмерной энтропии смеси  $\Delta S_{разд} / \tilde{R}$ . Изменение концентраций компонентов в смеси газов связано с изменением меры порядка. В общем случае мерой порядка служит энтропия. В соответствии с (1.34) уменьшение энтропии при разделении на ступени равно произведению концентраций компонентов изотопной смеси  $c(1 - c)$ . Это произведение определяет вероятность нахождения в смеси пары различных молекул. Вследствие этого разделительная способность ступени равна уменьшению безразмерной энтропии, отнесенной к величине этой вероятности. Таким образом, разделительная ступень увеличивает меру порядка в смеси изото-



пов. Скорость увеличения этой меры определяет разделительную способность ступени.

Перейдем теперь к случаю, когда коэффициент разделения ступени  $q$  заметно отличается от единицы. При произвольных значениях полного коэффициента разделения  $q$  функциональное уравнение

$$\delta U = \theta LV(c') + (1 - \theta)LV(c'') - LV(c) = \text{const} \quad (1.35)$$

имеет решение, при котором функция  $V$  зависит только от концентрации в случае симметричной работы ступени, то есть когда  $\alpha = \beta = \sqrt{q}$  [1].

Если процесс разделения в ступени симметричен, то выполняются условия

$$R' = \alpha R, \quad R'' = \frac{1}{\alpha} R, \quad \theta = \frac{1 + \alpha R}{(\alpha + 1)(1 + R)}, \quad 1 - \theta = \frac{\alpha + R}{(\alpha + 1)(1 + R)}, \quad (1.36)$$

где  $R = \frac{c}{1 - c}$ .

Подставляя (1.36) в (1.35), имеем

$$\frac{\delta U}{L} = \frac{1 + \alpha R}{(\alpha + 1)(1 + R)} V(\alpha R) + \frac{\alpha(1 + \frac{R}{\alpha})}{(\alpha + 1)(1 + R)} V\left(\frac{R}{\alpha}\right) - V(R) = \text{const}. \quad (1.37)$$

Введем новую переменную  $l$  следующим образом

$$R = R_0 \alpha^l, \quad (1.38)$$

где  $R_0$  – константа, и положим, что

$$(1 + R)V(R) \equiv F(l). \quad (1.39)$$

С учетом (1.38) и (1.39) уравнение (1.37) трансформируется в классическое разностное уравнение второго порядка

$$F(l+1) + \alpha F(l-1) - (\alpha + 1)F(l) = A(\alpha + 1)(1 + R_0 \alpha^l), \quad (1.40)$$

где  $A$  – константа.

Общее решение уравнения (1.40) можно представить в виде

$$F(l) = A \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} l (R_0 \alpha^l - 1) + a \alpha^l + b, \quad (1.41)$$

где  $a$  и  $b$  также константы.

Используя выражения (1.37) и (1.41), найдем вид функции  $V(R)$

$$V(R) = A \frac{\alpha + 1}{(\alpha - 1) \ln \alpha} \left[ (2c - 1) \ln \frac{R}{R_0} + a \ln \alpha \frac{c}{R} + b \ln \alpha (1 - c) \right]. \quad (1.42)$$

Выбирая константу  $A$ , равной  $A = \frac{\delta U}{L} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \ln \alpha$ , и полагая, что  $R_0 = 1$ ,  $a = 0$ ,  $b = 0^*$ , получим для разделительного потенциала и разделительной способности следующие выражения

$$V(c) = (2c - 1) \ln \frac{c}{1 - c}, \quad (1.43)$$

$$\delta U = L \frac{(\alpha - 1) \ln \alpha}{\alpha + 1} \equiv L \frac{(\sqrt{q} - 1) \ln \sqrt{q}}{\sqrt{q} - 1}. \quad (1.44)$$

Очевидно, что в случае «слабого обогащения» ( $\epsilon = q - 1 \ll 1$ ) формула (1.44) переходит в формулу (1.25) при  $\theta = 1/2$ . Отметим, что соотношения (1.25), (1.28) и (1.44), полученные на основе подхода Пайерлса – Дирака, полностью подтверждаются результатами теории идеальных каскадов из симметричных ступеней, разработанной К.Коэном [1] (см. раздел 1.6).

В случае несимметричной работы ступени ( $\alpha \neq \beta$ ) при произвольном обогащении на ступени выполнить оба условия Пайерлса – Дирака (разделительный потенциал зависит только от изотопного состава смеси, разделительная способность ступени определяется только характеристиками самой ступени) не удастся. Разделительная способность ступени зависит от коэффициентов разделения ( $\alpha, \beta$ ) и концентрации смеси. Как будет показано ниже, при больших ( $1 - c \ll 1$ ) и малых ( $c \ll 1$ ) концентрациях величина  $\delta U$  от концентрации не зависит. Разделительный потенциал, полученный из решения функционального уравнения (1.35), оказывается зависящим не только от состава смеси, но и коэффициентов разделения ступени, то есть  $V(c, \alpha, \beta)$ .

---

\* Как и в случае «слабого обогащения», эти константы не входят в окончательные выражения для разделительного потенциала и разделительной способности.

На основе разделительного потенциала, записанного в виде (1.28), введены единицы работы разделения изотопов урана (раздел 1.6). В настоящее время его используют и в случае произвольных коэффициентов разделения на ступени, работающие в несимметричном режиме [38, 52]. Теоретическое обоснование подобного подхода, проведенного в различных работах, связано, в частности, с изменением условий Пайерлса-Дирака [5] и рассмотрением идеализированного процесса разделения [10] (см. также раздел 1.6.2).

Исходя из общего соотношения для разделительной способности ступени

$$\delta U = \theta LV(c') + (1 - \theta)LV(c'') - LV(c) \quad (1.45)$$

и разделительного потенциала, определяемого по формуле (1.28), можно найти формулу при всех значениях  $q$  и  $(\alpha \neq \beta)$  [8, 9]. Поскольку

$c = \frac{R}{R+1}$ ,  $2c - 1 = \frac{R-1}{R+1}$ , разделительный потенциал (1.28) может быть представлен в виде

$$V^*(R) = \frac{R-1}{R+1} \ln R, \quad (1.46)$$

где индекс «звездочка» означает то, что разделительный потенциал рассматривается как функция новой переменной  $R$ .

Соотношение для определения разделительной способности ступени запишется в виде

$$\delta U = L[\theta V^*(R') + (1 - \theta)V^*(R'') - V^*(R)]. \quad (1.47)$$

Формулу для определения коэффициента деления потока трудно получить, комбинируя выражения (1.3), (1.7) и (1.9):

$$\theta = \frac{(\beta - 1)[1 + (\alpha - 1)c]}{\alpha\beta - 1}. \quad (1.48)$$

Замена в (1.48) концентрации  $c$  на отношение  $R/(1 - R)$  приводит к выражениям

$$\theta = \frac{(\alpha R + 1)(\beta - 1)}{(R + 1)(\alpha\beta - 1)}, \quad (1.49)$$

$$1 - \theta = \frac{(R + \beta)(\alpha - 1)}{(R + 1)(\alpha\beta - 1)}. \quad (1.50)$$

Подставляя (1.46), (1.49) и (1.50) в (1.47) с учетом  $R' = \alpha R$ ,  $R'' = \frac{1}{\beta} R$  и  $\alpha\beta = q$ , получим

$$\delta U = L \frac{1}{q-1} \left\{ [(\alpha-1)\beta \ln \beta - (\beta-1) \ln \alpha] \frac{1}{R+1} + [(\beta-1)\alpha \ln \alpha - (\alpha-1) \ln \beta] \frac{R}{R+1} \right\} \quad (1.51)$$

Переходя в (1.51) от относительных концентраций  $R$  к абсолютным, окончательно получим

$$\delta U = L[f_1(\alpha, \beta)(1-c) + f_2(\alpha, \beta)c], \quad (1.52)$$

где 
$$f_1(\alpha, \beta) = \frac{(\alpha-1)\beta \ln \beta - (\beta-1) \ln \alpha}{\alpha\beta - 1}, \quad (1.53)$$

$$f_2(\alpha, \beta) = \frac{(\beta-1)\alpha \ln \alpha - (\alpha-1) \ln \beta}{\alpha\beta - 1}. \quad (1.54)$$

Из (1.52) следует, что разделительная способность ступени  $\delta U$  в общем случае является функцией концентрации. Зависимость от концентрации исчезает в следующих частных случаях.

1. Случай «слабого обогащения»,  $\alpha - 1 \ll 1$ ,  $\beta - 1 \ll 1$ . Так как в этом случае  $\alpha$  и  $\beta$  близки к единице, то

$$\ln \alpha \approx (\alpha - 1) - \frac{1}{2}(\alpha - 1)^2 + \dots, \quad (1.55)$$

$$\ln \beta \approx (\beta - 1) - \frac{1}{2}(\beta - 1)^2 + \dots, \quad (1.56)$$

Имея в виду (1.7), (1.11) и (1.12), подставляя (1.55) и (1.56) в (1.52) и сохраняя малые величины 2-ого порядка, имеем

$$\delta U = \frac{L}{2}(\alpha - 1)(\beta - 1) \approx \frac{L}{2} \varepsilon' \varepsilon'' = \frac{\theta(1-\theta)L\varepsilon^2}{2}, \quad (1.57)$$

что соответствует классическому виду для разделительной способности (1.25).

2. Случай симметричной ступени при произвольном на ней обогащении. При  $\alpha = \beta$  (1.52) преобразуется к виду

$$\delta U = L \frac{(\alpha-1)\alpha \ln \alpha - (\alpha-1) \ln \alpha}{\alpha^2 - 1} = L \frac{(\alpha-1) \ln \alpha}{\alpha + 1}, \quad (1.58)$$

что также соответствует классической формуле (1.44).

3. Случай малых концентраций,  $c \ll 1$ . При  $c \ll 1$ ,  $1 - c \approx 1$  выражение (1.52) преобразуется к виду

$$\delta U = L f_1(\alpha, \beta) = L \frac{(\alpha-1)\beta \ln \beta - (\beta-1) \ln \alpha}{\alpha\beta - 1}. \quad (1.59)$$

В рассматриваемом случае выражение (1.49) упрощается

$$\theta = \frac{\beta - 1}{\alpha\beta - 1}. \quad (1.60)$$

Соответственно, величина  $\beta$  равна

$$\beta = 1 + \theta(\alpha\beta - 1). \quad (1.61)$$

Учёт (1.60) и (1.61) и связи  $\alpha\beta = q$  позволяет преобразовать соотношение (1.59) к виду

$$\delta U = L \{ \ln[1 + \theta(q-1)] - \theta \ln q \}. \quad (1.62)$$

Это выражение для разделительной способности имеет важное значение при расчетах каскадов для получения слабообогатщенного урана.

4. В случае больших концентраций, когда выполняется ( $c \approx 1$ ) выражение (1.42) преобразуется к виду

$$\delta U = L f_2(\alpha, \beta) = L \frac{\beta(\alpha-1) \ln \beta - (\beta-1) \ln \alpha}{q-1}. \quad (1.63)$$

В этом случае коэффициент деления потока запишется как

$$\theta = \frac{q(\beta-1)}{\beta(q-1)}, \quad (1.64)$$

а выражение для разделительной способности с учётом соотношения  $q = \alpha\beta$  будет иметь вид

$$\delta U = L \{ \ln[q - \theta(q-1)] - (1-\theta) \ln q \}. \quad (1.65)$$

Коэффициент деления по обеднённой фракции  $\beta$  в формуле для разделительной способности (1.52) можно выразить через  $\alpha$ . Тогда после дифференцирования удельной разделительной способ-

ности  $\delta U / L$  по  $\alpha$  и приравнивания производной нулю, получим квадратное уравнение относительно  $\alpha$  [10, 22]:

$$a\alpha^2 - b\alpha - d = 0, \quad (1.66)$$

в котором  $a = c \frac{\ln q}{q-1}$ ,  $b = 2c - 1$ ,  $d = (1-c) \frac{\ln q}{q-1} q$ .

Квадратное уравнение (1.66) имеет только одно физическое решение, обеспечивающее максимум величины  $\delta U / L$ :

$$\alpha_{\text{опт}} = \frac{q}{\beta_{\text{опт}}} = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4ad}}{2}. \quad (1.67)$$

Нетрудно видеть, что, во-первых, решение (1.67) зависит от величин  $q$  и  $c$ , а, во-вторых, независимо от величины  $q$  при  $c = 0,5$  максимальное значение  $\alpha_{\text{опт}}$  будет равно  $\alpha_{\text{опт}} = \sqrt{q}$ . Следовательно, максимум удельной разделительной способности ступени при значении концентрации  $c = 0,5$  достигается в соответствии (1.67) при симметричном режиме работы ступени, то есть при условии  $\alpha = \beta$ . При концентрациях, отличных от 0,5, максимум удельной разделительной способности не соответствует симметричному режиму работы разделительной ступени. Для интересного для практики случая  $c \ll 1$  (получение слабообогащённого урана) отыскание максимума функции приводит к следующим значениям [11]

$$\theta_{\text{опт}} = \frac{1}{\ln q} - \frac{1}{q-1}, \quad (1.68)$$

$$\alpha_{\text{опт}} = \frac{q}{\beta_{\text{опт}}} = \frac{q \ln q}{q-1}, \quad (1.69)$$

$$\left( \frac{\delta U}{L} \right)_{\text{max}} = \ln \left[ \frac{(q-1)}{\ln q} \right] + \frac{\ln q}{q-1} - 1. \quad (1.70)$$

Отметим, что выражение (1.69) для  $\alpha_{\text{опт}}$  может быть получено из (1.67) подстановкой условия  $c \ll 1$ .

В табл. 1.1 приведены величины  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\delta U / L$  разделительной ступени для симметричного случая ( $\alpha = \beta$ ) и случая, ко-

гда ступень работает с оптимальной величиной  $\theta$  в зависимости от величины  $q$  при малых концентрациях ценного компонента ( $c \ll 1$ ).

Таблица 1.1

Характеристики разделительной ступени каскада при симметричном и оптимальном разделении для различных значений  $q$  и  $c \ll 1$

|  |                       |        |        |        |        |
|--|-----------------------|--------|--------|--------|--------|
| $q$  | 1,1                   | 1,6    | 3,0    | 5,0    | 10,0   |
| $\theta_{\text{сим}}$  | 0,488                 | 0,441  | 0,366  | 0,309  | 0,240  |
| $\theta_{\text{опт}}$  | 0,492                 | 0,461  | 0,401  | 0,371  | 0,323  |
| $\alpha_{\text{сим}}$  | 1,0488                | 1,2649 | 1,7320 | 2,2361 | 3,1623 |
| $\alpha_{\text{опт}}$  | 1,0484                | 1,2532 | 1,6780 | 2,0118 | 2,5584 |
| $\beta_{\text{сим}}$   | 1,0488                | 1,2649 | 1,7320 | 2,2361 | 3,1623 |
| $\beta_{\text{опт}}$   | 1,0492                | 1,2766 | 1,8204 | 2,4853 | 3,9087 |
| $(\delta U / L)_{\text{сим}}$  | $1,134 \cdot 10^{-3}$ | 0,0275 | 0,1471 | 0,3075 | 0,5980 |
| $(\delta U / L)_{\text{макс}}$   | $1,135 \cdot 10^{-3}$ | 0,0276 | 0,1483 | 0,3128 | 0,6190 |
| $\frac{(\delta U / L)_{\text{макс}} - (\delta U / L)_{\text{сим}}}{(\delta U / L)_{\text{сим}}}, \%$ | 0,088                 | 0,364  | 0,817  | 1,723  | 3,512  |

Видно, что с возрастанием  $q$  увеличивается разница между максимально возможным значением  $(\delta U / L)_{\text{макс}}$ , получаемым при  $\alpha \neq \beta$ , и  $(\delta U / L)_{\text{сим}}$ , соответствующим симметричному разделению в ступени.

Как будет показано в разделе 1.8, рассмотренные особенности разделения существенны для анализа эффективности работы многоступенчатых установок.

### 1.3. Основные принципы каскадирования.

#### Типы разделительных каскадов [1-5, 7]

Для получения требуемых концентраций ценного (целевого) изотопа ступени соединяют в последовательную цепочку – каскад, умножающий эффект разделения в одиночной разделительной ступени. Простейшей схемой последовательного соединения ступеней является так называемый *простой каскад* (рис. 1.4). Его отличительным признаком является подача обогащенной фракции на питание следующей ступени и выведение потоков обедненной фракции ступеней из процесса дальнейшей переработки. В такой схеме поток питания каскада  $F$  (от английского слова Feed) подают в первую ступень, поток отбора  $P$  (Product) является потоком обогащенной фракции последней  $n$ -й ступени. Отвальный поток каскада  $W$  (Waste) образуют обедненные потоки ступеней (могут не смешиваться друг с другом). Так как эти потоки не участвуют в процессе обогащения, то простой каскад, по существу, является прямоточным. Для разделения изотопов, когда разделяемое вещество, как правило, является дорогим, простой каскад является неэффективным. Это обусловлено существенным сокращением потоков питания ступеней и выведением в отвал потоков с концентрацией ценного (целевого) изотопа, близкой к концентрации в обогащенных фракциях. Поэтому при разделении изотопов применяют более эффективную с точки зрения экономии сырья, а также имеющую ряд других преимуществ, противоточную (рециркуляционную) схему, в которой обедненная ценным компонентом фракция возвращается в каскад для дальнейшей переработки. Простейшая схема такого каскада приведена на рис. 1.5. В этой схеме обогащенный поток  $L'_s = \theta_s L_s$  из произвольной  $s$ -й ступени подается на вход последующей  $s + 1$ -й ступени, а обедненный  $L''_s = (1 - \theta_s)L_s$  – на вход  $s - 1$ -й ступени. При таком соединении на входе в  $s$ -ю ступень смешиваются потоки из предыдущей  $s - 1$ -й ступени и из последующей  $s + 1$ -й. Такой каскад является *противоточным*, а способ



соединения ступеней с помощью внешних коммуникаций, т.е. таких коммуникаций, в которых передаются уже разделенные потоки, называют *внешним каскадированием*.

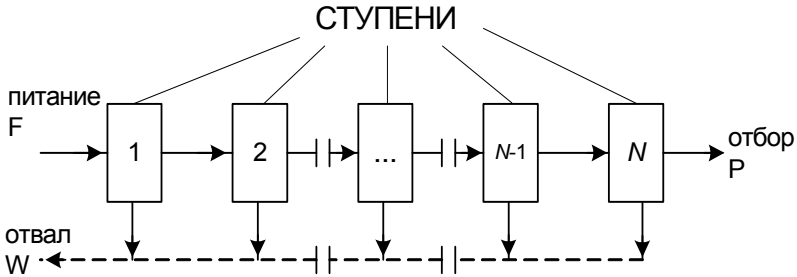


Рис. 1.4. Схема простого каскада

Изображенная на рис. 1.5. схема характерна тем, что между любыми соседними ступенями можно провести поперечное сечение (на рисунке изображено двойной пунктирной линией), пересекающее только две коммуникации. Такой каскад называют *симметричным*.

Если потоки направляют не в соседние предыдущую и последующую ступени, а через одну или через несколько ступеней, то такой противоточный каскад называется *несимметричным* (рис. 1.6).

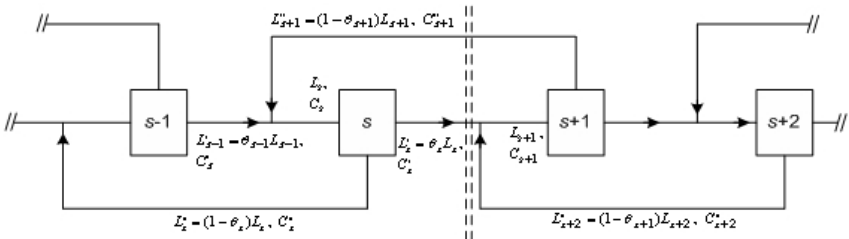


Рис. 1.5. Схема соединения ступеней в симметричном противоточном каскаде

Отметим, что при внешнем каскадировании разделительная ступень считается заданной ячейкой схемы, для которой коэффициент разделения и его зависимость от коэффициента деления потоков должны быть известны, после чего сам процесс разделения оказы-

вается для построения каскадов несущественным. Тем самым теория построения «внешних» потоков оказывается независимой от конкретного метода разделения.

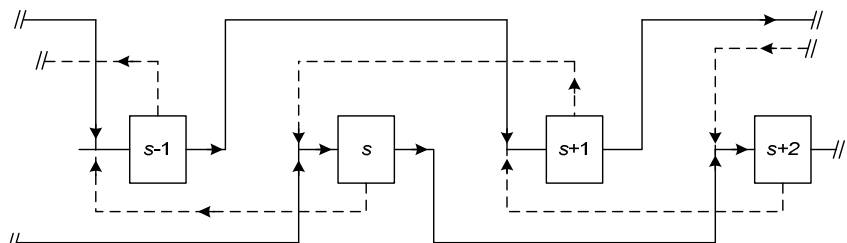


Рис. 1.6. Пример соединения ступеней в несимметричный каскад с подачей потока питания через одну ступень в прямом направлении

#### 1.4. Основные параметры и уравнения симметричного противоточного каскада

Рассмотрим симметричный каскад, состоящий из  $N$  ступеней.

Пусть на вход ступени с номером  $s = f$  подают поток питания  $F$  с концентрацией  $c_F$ . Поток, обогащенный ценным (целевым) изотопом, отбирается с правого конца каскада ( $s = N$ ) (сокращенно отбор), а обедненный поток – с левого конца каскада ( $s = 1$ ) (сокращенно отвал). Соответственно обозначим концентрации в потоках отбора  $c_P$  и отвала  $c_W$ . Ступени каскада нумеруются последовательно от 1 на отвале до  $N$  на отборе. Часть каскада от точки подачи питания ( $s = f, f + 1, \dots, N$ ) называется отборной, а часть слева ( $s = 1, 2, \dots, f - 1$ ) – отвальной.

В симметричной противоточной схеме можно использовать частичный или полный возврат обогащённых или обеднённых потоков отбора или отвала на вход соответствующей ступени ( $s = N$  или  $s = 1$ ). Такие коммутации потоков называют «закрутками» и обычно их применяют на конечных ступенях каскада [5] (рис. 1.8).

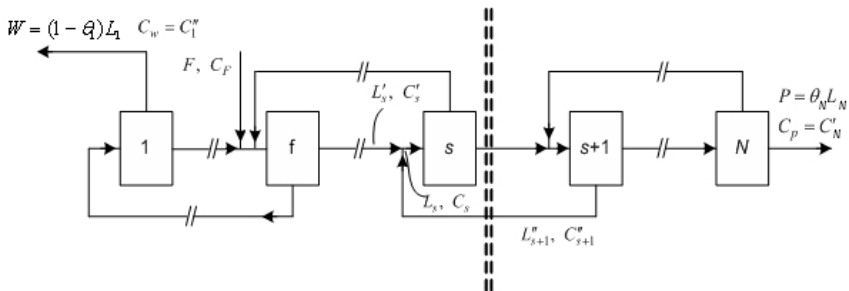


Рис. 1.7. Схема симметричного каскада для разделения бинарных смесей

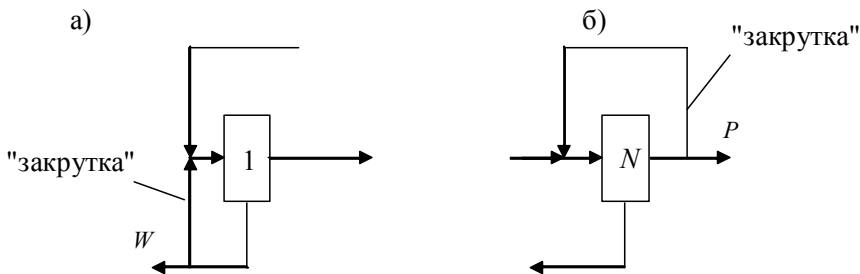


Рис. 1.8. Схемы закруток потоков : а) – на отвале; б) – на отборе

Внешними параметрами каскада являются шесть переменных, определяющие внешние рабочие условия:  $F$ ,  $P$ ,  $W$  – потоки питания, отбора и отвала каскада;  $c_F$ ,  $c_P$ ,  $c_W$  – концентрации в соответствующих потоках. К внутренним относятся:  $N$  – общее количество ступеней в каскаде,  $f$  – номер ступени, на вход которой подают поток питания, параметры ступеней:  $L_s$ ,  $L'_s$ ,  $L''_s$  – входной и два выходных потока на  $s$ -ой ступени каскада,  $c_s$ ,  $c'_s$ ,  $c''_s$  – концентрации в соответствующих потоках;  $q_s$ ,  $\alpha_s$ ,  $\beta_s$  – коэффициенты разделения и  $\theta_s$  – коэффициенты деления потоков ( $s = \overline{1, N}$ ).

В стационарном состоянии каскада внутренние параметры каскада можно выразить через внешние параметры каскада и уравнения разделения в ступени. Проведем поперечное сечение между некоторой  $s$ -й ступенью и соседней с ней  $s+1$ -й ступенью отборной части каскада (обозначено на рис. 1.7 пунктиром) и рассмотрим

часть каскада, находящуюся справа от этого мысленного сечения. Потoki разделяемого вещества и потоки ценного (целевого) изотопа, входящие в эту часть каскада  $L'_S = \theta_S L_S$  и  $L'_S c'_S = \theta_S L_S c'_S$  и выходящие из нее  $L''_{S+1} = (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}$  и  $L''_{S+1} c''_{S+1} = (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1} c''_{S+1}$ , связаны уравнениями материального баланса:

$$\theta_S L_S - (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1} = P, \quad (1.71)$$

$$\theta_S L_S c'_S - (1 - \theta_{S+1}) L_{S+1} c''_{S+1} = P c_P. \quad (1.72)$$

В этих уравнениях через  $c'_S$  и  $c''_S$  обозначены концентрации ценного (целевого) изотопа соответственно на выходах из ступени.

Аналогичные соотношения можно записать для отвалной части каскада

$$\theta_s L_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} = -W, \quad (1.73)$$

$$\theta_s L_s c'_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_{s+1} = -W c_W. \quad (1.74)$$

Для ступени с номером  $s=f$ , на вход которой подают поток питания  $F$ , уравнения материального баланса имеют вид

$$L_f = \theta_{f-1} L_{f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} + F, \quad (1.75)$$

$$L_f c_f = \theta_{f-1} L_{f-1} c'_{f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} c''_{f+1} + F c_F. \quad (1.76)$$

При использовании формул (1.71) – (1.74) следует иметь в виду, что  $L_0 = 0$  и  $L_{N+1} = 0$ . Концентрации  $c_S$ ,  $c'_S$  и  $c''_S$  на каждой ступени связаны соотношениями (1.4), (1.6), (1.7), а внешние параметры при отсутствии потерь вещества в ступенях каскада должны удовлетворять уравнениям материального баланса:

$$F = P + W, \quad (1.77)$$

$$F c_F = P c_P + W c_W. \quad (1.78)$$

Вводя для разности концентраций на входах двух произвольных соседних ступеней обозначение

$$\Delta_S = c_{S+1} - c_S, \quad (s = 1, N - 1) \quad (1.79)$$

и, вычитая соотношение (1.71), умноженное на  $c_S$ , из (1.72), получим

$$\Delta_S = \frac{\theta_S L_S}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}} \delta'_S + \delta''_{S+1} - \frac{P(c_P - c_S)}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}}, \quad (1.80)$$

где величины  $\delta'_S = c'_S - c_S$  и  $\delta''_S = c_S - c''_S$  определяются соотношениями (1.9), (1.7). Для отвальнoй части каскада справедливы точно такие же уравнения, только в правой части вместо  $P$  и  $Pc_P$  следует подставлять  $Wc_W$  и  $-Wc_W$ , т.е.

$$\Delta_S = \frac{\theta_S L_S}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}} \delta'_S + \delta''_{S+1} - \frac{W(c_S - c_W)}{(1 - \theta_{S+1}) L_{S+1}} \quad (1.81)$$

С помощью уравнений (1.71) – (1.78) можно рассчитать распределения концентраций и коэффициентов деления потоков по ступеням каскада, если известны коэффициенты разделения  $q_S$ ,  $\alpha_S$ ,  $\beta_S$  и полное число ступеней в каскаде  $N$ , номер ступени  $f$ , в которую вводится поток питания, и зависимость потока  $L_S$  от номера ступени. Подобного рода задачи обычно решают численными методами с применением ЭВМ.

В случае «слабого обогащения», когда величина обогащения мала по сравнению с концентрацией во входящем в ступень потоке, т.е.  $\delta_S / c_S \ll 1$  система уравнений, определяющих каскад (1.73) – (1.76) или (1.80) – (1.81) может быть подвергнута значительным упрощениям.

Если обогащение на ступени мало, то для получения на каскаде требуемых изменений концентраций, как правило, нужно большое число ступеней ( $N \gg 1$ ), т.е. каскад должен быть «длинным». В этом случае можно считать, что все параметры каскада от ступени к ступени изменяются незначительно, а величина потока изотопной смеси, проходящего через произвольную ступень, намного превосходит величину потока отбора, т.е.  $L_S \approx L_{S+1}$ ,  $\delta'_S \approx \delta'_{S+1}$ ,  $\delta''_S \approx \delta''_{S+1}$ ,  $\vartheta_S \approx \vartheta_{S+1}$  и  $P/L_S \ll 1$ . Так как число ступеней в каскаде велико, а изменение параметров при переходе от ступени к ступени мало, то можно представить  $s$  как непрерывно меняющуюся переменную, а параметры каскада  $L$ ,  $\theta$ , и  $N$  непрерывными функциями от этой переменной.

С учетом сказанного, из уравнения баланса (1.71) следует  $\theta_s \approx 1 - \theta_s$ , т.е.

$$\theta_s \cong \frac{1}{2} \quad (1.82)$$

Условие (1.82) выражает основное свойство симметричного каскада с малым обогащением на отдельной ступени. Потоки в ступенях этого каскада делятся почти пополам. Полагая в (1.80)  $\theta_s \approx \frac{1}{2}$ ,  $L_s \approx L_{s+1}$ ,  $\delta'_s \approx \delta'_{s+1}$ ,  $\delta''_s \approx \delta''_{s+1}$  и учитывая, что согласно (1.8), (1.10) – (1.12)

$$\delta'_s = \delta''_s = \frac{1}{2} \varepsilon c_s (1 - c_s), \quad (1.83)$$

получим

$$\Delta_s = \varepsilon c_s (1 - c_s) - \frac{P(c_p - c_s)}{\frac{1}{2} L_{s+1}} \quad (1.84)$$

Считая параметры каскада непрерывными функциями от переменной  $s$  и заменяя  $\Delta_s$  на  $\frac{dc}{ds}$ , перепишем предыдущее соотношение в виде

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon c (1 - c) - \frac{2P(c_p - c)}{L}, \quad (1.85)$$

где  $c = c(s)$  и  $L = L(s)$  - соответственно распределение концентраций и потоков вдоль каскада.

Соответствующее уравнение для отборной части каскада будет иметь вид

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon c (1 - c) - \frac{2W(c - c_w)}{L}. \quad (1.86)$$

При этом потоки отбора, отвала и питания и концентрации в этих потоках по-прежнему связаны двумя уравнениями баланса (1.77) и (1.78). Минимальный поток питания для каждой ступени, соответствующий данному отбору  $P$  и концентрации  $c_p$ , можно

найти из условия равенства нулю градиента концентрации (1.85), т.е.

$$\left(\frac{\varepsilon L}{2P}\right)_{\min} = \frac{c_p - c}{c(1-c)}. \quad (1.87)$$

Уравнение (1.85) можно рассматривать как частный случай общего уравнения (1.80) для приращения концентраций в применении к случаю «слабого обогащения». Решение задачи в этом случае гораздо проще, потому что вместо уравнения (1.80) в конечных разностях имеем обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка и еще потому, что для нахождения распределения концентраций в каскаде с заданным распределением потоков  $L_S$  достаточно проинтегрировать только одно уравнение.

Наибольшие изменения концентраций при переходе от одной ступени к другой имеют место в безотборном режиме, когда  $P = W = F = 0$ . Такой режим можно организовать в заполненном разделяемой смесью каскаде при наличии «закруток» на концевых ступенях. Поскольку в этом случае  $c'_S = c'_{S-1}$ , то

$$R'_1 = q_1 R''_1, \quad (1.88)$$

$$R'_S = q_S R''_S, \quad (1.89)$$

и степень разделения в каскаде  $Q = R'_N / R''_1$  достигает максимальной величины

$$Q = \prod_{S=1}^N q_S, \quad (1.90)$$

где  $R'_N$  и  $R''_1$  – относительные концентрации ценного (целевого) изотопа на концах каскада. Если все ступени в каскаде имеют одинаковые полные коэффициенты разделения, т.е.  $q_S \equiv q$ , то соотношение (1.90) может быть преобразовано к виду

$$N = \ln Q / \ln q, \quad (1.91)$$

известному как формула Фенске [12]. Она определяет минимально возможное число ступеней, необходимое для достижения заданного значения степени разделения каскада. Характерно, что число

ступеней в каскаде  $N$  не зависит от формы каскада, т.е. конкретного распределения  $L_S$ .

В случае слабых одинаковых обогащений на ступенях из (1.85) и (1.86) для безотборного режима каскада имеем

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon c(1 - c), \quad (1.92)$$

откуда после интегрирования получаем экспоненциальный закон изменения концентраций по ступеням

$$R_2 = R_1 \exp(\varepsilon s_{12}), \quad (1.93)$$

где  $R_1, R_2$  – относительные концентрации ступеней, работающих на участке каскада, определяемых концентрациями  $c_1$  и  $c_2$ ;  $s_{12}$  – соответствующее количество ступеней. В режимах работы каскада с непрерывным отбором и отвалом ( $P \neq 0, W \neq 0$ ) изменения концентраций на ступенях, а, следовательно, и степень разделения каскада будут меньше.

### 1.5. Критерии эффективности работы каскада

В задачах проектирования каскадов целесообразно определять их параметры, исходя из принятого критерия эффективности. Возможны два принципиальных подхода к выбору критериев.

Первый подход предполагает, что параметры ступеней могут быть выбраны из физических соображений, не связанных непосредственно с поставленной целью разделения. Физический критерий эффективности выражается требованием, чтобы энтропия при соединении потоков на входе каждой ступени не возрастала, т.е. чтобы термодинамическая работа, связанная с изменением концентрации при разделении смеси, не терялась. Для этого необходимо, чтобы концентрации различных потоков на входе в каждую ступень были одинаковыми. Для каскада с тремя внешними потоками, представленного на рис. 1.5, это соответствует выполнению условий

$$\begin{aligned} c'_{S-1} = c_S = c''_{S+1}, \\ c_f = c_F, \end{aligned} \quad (1.94)$$



или

$$\begin{aligned} R'_{S-1} &= R_S = R''_{S+1}, \\ R_f &= R_F. \end{aligned} \quad (1.95)$$

Соотношения (1.94), (1.95) называются условиями несмещения, а каскад, удовлетворяющий этим требованиям, – *идеальным*.

В другом подходе определяют практические потребности изотопного производства. Создание крупного разделительного предприятия (завода) связано с минимизацией удельных материальных затрат на производство обогащенного продукта. Эта задача весьма сложная в силу того, что необходимо определить большое число параметров, влияющих на затраты производства. Задачу оптимизации каскада можно упростить, учитывая специфику метода разделения. В общем случае задача оптимизации может быть записана в виде

$$\psi = \psi(u_1, u_2, \dots, u_k) \rightarrow \min(\max), \quad (1.96)$$

где  $\Psi$  - целевая функция (показатель эффективности);  $u_1, u_2, \dots, u_k$  - независимые параметры каскада;  $\min(\max)$  - значение целевой функции (минимум или максимум) при оптимальных значениях независимых параметров. При использовании молекулярно-кинетических методов разделения удельные затраты на производство обогащённого продукта, как правило, пропорциональны суммарному количеству элементов в каскаде. В соответствии с этим при заданных внешних параметрах в качестве критерия оптимизации можно принять минимум суммарного количества разделительных элементов:

$$\Psi = \sum_{s=1}^N Z_S \rightarrow \min, \quad (1.97)$$

где  $Z_S$  – число разделительных элементов в  $s$ -й ступени каскада.

Величина  $\sum_{s=1}^N Z_S$  при работе элементов с заданными одинаковыми

потоками  $L_{\text{Э}}$  может быть представлена в виде

$$\sum_{s=1}^n Z_S = \frac{\sum_{s=1}^N L_S}{L_{\text{Э}}}. \quad (1.98)$$

и, следовательно, в этом случае целью оптимизации является минимизация суммарного потока питания ступеней

$$\psi = \sum_{s=1}^N L_s \rightarrow \min . \quad (1.99)$$

Данный критерий предусматривает, что все внешние параметры каскада варьируются в допустимой области их изменения до получения минимального суммарного потока. Каскад, отвечающий требованию (1.99), будем называть *оптимальным*.

## 1.6. Идеальный каскад для разделения бинарной изотопной смеси [1-5, 13-15, 19]

### 1.6.1. Основные уравнения симметричного идеального каскада. Классификация идеальных каскадов

Условие (1.94) позволяет однозначно определить распределение потоков в идеальном каскаде. Перепишем условие (1.94) в виде двух равенств:

$$\delta'_{S-1} = \Delta_{S-1}, \quad \Delta_S = \delta''_{S+1}. \quad (1.100)$$

или, в первом из них, смещая индексы и используя в виде единого соотношения, получим

$$\delta'_S = \Delta_S = \delta''_{S+1}. \quad (1.101)$$

Подставляя (1.101) в (1.80) и обозначая поток в идеальном каскаде через  $L_S^*$ , получим

$$L_S^* = \frac{P(c_p - c_s)}{\theta_s \delta'_s}, \quad (1.102)$$

$$s = f, \quad f+1, \dots, \quad N-1,$$

$$L_N^* = \frac{P}{\theta_N}. \quad (1.103)$$

Аналогично распределение потоков в отвальной части идеального каскада можно представить в виде

$$L_S^* = \frac{W(c_s - c_w)}{\theta_s \delta'_s}, \quad (1.104)$$

$$L_1^* = \frac{W}{1 - \theta_1}. \quad (1.105)$$

Величина обогащения на ступени  $\delta'_S$  определяется соотношением (1.9), а коэффициент деления потоков формулой (1.48). Таким образом, систему уравнений, позволяющую рассчитывать распределения концентраций, коэффициентов деления потоков и расходов в идеальном каскаде, можно представить в виде:

$$\Delta_S = c_{S+1} - c_S = \frac{(\alpha_S - 1)c_S(1 - c_S)}{1 + (\alpha_S - 1)c_S} = \frac{\varepsilon'_S c_S(1 - c_S)}{1 + \varepsilon'_S c_S}, \quad (1.106)$$

$$\theta_S = \frac{(\beta_S - 1)[1 + (\alpha_S - 1)c_S]}{q_S - 1} = \frac{\varepsilon''_S(1 + \varepsilon'_S c_S)}{(1 - \varepsilon''_S)\varepsilon_S}, \quad (1.107)$$

$$L_S^* = \frac{P(c_P - c_S)}{\theta_S \delta'_S} \text{ - для отборной части каскада,} \quad (1.108)$$

$$L_S^* = \frac{W(c_S - c_W)}{\theta_S \delta'_S} \text{ - для отвальной части каскада,} \quad (1.109)$$

с граничными условиями

$$\theta_N L_N^* = P, \quad c'_N = c_P, \quad (1.110)$$

$$(1 - \theta_1)L_1^* = W, \quad c''_1 = c_W. \quad (1.111)$$

Кроме того, к условиям (1.110), (1.111) необходимо добавить условие несмещения концентраций на входе в ступень питания  $c_F = c_f$ .

Обратим внимание на тот факт, что система (1.106) - (1.109) записана в конечных разностях и её следует решать "шаг за шагом".

Наиболее изученными и имеющими практическое значение являются свойства идеального каскада при малых обогащениях на отдельных ступенях (случай слабого обогащения).

### **1.6.2. Идеальный каскад с малым обогащением на ступени (случай слабого обогащения) [1-5, 7, 8]**

В случае «слабых обогащений» на ступенях формулы (1.106)-(1.109) упрощаются. Тогда с учетом (1.82), (1.10) – (1.12) и факта,

что параметры каскада от ступени к ступени изменяются непрерывно, система (1.106) - (1.109) приводится к виду:

$$\frac{dc}{ds} = \frac{1}{2} \varepsilon c(1-c), \quad (1.112)$$

$$\theta \approx \frac{1}{2}, \quad (1.113)$$

$$L^* = \frac{4P(c_P - c)}{\varepsilon c(1-c)} \quad (1.114)$$

для отборной части каскада и

$$L^* = \frac{4W(c - c_W)}{\varepsilon c(1-c)}, \quad (1.115)$$

для отвальной части каскада.

Из уравнения (1.112) следует, что градиент концентрации в идеальном каскаде вдвое меньше, чем при безотборном режиме работы каскада.

Уравнение (1.112) легко интегрируется и дает распределение  $c(s)$ , а уравнения (1.114) и (1.115) дают распределения  $L^*(s)$ , выраженные через параметр  $c(s)$ . Уравнения (1.112) - (1.115) называют уравнениями *идеального симметричного каскада*. Как видно из (1.112) и (1.115), потоки  $L^*$  обратно пропорциональны  $\varepsilon$ . Этот факт существенен для практики. Так, для газодиффузионного метода разделения  $\varepsilon \sim 10^{-3}$  [3, 7] и, следовательно, потоки (производительности) ступеней должны в тысячи раз превышать потоки отбора  $P$  и отвала  $W$ . Интегрирование уравнения (1.112) для любого интервала концентраций  $c_1 \leq c \leq c_2$  дает соответствующее число ступеней

$$s_{12} = \frac{2}{\varepsilon} \ln \frac{c_2/1-c_2}{c_1/1-c_1}. \quad (1.116)$$

Полагая  $c_1$  равным  $c_W$  или  $c_F$  и  $c_2$  равным  $c_F$  или  $c_P$ , можно получить формулы для расчета числа ступеней в отвальной и отборной частях каскада соответственно.

На рис. 1.9 показана зависимость потока питания ступеней от концентрации. Выбранный случай характерен для разделения изотопов урана и других элементов с низким содержанием ценного компонента

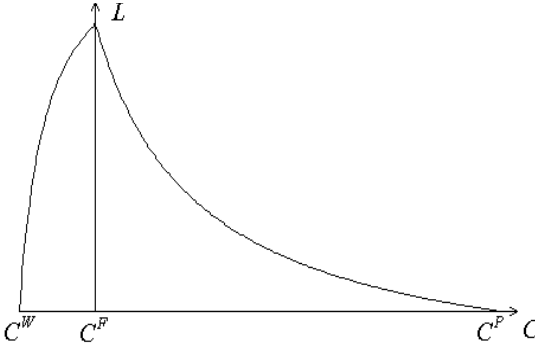


Рис. 1.9. Зависимость потока  $L^*$  от концентрации

$c_F \ll 1$ . В секции обогащения изменение потоков (формула (1.114)) имеет гиперболический характер. Потоки уменьшаются от ступени питания в сторону отбора с постоянно снижающейся скоростью. В отличие от этого в

секции обеднения небольшое уменьшение вблизи ступени питания сменяется резким спадом у отвала каскада.

Закономерен вопрос: соответствует ли идеальному каскаду наименьший суммарный поток? Для ответа на него вычислим сумму  $\sum L$  в обогащительной части каскада (в отвальной части каскада, как нетрудно убедиться, результат будет аналогичен).

$$\begin{aligned} \sum L &= \int_{c_F}^{c_P} \frac{Ldc}{dc/ds} = \int_{c_F}^{c_P} \frac{L(c)dc}{\varepsilon c(1-c) - \frac{2P(c_P-c)}{L(c)}} = \\ &= \int_{c_F}^{c_P} \frac{2L^2(c)dc}{\varepsilon c(1-c)[2L(c) - L^*(c)]} \end{aligned} \quad (1.117)$$

В этой формуле внешние параметры каскада  $P$ ,  $c_P$ ,  $c_F$  (в отвальной части также  $c_W$ ) следует считать заданными. Интеграл (1.117) будет иметь минимальное значение, если при любом возможном значении концентрации  $c$  подынтегральная функция минимальна. Отсюда следует, что для нахождения оптимального по-

тока в отборной части каскада следует воспользоваться следующим уравнением

$$\frac{d}{dL} \left( \frac{L^2}{2L - L^*} \right) = 0. \quad (1.118)$$

Из (1.118) следует, что

$$L_{\text{опт}} = L^*. \quad (1.119)$$

Таким образом, в соответствии с равенством (1.119) в случае слабого обогащения идеальный каскад обладает свойством оптимальности. Его суммарный поток и распределение потоков по ступеням соответствует каскаду, оптимальному по критерию минимума суммарного потока. Полученные результаты позволяют без особых трудностей выразить  $\sum L^*$  в идеальном каскаде через внешние параметры каскада. Для нахождения суммарного потока  $\sum L^*$  следует вычислить интеграл, подобный (1.117), для всего идеального каскада, включая отвальную часть:

$$\begin{aligned} I_P &= \int_{C_F}^{C_P} \frac{L^*}{\left( \frac{dc}{ds} \right)_{u\partial}} dc = \int_{C_F}^{C_P} \frac{8P(c_P - c)}{\varepsilon^2 c^2 (1 - c)^2} dc = \\ &= \frac{8P}{\varepsilon^2} \left[ (2c_P - 1) \ln \frac{c_P(1 - c_F)}{c_F(1 - c_P)} + \frac{(1 - 2c_F)(c_P - c_F)}{c_F(1 - c_F)} \right], \quad (1.120) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_W &= \int_{C_F}^{C_P} \frac{L^*}{\left( \frac{dc}{ds} \right)_{u\partial}} dc = \int_{C_F}^{C_P} \frac{8W(c - c_W)}{\varepsilon^2 c^2 (1 - c)^2} dc = \\ &= \frac{8W}{\varepsilon^2} \left[ (2c_W - 1) \ln \frac{c_W(1 - c_F)}{c_F(1 - c_W)} + \frac{(1 - 2c_F)(c_W - c_F)}{c_F(1 - c_F)} \right]. \quad (1.121) \end{aligned}$$

Складывая (1.120) и (1.121) и учитывая общие соотношения (1.77) и (1.78), получим после алгебраических упрощений

$$\sum L^* = \frac{8}{\varepsilon^2} \left[ \begin{array}{l} P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1 - c_p} + W(2c_w - 1) \ln \frac{c_w}{1 - c_w} \\ -F(2c_f - 1) \ln \frac{c_f}{1 - c_f} \end{array} \right]. \quad (1.122)$$

Используя формулу (1.28) для разделительного потенциала, (1.122) можно переписать в виде

$$\sum \frac{L^* \varepsilon^2}{8} = PV(c_p) + WV(c_w) - FV(c_f). \quad (1.123)$$

Соотношение (1.123) имеет фундаментальное значение в теории каскадов. Его левая часть представляет собой сумму разделительных способностей ступеней, образующих идеальный каскад, и определяется их разделительными характеристиками. Правая часть

$$\Delta U = P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1 - c_p} + W(2c_w - 1) \ln \frac{c_w}{1 - c_w} - F(2c_f - 1) \ln \frac{c_f}{1 - c_f}$$

определяется внешними параметрами. Разделительные характеристики в это выражение не входят. Поэтому правая часть может рассматриваться как внешняя нагрузка, на которую работает каскад. Согласно (1.123), сумма разделительных способностей ступеней идеального каскада должна равняться внешней нагрузке, которую можно интерпретировать как полезную разделительную работу в единицу времени (разделительную способность), которую совершает каскад. Выражение (1.123) легко получить исходя непосредственно из понятия разделительной способности ступени и связанного с ним соотношения (1.17). Это соотношение для произвольной  $s$ -й ступени каскада можно переписать в виде

$$\delta U_s = \theta_s L_s V(c_s + \delta'_s) + (1 - \theta_s) L_s V(c_s - \delta''_s) - L_s V(c_s). \quad (1.124)$$

Просуммируем (1.124) по всем ступеням каскада. Поскольку в каскаде отсутствуют потери на смешение, то левая часть соотношения (1.124) будет представлять собой суммарную разделительную способность всех ступеней каскада, т.е.  $\sum \delta U_s$ . При суммировании выражения в правой части следует учитывать, что при соединении потоков в идеальном каскаде концентрации в них должны быть одинаковыми и что, следовательно, каждому потоку, исходящему из одной ступени, будет соответствовать поток, входя-

щий в другую ступень (но с обратным знаком). При суммировании все внутренние потоки пропадут и останутся три внешних –  $W$ ,  $F$  и  $P$ , каждый со своей концентрацией. Таким образом, снова получается соотношение, аналогичное (1.123):

$$\sum \delta U_s = PV(c_P) + WV(c_W) - FV(c_F), \quad (1.125)$$

Такой подход к выводу (1.125) имеет целью подчеркнуть обстоятельство, непосредственно не вытекающее из предыдущего вывода: в рассматриваемом соотношении коэффициенты разделения отдельных ступеней могут быть различными. Кроме того, из проведенного рассуждения следует, что формально в качестве потенциала разделения  $V(c)$  может быть выбрана произвольная непрерывная функция переменной  $c$ . Однако, для расчета суммарного числа элементов в каскаде соотношение (1.125) может быть использовано только в том случае, когда элементы, составляющие каскад, идентичны и разделительная способность  $\delta U_{\text{эл}}$  от концентрации не зависит. Тогда разделительную способность  $s$ -й ступени можно записать в виде

$$\delta U_s = Z_s \delta U_{\text{эл}} \quad (1.126)$$

где  $Z_s$  – число элементов, соединенных в  $s$ -й ступени в параллель, а суммарное число элементов в идеальном каскаде составит

$$Z_{\text{ид}} = \sum Z_s = \frac{\Delta U}{\delta U_{\text{эл}}}, \quad (1.127)$$

где 
$$\Delta U = PV(c_P) + WV(c_W) - FV(c_F). \quad (1.128)$$

В случае идеального каскада с малыми одинаковыми коэффициентами обогащения на ступенях, как было установлено ранее, эта величина минимальна, т.е.  $Z_{\text{ид}} \equiv Z_{\text{мин}}$ .

Если в соотношении (1.123)  $W$  и  $F$  выразить через  $P$  с помощью уравнений баланса (1.77) и (1.78) и  $P$  вынести за скобку, то его можно переписать в виде

$$\sum_s \frac{L^* \varepsilon^2}{8} = P \Phi(c_P, c_F, c_W), \quad (1.129)$$



где

$$\Phi(c_P, c_F, c_W) = (2c_P - 1) \ln \frac{c_P}{1 - c_P} + \frac{c_P - c_F}{c_F - c_W} \times \\ \times (2c_W - 1) \ln \frac{c_W}{1 - c_W} - \frac{c_P - c_W}{c_F - c_W} (2c_F - 1) \ln \frac{c_F}{1 - c_F}. \quad (1.130)$$

Функция  $\Phi(c_P, c_F, c_W)$  зависит от трех внешних концентраций и может быть протабулирована. Соотношение (1.129) представляет разделительную работу, которую совершает идеальный каскад в единицу времени. Тогда для наработки изотопного продукта в количестве  $P^*$  величина разделительной работы составит

$$\Delta \tilde{U} = P^* \Phi(c_P, c_F, c_W) \quad (1.131)$$

Из (1.131) следует, что функцию  $\Phi$  можно рассматривать как выраженную в условных единицах *удельную работу разделения*, то есть разделительную работу, необходимую для получения единицы продукта (1 кмоль, 1 кг и т.д.). Функцию  $\Phi$  называют *функцией ценности*.

Работа разделения  $\Delta \tilde{U}$ , произведенная разделительным каскадом за фиксированное время, может быть найдена как произведение  $\Delta U$ , рассчитываемого по формуле (1.128), на рассматриваемый период времени. В практических расчетах и на рынке обогащенного урана пользуются условными единицами работы разделения (ЕРР), связанными с количеством произведенного обогащенного металлического урана. За 1 ЕРР принят 1 кг работы разделения (1 ЕРР=1 кгРР). Эта величина количественно соответствует работе разделения, необходимой для получения 1 кг обогащенного урана с концентрацией 1,5% из 2,75 кг природного сырья при заданной отвальной концентрации 0,26% (рис. 1.10).

Разделительная способность каскада обычно измеряется в ЕРР/год. При пересчете в размерность массового потока обычно используют соотношение 1 ЕРР/год = 4,69 г/с, получающееся с учетом различий в массах металлического урана и газообразного гексафторида урана.

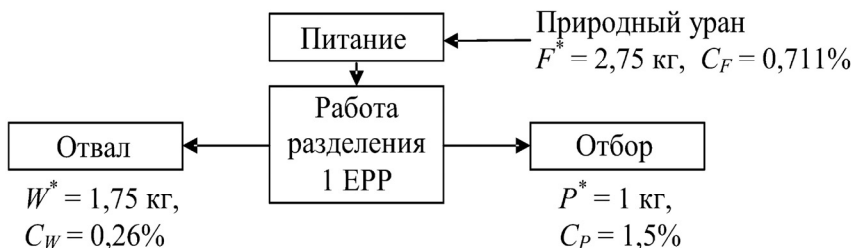


Рис. 1.10. Величины параметров разделения, соответствующие 1 EPP

Таким образом, в случае «слабого обогащения» на ступенях каскада могут быть сделаны общие выводы:

- понятия «идеальный каскад» и «оптимальный каскад» идентичны;
- результаты, следующие из теории идеального каскада и подхода Дирака и Пайерлса, приводят к полезным для практики понятиям «разделительная способность (мощность) ступени», «разделительный потенциал», «функция ценности».

### 1.6.3. Идеальный каскад с одинаковым немалым коэффициентом разделения на ступенях [13-15]

Если принять, что полные коэффициенты разделения ступеней  $q_s$  каскада одинаковы и не зависят от  $L_s$  и  $\theta_s$ , то из общего условия идеальности каскада  $\alpha_s = \beta_{s+1}$ , получающегося из (1.94), (1.95) и (1.6), следует, что идеальный каскад в этом случае характеризуется двумя значениями коэффициентов разделения  $\alpha_s, \beta_s$ , повторяющимися через ступень:

$$\alpha_1 = \beta_2 = \alpha_3 = \beta_4 = \dots, \quad (1.132)$$

$$\beta_1 = \alpha_2 = \beta_3 = \alpha_4 = \dots \quad (1.133)$$

Из условия идеальности  $\alpha_s = \beta_{s+1}$  также следует, что

$$R_s = \alpha_{s-1} R_{s-1} = \frac{R_{s+1}}{\beta_{s+1}}, \quad (1.134)$$

где

$$R_s = \frac{c_s}{1 - c_s}.$$

Если расчет ведется, начиная от первой ступени каскада, то, учитывая условие (1.134), можно записать

$$R_1 = R_1'' \beta_1, \quad (1.135)$$

где  $R_1'' = R_w$  - относительная концентрация ценного изотопа в потоке отвала. Далее

$$R_2 = R_1' = \alpha_1 R_1 = \alpha_1 \beta_1 R_w = R_w q, \quad (1.136)$$

$$R_3 = R_2' = \alpha_2 R_2 = \alpha_2 q R_w = R_w q \beta_1, \quad (1.137)$$

$$R_4 = R_3' = \alpha_3 R_3 = \alpha_1 \beta_1 R_w q = R_w q^2 \text{ и т.д.} \quad (1.138)$$

Обобщение выражений (1.135)-(1.138) приводит к следующим формулам для относительных концентраций на входах в ступени идеального каскада:

$$\text{нечетные ступени: } R_s = R_w q^{\frac{s-1}{2}} \beta_1, \quad (1.139)$$

$$\text{четные ступени: } R_s = R_w q^{\frac{s}{2}}. \quad (1.140)$$

Анализ соотношений (1.139), (1.140) показывает, что существуют четыре типа идеального каскада, отличающиеся друг от друга числом разделительных ступеней в отборной и отвальной частях и, соответственно, формулами для расчета относительных концентраций  $R_p$  и  $R_w$ :

**mun I**: при четном  $f - 1$  и четном  $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+1}{2}}, \quad R_w = R_F q^{\frac{f-1}{2}} \beta_1^{-1}; \quad (1.141)$$

**mun II**: при четном  $f - 1$  и нечетном  $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+2}{2}} \beta_1^{-1}, \quad R_w = R_F q^{\frac{f-1}{2}} \beta_1^{-1}; \quad (1.142)$$

**mun III**: при нечетном  $f - 1$  и четном  $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+1}{2}}, \quad R_w = R_F q^{\frac{f}{2}}; \quad (1.143)$$

**mun IV**: при нечетном  $f - 1$  и нечетном  $N - f + 1$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f}{2}} \beta_1, \quad R_w = R_F q^{-\frac{f}{2}}. \quad (1.144)$$

где  $R_F, R_p, R_w$  - относительные концентрации ценного изотопа соответственно в потоке питания, отбора и отвала.

Отметим, что при симметричном режиме работы первой ступени каскада, т.е. при одинаковых коэффициентах разделения по обогащённой и обеднённой фракциям ( $\alpha_1 = \beta_1$ ), все ступени каскада будут работать в симметричном режиме, Другими словами,  $\alpha$  и  $\beta$  будут одинаковы для всех ступеней каскада и равны

$$\alpha = \beta = \sqrt{q}. \quad (1.145)$$

Идеальный каскад со ступенями, работающими в симметричном режиме, впервые был рассмотрен К.Коэном [1]. В этом случае относительные концентрации не зависят от соотношения числа ступеней в отборной и отвальной частях каскада и формулы (1.139) - (1.144) приводятся к одинаковому виду

$$R_s = R_w q^{\frac{s}{2}}, \quad (1.146)$$

$$R_p = R_F q^{\frac{N-f+1}{2}}, \quad R_w = R_F q^{-\frac{f}{2}}. \quad (1.147)$$

Отметим, что в соответствии с соотношением (1.96) величина параметра  $\beta_1$  и коэффициента деления потока на первой ступени  $\theta_1$  однозначно связаны. Наиболее простой вид эта связь имеет место при  $c \ll 1$ .

$$\theta_1 = \frac{\beta_1 - 1}{q - 1}, \quad (1.148)$$

и соответственно

$$\beta_1 = 1 + \theta_1(q - 1). \quad (1.149)$$

Как следует из (1.132) и (1.148), величина  $\theta_s$  в этом случае принимает два значения, повторяющиеся через ступень.

В общем случае анализ полученных соотношений (1.141) - (1.144), (1.147) позволяет сделать следующий вывод. При заданных величинах  $q, N, f$  и  $c_F$  (III тип идеального каскада) или

$q, N, f, c_F$  и  $\beta_1(\theta_1)$  (I, II и IV типы идеального каскада) расчет каскада (нахождение распределений  $L(s), \theta(s) \in c(s)$ , включая концентрации  $c_P$  и  $c_W$ ), труда не представляет. Причем для III-го типа величины  $c_P$  и  $c_W$  не зависят от  $\beta_1$ , т.е. в отношении выбора коэффициента деления потока  $\theta_1$  существует произвол. При этом при варьировании  $\beta_1$  (или  $\theta_1$ ) будут меняться распределения  $\beta(s)$  и  $\theta(s)$ , а вместе с ними и эффективность работы каждой разделительной ступени. Поэтому логично выбирать значение  $\beta_1(\theta_1)$  из условия оптимальности работы ступеней идеального каскада, которое выполняется при условии минимальности относительного суммарного потока в каскаде  $\sum L^* / P = \min$ .

Как видно из приведенной зависимости на рис. 1.11 для случая  $c \ll 1$  минимальный суммарный поток в идеальном каскаде III-го типа, рассчитанном для следующих значений параметров:  $N = 9, f = 2, c_F = 0,711\%, c_P = 4,4\%, c_W = 0,45\%, q = 1,6$ , соответствует случаю, когда он построен из симметричных ступеней, то есть  $\theta_1 = 1/(\sqrt{q} + 1)$ .

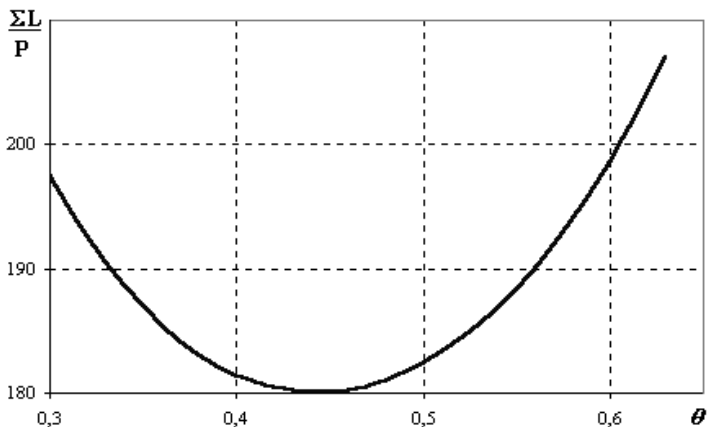


Рис. 1.11. Зависимость относительного суммарного потока в идеальном каскаде от величины  $\theta$

При расчете каскадов I, II и IV типов с изменением коэффициента деления потока на первой ступени  $\theta_1$  будет меняться не только величина суммарного потока в каскаде, но и величины конечных концентраций ( $c_W$  - в каскаде I-го,  $c_p$  и  $c_W$  - в каскаде II-го и  $c_p$  - в каскаде IV-го типа). Для этих типов идеального каскада каждому значению  $\beta_1(\theta_1)$  соответствует свой идеальный каскад. Расчеты показывают, что и в этом случае из семейства всех возможных идеальных каскадов наименьший суммарный поток будет в каскаде, в котором выполняется условие  $\beta_1 = \sqrt{q}$ , т.е. в каскаде из симметричных элементов.

Задача расчета идеального каскада заметно усложняется в том случае, когда заданы величины  $q$ ,  $c_p$ ,  $c_W$  и  $c_F$ , а требуется найти кроме распределений  $L(s)$ ,  $\theta(s)$  и  $c(s)$  по ступеням каскада также общее количество ступеней  $N$  и номер ступени  $f$ , в которую подают поток питания. В этом случае решение задачи следует начать с поиска типа идеального каскада, способного обеспечить в выходных потоках значения заданных концентраций  $c_p$  и  $c_W$ . Решая систему (1.147) из двух алгебраических уравнений при заданных значениях концентраций и величине коэффициента разделения  $q$ , находим величины  $N$  и  $f$ . При целочисленных значениях  $N$  и  $f$  дальнейший расчет идеального каскада из симметричных ступеней труда не представляет. При дробных значениях  $N$  и  $f$  необходимо подобрать тот тип идеального каскада, который при соответствующем подборе целочисленных величин  $N$  и  $f$ , а также коэффициента деления потока  $\theta_1$  обеспечит величины концентраций в выходных потоках, которые будут ближе всего к заданным.

Например, для идеального каскада типа IV при  $q=1,59$  и  $c_F = 0,71\%$ ,  $c_p = 4,4\%$ , а также  $N=9$ ,  $f=3$  получены следующие значения параметров (табл. 1.2) [19]. Величина концентрации ценного компонента в отвале при этом получается равной 0,44%.

В рассмотренном примере в идеальном каскаде из несимметричных разделительных элементов коэффициент деления потока и удельная разделительная способность пилообразно меняются от ступени к ступени. Нечетные ступени в каскаде имеют значения

$\theta_s = 0,118$  и  $\delta U_s / L_s^* = 1,48 \cdot 10^{-2}$ , а четные –  $\theta_s = 0,981 - 0,982$  и  $\delta U_s / L_s^* = 1,71 \cdot 10^{-2}$ .

Относительный суммарный поток в таком каскаде равен  $\sum_s L_s^* / P = 299,99$ , а сумма относительных разделительных способностей (мощностей) всех ступеней каскада, то есть разделительная способность каскада в целом равна  $\sum_s \delta U_s / P = 4,793$ . Среднее значение разделительной способности  $\overline{\delta U_s / L_s^*}$  ступени составляет  $1,58 \cdot 10^{-2}$ .

Таблица 1.2

Параметры ступеней идеального каскада

| Номер ступени | $L_s^*/P$ | $\theta_s$ | $c_s$ | $c'_s, \%$ | $c''_s, \%$ | $\delta U_s / P$ | $\delta U_s / L_s^* \cdot 10^2$ |
|---------------|-----------|------------|-------|------------|-------------|------------------|---------------------------------|
| 1             | 1,40      | 0,120      | 0,45  | 0,706      | 0,44        | 0,0207           | 0,148                           |
| 2             | 75,51     | 0,981      | 0,71  | 0,71       | 0,45        | 1,2935           | 1,71                            |
| 3*            | 76,39     | 0,118      | 0,71  | 1,12       | 0,71        | 1,1329           | 1,48                            |
| 4             | 43,22     | 0,982      | 1,12  | 1,13       | 0,71        | 0,7390           | 1,71                            |
| 5             | 42,82     | 0,118      | 1,13  | 1,78       | 1,12        | 0,6364           | 1,48                            |
| 6             | 21,97     | 0,982      | 1,78  | 1,79       | 1,13        | 0,3748           | 1,70                            |
| 7             | 21,72     | 0,118      | 1,79  | 2,80       | 1,78        | 0,2341           | 1,49                            |
| 8             | 8,56      | 0,982      | 2,80  | 2,82       | 1,79        | 0,1451           | 1,70                            |
| 9             | 8,40      | 0,119      | 2,82  | 4,40       | 2,80        | 0,1261           | 1,50                            |

\*Точка подачи внешнего питания.

В идеальном каскаде из симметричных ступеней суммарный поток может быть рассчитан с помощью простого аналитического

выражения. С учетом равенства  $\alpha = \beta = \sqrt{q}$ , а также формул (1.7), (1.9) соотношения (1.107) – (1.109) могут быть переписаны в виде:

$$\theta_s = \frac{1 + (\alpha - 1)c_s}{\alpha + 1}, \quad (1.150)$$

$$L_s^* = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} P \frac{(c_p - c_s)}{c_s(1 - c_s)} \quad (1.151)$$

- для отборной части каскада;

$$L_s^* = \frac{\alpha + 1}{\alpha - 1} W \frac{(c_s - c_w)}{c_s(1 - c_s)} \quad (1.152)$$

- для отвальной части каскада.

Формулы (1.151) и (1.152) описывают дискретные распределения потоков по ступеням идеального каскада из симметричных ступеней. Величина потока на ступени с номером ( $s=f$ ) имеет максимальное значение. В отборной части поток питания ступеней уменьшается в направлении отбора каскада, а в отвальной части - в сторону отвала.

В соответствии с формулами (1.141)-(1.142), относительные концентрации ценного изотопа в отборе и в отвале связаны с числом ступеней в отборной и отвальной частях каскада соотношениями (1.147). Следовательно, степень разделения каскада при заданных величинах  $N$  и  $f$  равна:

$$\frac{R_p}{R_w} = \alpha^{N+1} = q^{\frac{N+1}{2}}. \quad (1.153)$$

В соответствии с (1.153) число ступеней в идеальном каскаде при выполнении условия  $\alpha = \beta$  будет равно

$$N_{\text{ид}} = \frac{2}{\ln q} \ln \frac{R_p}{R_w} - 1. \quad (1.154)$$

Очевидно, что для достижения такой же степени разделения, как в безотборном режиме, в данном случае потребуется примерно вдвое больше ступеней.

Для нахождения суммарного потока все концентрации, входящие в (1.151) и (1.152), выразим через  $R_F$ ,  $N$  и  $f$ , имея в виду



(1.146) и (1.147), а также очевидное соотношение  $R_s = \frac{c_s}{1-c_s}$ . В

результате формулы (1.151) и (1.152) приобретут вид:

для отборной части каскада

$$L_s^* = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{1}{R_F} P c_p \left[ \alpha^{f-s} - \alpha^{f-N-1} + R_F (1 - \alpha^{s-N-1}) \right]; \quad (1.155)$$

для отвальной части каскада

$$L_s^* = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{1}{R_F} W c_w \left[ \alpha^f - \alpha^{f-s} + R_F (\alpha^s - 1) \right]. \quad (1.156)$$

При суммировании  $L_s^*$  по ступеням каскада учтем, что для любого  $m \geq 0$   $\sum_{s=0}^m \alpha^s = \frac{\alpha^{m+1} - 1}{\alpha - 1}$ , а параметры  $N - f + 1$  и  $f$  связаны

с относительными концентрациями  $R_p$ ,  $R_F$ , и  $R_w$  соотношениями (1.147). Принимая это во внимание, получим:

для отборной части каскада

$$\sum_{s=f}^N L_s^* = P \left\{ \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{1}{\ln \alpha} (2c_p - 1) \ln \frac{R_p}{R_F} + \frac{(c_p - c_F) [\alpha(1 - c_F) - c_F]}{(\alpha-1)c_F(1 - C_F)} \right\}, \quad (1.157)$$

для отвальной части каскада

$$\sum_{s=1}^{f-1} L_s^* = W \left\{ \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \frac{1}{\ln \alpha} (2c_w - 1) \ln \frac{R_w}{R_F} + \frac{(c_w - c_F) [\alpha(1 - c_F) - c_F]}{(\alpha-1)c_F(1 - C_F)} \right\}, \quad (1.158)$$

Суммируя (1.157) и (1.158) с учетом (1.77) и (1.78), получим

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^N L_s^* = & \frac{\alpha+1}{(\alpha-1) \ln \alpha} \left[ P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1-c_p} + W(2c_w - 1) \ln \frac{c_w}{1-c_w} - \right. \\ & \left. - F(2c_F - 1) \ln \frac{c_F}{1-c_F} \right]. \end{aligned} \quad (1.159)$$

Если разделить левую и правую части (1.159) на первый множитель в правой части, то получим

$$\sum_{s=1}^N L_s^* \frac{(\alpha-1) \ln \alpha}{\alpha+1} = P(2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1-c_p} + W(2c_w - 1) \ln \frac{c_w}{1-c_w} - F(2c_F - 1) \ln \frac{c_F}{1-c_F}. \quad (1.160)$$

Правая часть выражения (1.160) по форме записи соответствует полезной разделительной способности каскада, введенной в п. 1.5. В левой части (1.160) под знаком суммы стоит величина, которую можно интерпретировать как разделительную способность симметричной разделительной ступени

$$\delta U_s = L_s^* \frac{(\alpha+1) \ln \alpha}{\alpha-1}. \quad (1.161)$$

Если все ступени каскада состоят из идентичных элементов, то суммарное число таких элементов  $Z_{\text{ид}}$  будет равно

$$Z_{\text{ид}} = \frac{\Delta U}{L_y \frac{(\alpha+1) \ln \alpha}{\alpha-1}}, \quad (1.162)$$

где  $\Delta U = PV(c_p) + WV(c_w) - FV(c_F)$ ,  $L_y$  – поток на входе в разделительный элемент.

Характерно, что для всех ступеней каскада в случае, когда  $\alpha = \beta$ , величина удельной разделительной способности  $\delta U_s / L_s$  одинакова и равна

$$\frac{\delta U_s}{L_s^*} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} \ln \alpha. \quad (1.163)$$

Остается ответить на вопрос: является ли  $Z_{\text{ид}}$  в соотношении (1.162) минимальной величиной при заданных значениях  $P, c_p, c_w$ ? Другими словами, является ли в данном случае «идеальный каскад» «оптимальным каскадом»? Используя аналитические подходы, ответить на этот вопрос невозможно.

## 1.7. Оптимизация каскада с заданными внешними концентрациями целевого изотопа. Сравнение идеального и оптимального каскадов [17-22]

Как будет показано ниже, каскад, параметры которого оптимизированы, в ряде случаев может иметь суммарный поток, величина которого меньше, чем в соответствующем идеальном каскаде [17, 18]. Приведем алгоритм расчета и оптимизации противоточного симметричного каскада.

Количество основных параметров, возникающих при описании разделения в каскаде, равно  $6N+8$ . Перечислим их. Внешние параметры: потоки питания, отбора и отвала с соответствующими концентрациями. Внутренние: число ступеней и номер ступени, в которую подается поток питания, а также три потока с соответствующими концентрациями в каждой ступени. Из них  $N+4$  являются независимыми, а остальные  $5N+4$  связаны следующими соотношениями:

уравнения баланса вещества и целевого компонента в ступенях каскада

$$L_s = L'_s + L''_s, \quad L_s c_s = L'_s c'_s + L''_s c''_s, \quad s = \overline{1, N}; \quad (1.163)$$

уравнения балансов межступенных потоков

$$L_1 = L''_2, \quad L_2 = L'_1 + L''_3, \dots, L_f = L'_{f-1} + L''_{f+1} + F; \quad (1.164)$$

уравнения разделения в ступенях каскада

$$\frac{c'_s}{1-c'_s} / \frac{c''_s}{1-c''_s} = q_s(L_s, \theta_s), \quad s = 1, \dots, N; \quad (1.165)$$

граничные условия

$$\begin{aligned} L''_1 &= W, c''_1 = c_W; \\ L'_N &= P, c'_1 = c_P. \end{aligned} \quad (1.166)$$

Здесь  $q_s(L_s, \theta_s)$  – известные функции, определяющие зависимость полных коэффициентов разделения ступеней от потоков и коэффициентов деления потока.

Рассмотрим простейший случай, когда полный коэффициент разделения на каждой ступени постоянен. Введем вспомогательные величины  $T_s$  и  $J_s$ , которые принято называть транзитными пото-

ками разделяемой изотопной смеси и целевого изотопа соответственно. Они определяют перенос разделяемого вещества в целом и ценного компонента в сторону отбора из каскада, и в случае противоточного симметричного каскада находятся как разности двух потоков, проходящих через произвольное сечение между ступенями каскада

$$T_s = L'_{s-1} - L''_s, \quad (1.167)$$

$$J_s = L'_{s-1}c'_{s-1} - L''_sc''_s, \quad (1.168)$$

где  $s = \overline{2, N}$  – номер ступени справа от сечения.

Согласно уравнениям баланса для каскада в целом в отборной (обогащительной) секции обогащенная фракция предыдущей ступени превышает обедненную фракцию следующей ступени на величину  $P$ . Для соответствующих потоков целевого изотопа разница составляет  $Pc_p$ . В секции обеднения аналогичные величины отрицательны:  $-W$  и  $-Wc_w$ . Следовательно, транзитные потоки будут равны

$$T_s = -W, \quad J_s = -Wc_w, \quad \text{для } 1 < s \leq f, \quad (1.169)$$

$$T_s = P, \quad J_s = Pc_p, \quad \text{для } f < s \leq N. \quad (1.170)$$

Используя определение для полного коэффициента разделения и транзитных потоков, можно составить две рекуррентные формулы для определения концентраций

$$(I): \quad c'_s = \frac{qc''_s}{1 + (q-1)c''_s}, \quad s = \overline{1, N}, \quad (1.171)$$

$$(II): \quad c''_s = c'_{s-1} - \frac{J_s - T_sc'_{s-1}}{L''_s}, \quad s = \overline{2, N}. \quad (1.172)$$

Формула (1.171) отражает изменение состава разделяемой смеси в ступени в результате эффекта разделения. Вторая рекуррентная формула с транзитными потоками составлена, исходя из балансовых соотношений в сечениях каскада. Она позволяет связать концентрации обогащенной фракции предыдущей ступени с концентрацией обедненной фракции следующей ступени.

Для расчета каскада достаточно задать  $N + 5$  параметров: четыре внешних:  $P, c_F, c_p, c_w$  и  $N + 1$  внутренних:

$N, f, L_2'', L_3'', \dots, L_N''$ . Тогда, определив  $W$  и  $F$  по формулам (1.77), (1.78) и вычислив транзитные потоки, можно найти  $L_1''$  и  $C_1''$  из граничных условий для каскада в целом. Затем, используя рекуррентные соотношения (1.171) – (1.172), можно найти концентрации обогащенной и обедненной фракций всех ступеней, начиная с первой. Процедура расчета завершается определением концентрации обогащенной фракции последней ступени  $c_N'$ . После этого необходимо проверить граничное условие  $c_N' = c_p$ . Если оно удовлетворяется, это означает, что все параметры были заданы правильно, и можно перейти к поиску других интересующих параметров каскада. В противном случае надо изменить один из заданных параметров и повторить описанную выше процедуру.

Задачу оптимизации сформулируем как определение внутренних параметров каскада, минимизирующих сумму потоков питания ступеней при выбранных внешних параметрах (см. формулу 1.99).

Оптимизация параметров каскада может быть проведена как численными, так и численно-аналитическими методами. Приведем численно-аналитический метод, предложенный в работе [17]. Задача оптимизации по критерию (1.99) ищется на множестве допустимых значений  $N, f, L_2'', L_3'', \dots, L_N''$ , удовлетворяющих условию

$$c_N' = A(N, f, L_2'', L_3'', \dots, L_N'') = c_p, \quad (1.173)$$

где функция  $A$  отражает процедуру расчета концентраций по формулам (1.171) и (1.172).

Оптимальные значения  $N$  и  $f$  ищут перебором. В случае одинаковых полных коэффициентов разделения на ступенях каскада количество вариантов перебора  $N$  и  $f$  можно уменьшить, вычислив их приближенные значения по формулам идеального каскада с симметричными ступенями. При фиксированных значениях  $N$  и  $f$  транзитные потоки в каскаде определяются заданными значениями внешних параметров.

Функцию  $A$  записывают в явном виде, используя подстановку в первое рекуррентное соотношение (1.171) параметров  $q$  и  $C_N''$ , выраженных через  $L_N''$  и  $C_{N-1}'$  из второго рекуррентного соотношения

при  $s = N$ . Аналогично можно представить  $C'_{N-1}$  и концентрации всех предыдущих ступеней.

Считая, что поток  $L''_2$  является неявной функцией  $L''_3, L''_4, \dots, L''_N$ , запишем условия экстремума  $\Psi$  в виде:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial L''_s} = 0 \rightarrow \frac{\partial L''_2}{\partial L''_s} + 1 = 0, \quad s = 3, \dots, N. \quad (1.174)$$

Используя правило дифференцирования неявных функций  $\frac{\partial L''_2}{\partial L''_s} = -\frac{\partial \Lambda}{\partial L''_s} / \frac{\partial \Lambda}{\partial L''_2}$ , из уравнения (1.174) получаем

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L''_s} = \frac{\partial \Lambda}{\partial L''_2} \rightarrow \frac{\partial \Lambda}{\partial L''_s} = \frac{\partial \Lambda}{\partial L''_{s-1}}, \quad s = 3, \dots, N. \quad (1.175)$$

Для значений  $s < N$  производная  $\frac{\partial \Lambda}{\partial L''_s}$  в явном виде запишется:

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L''_s} = \frac{\partial}{\partial L''_s} \left\{ \frac{q c''_N}{1 + [q-1] c''_N} \right\} = \frac{q}{[1 + [q-1] c''_N]^2} \frac{\partial c''_N}{\partial L''_s}. \quad (1.176)$$

Введем обозначение  $\chi_j = \frac{q}{[1 + [q-1] c''_j]^2}$ ,  $j = \overline{s, N}$ . Используя второе рекуррентное соотношение из (1.172), выразим производную  $c''_j$

$$\frac{\partial c''_N}{\partial L''_s} = \left[ 1 + \frac{T_N}{L''_N} \right] \frac{\partial c'_{N-1}}{\partial L''_s} = \frac{L'_{N-1}}{L''_N} \frac{\partial c'_{N-1}}{\partial L''_s}. \quad (1.177)$$

Раскрывая аналогичным способом производную  $\partial c'_{N-1} / \partial L''_s$  и повторяя эту процедуру до ступени с номером  $s$ , находим

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial L''_s} = \prod_{j=s+1}^N \chi_j \frac{L'_{j-1}}{L''_j} \frac{\partial c'_s}{\partial L''_s}, \quad \text{где} \quad \frac{\partial c'_s}{\partial L''_s} = \chi_s \frac{J_s - T_s c'_{s-1}}{[L''_s]^2}. \quad (1.178)$$

Производную  $\partial \Lambda / \partial L''_{s-1}$  можно записать аналогичным образом, если заменить индекс  $s$  на  $s-1$ . Большая часть множителей в

производных  $\partial \Lambda / \partial L_s''$  и  $\partial \Lambda / \partial L_{s-1}''$  совпадает. Поэтому после подстановки производных  $\partial \Lambda / \partial L_s''$  и  $\partial \Lambda / \partial L_{s-1}''$  в (1.175) эти множители сокращаются. В результате получаем систему квадратных уравнений относительно потоков  $L_s''$ :

$$(L_s'')^2 - T_s L_s'' - \varphi_{s-1} (L_{s-1}'')^2 = 0, \quad s = 3, \dots, N, \quad (1.179)$$

где

$$\varphi_{s-1} = \frac{J_s - T_s c'_{s-1}}{J_{(s-1)} - T_{s-1} c'_{s-2}} \frac{c''_{s-1} (1 - c''_{s-1})}{c'_{s-1} (1 - c'_{s-1})}. \quad (1.180)$$

Концентрации  $c'_{s-1}$ ,  $c'_{s-2}$ ,  $c''_{s-1}$  в уравнении (1.180) находят по вычисленным величинам  $L_2'', L_3'', \dots, L_{s-1}''$ . Поэтому задача оптимизации сводится к численному перебору  $L_2''$  и нахождению потоков по формуле

$$L_s'' = \frac{T_s}{2} + \sqrt{\left(\frac{T_s}{2}\right)^2 + \varphi_{s-1} (L_{s-1}'')^2}. \quad (1.181)$$

Решение считается найденным, если выбор  $L_2''$  обеспечивает выполнение условия (1.173). Можно показать, что зависимости  $L_s''$  от  $L_{s-1}''$  и, как следствие,  $c'_N$  от  $L_2''$  являются возрастающими функциями. Отсюда следует считать единственность значения  $L_2''$ , удовлетворяющего уравнению (1.173), и возможность его определения одним из обычных численных методов.

Описанный метод оптимизации может быть распространен на случай, когда полный коэффициент разделения является заданной функцией номера ступени каскада.

Как было сказано выше, оптимизацию параметров каскада можно проводить с использованием различных численных методов оптимизации. В качестве такого метода можно использовать симплексный метод, основная идея которого заключается в последовательной замене вершин регулярного многогранника (симплекса) пространства  $n$  независимых переменных таким образом, чтобы получить наибольшее уменьшение (или увеличение) значения оп-

тимизируемой функции [16]. Одним из вариантов симплексного метода является метод деформируемого многогранника. В этом методе симплекс задан не жестко, а может подстраиваться под топографию целевой функции, деформироваться, сжимаясь в окрестности оптимума и растягиваясь вдоль оврагов [21]. Этот метод позволяет без введения каких-либо приближений и допущений найти оптимальные параметры каскада с использованием общих конечно-разностных уравнений. При этом для поиска оптимальных параметров каскада методом деформируемого многогранника путем минимизации суммарного потока каскада в качестве начального приближения могут быть выбраны параметры идеального каскада.

Расчеты показывают, что при фиксированных внешних параметрах, определенных по идеальному каскаду с симметричными условиями работы ступеней ( $\alpha = \beta$ ), и одинаковых внутренних параметрах  $N$  и  $f$  идеальный каскад с симметричными ступенями и оптимальный каскад идентичны [16] для значений  $q$ , несильно отличающихся от единицы. Другая картина имеет место, если в расчете параметров оптимального каскада получаются меньшие наилучшие значения  $N$  и  $f$ , чем для идеального каскада [22]. В этом случае коэффициенты разделения ступеней  $q \gg 1$  и степень разделения каскада  $Q \gg 1$ . Суммарный поток такого оптимального каскада меньше, чем идеального каскада с симметричными ступенями, а изменение параметров  $\alpha$  и  $\beta$  по каскаду соответствует формуле (1.67). Таким образом, при высокой степени разделения каскада и больших коэффициентах разделения ступеней идеальный каскад с симметричными ступенями не обладает свойством оптимальности.

Данный случай работы разделительного каскада соответствует очистке ценного компонента от примесей и получению высококонцентрированных изотопов. Для производства низкообогащенного урана ( $c_p \ll 1$ ) получаемые при оптимизации значения  $N$  и  $f$  для оптимального каскада не отличаются от идеального с симметричными ступенями. Поэтому такой идеальный каскад можно считать оптимальным. Однако его нельзя построить для любых заданных значений  $c_p$  и  $c_W$ . В этом случае можно рассчитать соответствующий идеальный каскад с несимметричной работой ступеней. Как



показывает сравнение с аналогичным оптимальным каскадом, их параметры существенно отличаются даже при одинаковых  $N$  и  $f$ .

В табл. 1.3 приведены значения параметров оптимального каскада для разделения изотопов урана, рассчитанных для тех же исходных данных, что и для идеального каскада из несимметричных ступеней.

Таблица 1.3  
Параметры ступеней оптимального каскада [16]

| Номер ступени | $L_s/P$ | $\theta_s$ | $c_s$ | $c'_s, \%$ | $c''_s, \%$ | $\delta U_s / P$ | $\delta U_s / L_s \cdot 10^2$ |
|---------------|---------|------------|-------|------------|-------------|------------------|-------------------------------|
| 1             | 19,74   | 0,300      | 0,52  | 0,71       | 0,44        | 0,4775           | 2,42                          |
| 2             | 33,09   | 0,404      | 0,65  | 0,83       | 0,52        | 0,8868           | 2,68                          |
| 3*            | 44,87   | 0,395      | 0,78  | 1,01       | 0,63        | 1,1967           | 2,67                          |
| 4             | 29,97   | 0,443      | 1,01  | 1,28       | 0,81        | 0,8131           | 2,71                          |
| 5             | 21,99   | 0,442      | 1,29  | 1,62       | 1,02        | 0,5966           | 2,71                          |
| 6             | 15,64   | 0,442      | 1,64  | 2,06       | 1,30        | 0,4242           | 2,71                          |
| 7             | 10,55   | 0,440      | 2,09  | 2,63       | 1,67        | 0,2860           | 2,71                          |
| 8             | 6,41    | 0,432      | 2,68  | 3,38       | 2,15        | 0,1735           | 2,71                          |
| 9             | 2,77    | 0,361      | 3,38  | 4,40       | 2,80        | 0,0721           | 2,65                          |

\*Точка подачи внешнего питания.

Относительный суммарный поток оптимального каскада равен  $\sum_s L_s / P = 185,03$ , сумма относительных разделительных способностей (мощностей) всех ступеней каскада  $\sum_s \delta U_s / P = 4,926$ , что не намного больше, чем в случае идеального каскада. Однако среднее значение удельной разделительной способности

$(\overline{\delta U_0})_{\text{опт}} = \overline{\delta U_S / L_S}$  ступени составляет  $2,65 \cdot 10^{-2}$ , что заметно больше, чем в идеальном каскаде.

Как видно из данных, представленных в табл. 1.3, оптимальный каскад является смешивающим. Потери от смешивания оценим путем сравнения разделительной способности идеального каскада, которая может быть рассчитана как сумма разделительных способностей всех его ступеней  $\sum_S (\delta U_S)_{\text{ид}}$  или по формуле (1.128) через

разделительный потенциал, с суммой относительных разделительных способностей ступеней оптимального каскада. Критерием сравнения служит величина  $\eta = \left( \frac{\sum_S (\delta U_S)_{\text{ид}}}{\sum_S (\delta U_S)_{\text{опт}}} \right) \cdot 100\%$ ,

которая в рассматриваемом случае равна 97,3%. Это означает, что потери работы от смешивания в оптимальном каскаде составляют 2,7%. При этом суммарный поток в идеальном каскаде более, чем на 60% превосходит поток в оптимальном каскаде. Этот факт объясняется двумя причинами. Во-первых, в оптимальном каскаде удельная разделительная способность  $\delta U_S / L_S$  и коэффициент деления потока  $\theta_s$  от ступени к ступени меняются значительно слабее, чем в соответствующем идеальном каскаде из несимметричных ступеней. При этом, как нетрудно убедиться, коэффициент деления потока на ступенях идеального каскада принимает значения, близкие к тем, которые реализуются в идеальном каскаде из симметричных элементов (см. табл. 1.1). Это означает, что оптимизация потоков  $L_S$  (за исключением крайних ступеней) обеспечивается примерно теми же значениями параметров  $\theta$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , что и в идеальном каскаде из симметричных элементов. Однако при этом оптимальный каскад в отличие от идеального может быть рассчитан на любые заданные концентрации  $c_p$  и  $c_w$ . Во-вторых, ступени в оптимальном каскаде по сравнению с идеальным каскадом из несимметричных ступеней имеют более высокую удельную разделительную способность. Положительный эффект за счет этого не только компенсирует потери на смешивание, но и обеспечивает «выигрыш» в суммарном потоке. Убедимся в этом, проделав несложные вычисления.

Суммарный поток идеального каскада можно оценить через разделительную способность каскада, вычисляемую по формуле

$$\Delta U = PV(c_P) + WV(c_W) - FV(c_F) \equiv \sum_S (\delta U_S)_{\text{ид}},$$

отнесенную к среднему значению (по ступеням каскада) удельной разделительной способности  $(\overline{\delta U_0})_{\text{ид}}$ , т.е.  $\sum_S L_S^* = \frac{\Delta U}{(\overline{\delta U_0})_{\text{ид}}}$ .

Аналогично можно вычислить суммарный поток смешивающего каскада  $\sum_S L_S = \frac{\Delta U}{\eta(\overline{\delta U_0})_{\text{опт}}}$ . Отсюда следует, что отношение суммарных потоков в идеальном и оптимальном каскадах будет равно

$$\frac{\sum_S L_S^*}{\sum_S L_S} = \eta \frac{(\overline{\delta U_0})_{\text{опт}}}{(\overline{\delta U_0})_{\text{ид}}}.$$

Величина параметра  $\eta$  в рассматриваемом случае равна 0,973, а отношение средних удельных разделительных способностей в оптимальном и идеальном каскадах составляет 1,667. Это и приводит к тому, что в идеальном каскаде величина суммарного потока больше, чем в оптимальном каскаде на 60%.

Отличие параметров крайних ступеней оптимального каскада от параметров остальных ступеней связано с необходимостью выполнения граничных условий  $c_1'' = c_W$  и  $c_N' = c_P$ .

## 1.8. Идеальный каскад с потерями [1]

Химическая стойкость является одним из главных требований, предъявляемых к рабочему веществу, в состав которого входят разделяемые изотопы. Вместе с тем многие рабочие газы подвержены частичному разложению в процессе разделения. Например, при разделении изотопов урана рабочий газ  $UF_6$  разлагается при взаимодействии с парами воды, которые попадают в разделительный аппарат вместе с натекающим воздухом с образованием твердых соединений урана. При разделении изотопов других химических элементов может происходить термическое разложение рабо-

чего вещества, локализованное в местах с повышенной температурой (например, на ударной волне при сверхзвуковом обтекании устройств для отбора обогащённой и обеднённой фракций из газовой центрифуги), как это имеет место при разделении изотопов кадмия в виде диметила кадмия  $\text{Cd}(\text{CH}_3)_2$  [23-25].

Теория идеального каскада с потерями, в случае «слабого обогащения», разработанная К.Коэном [1], позволяет оценить вызываемое этими потерями увеличение суммарного потока в разделительной установке.

Как правило, потери пропорциональны производительностям ступеней каскада и могут быть представлены в виде произведения  $yL_s$ , где  $y$  – коэффициент пропорциональности, который обычно принимают постоянным для всех ступеней каскада, причем  $y \ll 1$ .

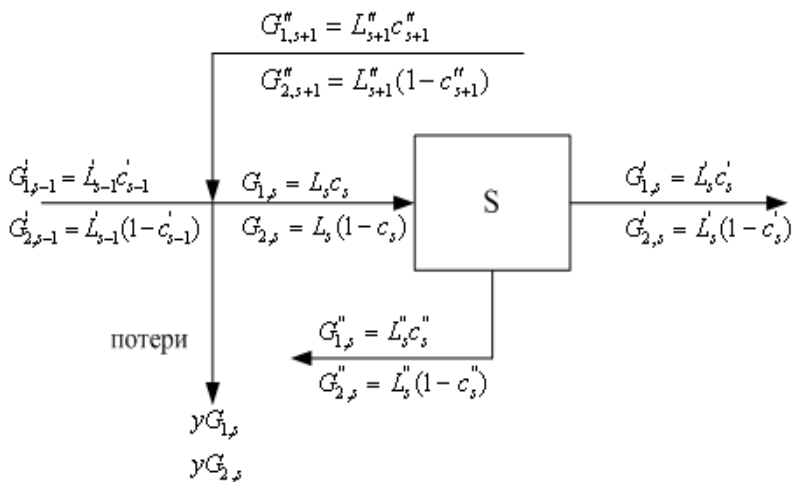


Рис. 1.12. Схема разделительной ступени каскада при наличии потерь рабочего вещества.  $G_{i,s}$ ,  $G'_{i,s}$ ,  $G''_{i,s}$  - потоки  $i$ -го компонента ( $i = 1, 2$ ) на входе, в обогащенной и обедненной фракциях соответственно

Если коэффициенты разделения  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $q = \alpha \cdot \beta$  постоянны, нетрудно убедиться, что при этом для потоков первого и второго компонентов должны выполняться следующие соотношения:

$$\frac{G'_{1,s}}{G'_{2,s}} = \alpha \frac{G_{1,s}}{G_{2,s}} = \alpha \frac{G'_{1,s} + G''_{1,s}}{G'_{2,s} + G''_{2,s}} \quad (1.182)$$

С другой стороны в идеальном каскаде, состоящем из симметричных ступеней ( $\alpha = \beta = \sqrt{q}$ ),  $\frac{c'_s}{1-c'_s} = q \frac{c''_s}{1-c''_s} = \alpha^2 \frac{c''_s}{1-c''_s}$  и, следовательно, в соответствии с определениями  $G'_{i,s}$  и  $G''_{i,s}$  ( $i=1,2$ ) имеем

$$\frac{G'_{1,s}}{G'_{2,s}} = \alpha^2 \frac{G''_{1,s}}{G''_{2,s}} \quad (1.183)$$

Комбинируя (1.182) и (1.183), получаем связь

$$G'_{1,s} = \alpha G''_{1,s} \quad (1.184)$$

Уравнение баланса для потоков ценного изотопа на входе в  $s$ -ую ступень симметричного каскада с учетом потерь и очевидного соотношения

$$G_{1,s} = G'_{1,s} + G''_{1,s} \quad (1.185)$$

имеет вид

$$G'_{1,s} + G''_{1,s} = G'_{1,s-1} + G''_{1,s+1} - y(G'_{1,s} + G''_{1,s}). \quad (1.186)$$

Подстановка соотношения (1.184) в равенство (1.186) приводит к следующему уравнению:

$$G'_{1,s+1} - (\alpha + 1)(1 + y) G'_{1,s} + \alpha G'_{1,s-1} = 0 \quad (1.187)$$

Решение полученного разностного уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами относительно функции  $G'_{1,s}$  ищут в виде [26]

$$G'_{1,s} = A \omega_1^s + B \omega_2^s, \quad (1.188)$$

где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  являются корнями характеристического (квадратного) уравнения

$$\omega^2 - (\alpha + 1)(1 + y)\omega + \alpha = 0, \quad (1.189)$$

и имеют вид

$$\omega_1(\alpha) = \frac{(\alpha+1)(1+y)}{2} + \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2(2y+y^2)}}{2}, \quad (1.190)$$

$$\omega_2(\alpha) = \frac{(\alpha+1)(1+y)}{2} - \frac{\sqrt{(\alpha-1)^2 + (\alpha+1)^2(2y+y^2)}}{2}. \quad (1.191)$$

Для определения констант  $A$  и  $B$  в решении (1.188) могут быть использованы граничные условия:

$$s = s_p + 1, \quad G'_{1,s+1} = 0 = A \omega_1^{s_p+1} + B \omega_2^{s_p+1} \quad (1.192)$$

$$s = s_p, \quad G'_{1,s} = P c_p = A \omega_1^{s_p} + B \omega_2^{s_p}, \quad (1.193)$$

где  $s_p$  – номер ступени, из которой берется отбор.

Разрешая систему (1.192) – (1.193) относительно  $A$  и  $B$  и подставляя их значения в (1.188), получают выражение для  $G'_{1,s}$ :

$$G'_{1,s} = P c_p \left\{ \frac{[\omega_1(\alpha)]^{s-s_p}}{1 - \frac{\omega_1(\alpha)}{\omega_2(\alpha)}} + \frac{[\omega_2(\alpha)]^{s-s_p}}{1 - \frac{\omega_2(\alpha)}{\omega_1(\alpha)}} \right\}. \quad (1.194)$$

Из (1.182) и (1.183) получаем, что

$$G'_{2,s} = \frac{1}{\alpha} G''_{2,s}, \quad (1.195)$$

и, следовательно, разностное уравнение для нахождения потока  $G'_{2,s}$  может быть представлено в виде:

$$G'_{2,s+1} - \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)(1+y)G'_{2,s} + \frac{1}{\alpha}G'_{1,s} = 0 \quad (1.196)$$

Решение уравнения (1.196) имеет вид, аналогичный (1.194) с заменой величины  $\alpha$  на  $\frac{1}{\alpha}$  в соотношениях (1.190) и (1.191) и величины  $c_p$  на  $1 - c_p$ . В результате имеем

$$G'_{2,s} = P (1 - c_p) \left\{ \frac{\left[ \omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right]^{s-s_p} + \left[ \omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right]^{s-s_p}}{1 - \frac{\omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right)}{\omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right)}} + \frac{\left[ \omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right]^{s-s_p} + \left[ \omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \right]^{s-s_p}}{1 - \frac{\omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right)}{\omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right)}} \right\}. \quad (1.197)$$

Учитывая очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{1}{\alpha} \omega_1(\alpha), & \omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{1}{\alpha} \omega_2(\alpha), \\ \omega_1(\alpha) \cdot \omega_2(\alpha) &= \alpha, & \omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right) \cdot \omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{1}{\alpha}, \end{aligned} \quad (1.198)$$

представим  $\omega_1(\alpha)$ ,  $\omega_2(\alpha)$ ,  $\omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right)$  и  $\omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right)$  в следующем виде:

$$\begin{aligned} \omega_1(\alpha) &= \alpha(1 + \Delta), & \omega_1 \left( \frac{1}{\alpha} \right) &= 1 + \Delta, \\ \omega_2(\alpha) &= \frac{1}{1 + \Delta}, & \omega_2 \left( \frac{1}{\alpha} \right) &= \frac{1}{\alpha(1 + \Delta)}, \end{aligned} \quad (1.199)$$

где

$$\Delta = \frac{1}{2} \left[ \frac{\alpha + 1}{\alpha} (1 + y) + \frac{1}{\alpha} \sqrt{(\alpha - 1)^2 + (\alpha + 1)^2 (2y + y^2)} \right] - 1. \quad (1.200)$$

Рассмотрим пример расчёта идеального каскада с потерями без обеднительной секции. Определим, что на вход в нулевой ступени подаётся поток с относительной концентрацией ценного изотопа  $R_0$ . Тогда для произвольной ступени с номером  $s$  будут выполняться следующие соотношения:

$$R_s = \alpha^s R_0 \quad (1.201)$$

$$\text{и} \quad R_P = \alpha^{s_P+1} \cdot R_0 \quad (1.202)$$

Поток на входе в произвольную  $s$ -ую ступень получим суммированием всех входных потоков компонентов

$$\begin{aligned} L_s^* \Big|_{y \neq 0} &= G_{1,s} + G_{2,s} = G'_{1,s} + G''_{1,s} + G'_{2,s} + G''_{2,s} = \\ &= G'_{1,s} (1 + \alpha) + G'_{2,s} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \end{aligned} \quad (1.203)$$

Подставляя в (1.203) значения  $G'_{1,s}$  (1.194) и  $G'_{2,s}$  (1.197) с учетом (1.199), (1.200), (1.201) и (1.202), после алгебраических преобразований получим выражение для потока на  $s$ -й ступени каскада:

$$\begin{aligned} L_s^* \Big|_{y \neq 0} &= \frac{Pc_P(\alpha+1)}{\alpha(1+\Delta)^2-1} \left\{ (1+\Delta)^{s_P-s+2} - \alpha^{s-s_P-1} (1+\Delta)^{s-s_P} + \right. \\ &+ \left. \frac{1}{R_0} \left[ \alpha^{-s_P} (1+\Delta)^{s_P-s+2} - \alpha^{s_P-1} (1+\Delta)^{s-s_P} \right] \right\} = \\ &= \frac{Pc_P(\alpha+1)(1+\Delta)}{[\alpha(1+\Delta)^2-1]c_s} \alpha^{\frac{s-s_P-1}{2}} sh(s_P+1-s) \cdot \ln(1+\Delta)\pi. \end{aligned} \quad (1.204)$$

Суммируя (1.204) по всем ступеням идеального каскада, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{s=s_P} L_s^* \Big|_{y \neq 0} &= \frac{Pc_P(\alpha+1)}{\alpha(1+\Delta)^2-1} \left\{ \frac{(1+\Delta)^{s_P+1}-1}{\Delta} \left[ (1+\Delta)^2 - \frac{1}{R_P(1+\Delta)^{s_P}} \right] + \right. \\ &+ \left. \frac{1-\alpha^{-(s_P+1)}(1+\Delta)^{-(s_P+1)}}{\alpha(1+\Delta)-1} \left[ \frac{(1+\Delta)^{s_P+3}\alpha-1}{R_0} - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.205)$$

В выражении для суммарного потока в каскаде (1.205) учтено, что  $R_s = \alpha^s R_0$  и  $R_P = \alpha^{s_P+1} R_0$ . Если устремить потери к нулю ( $y \rightarrow 0, \Delta \rightarrow 0$ ), то соотношения (1.204) и (1.205) переходят в соответствующие формулы для идеального каскада без потерь.

Полученные без ограничений на величину коэффициента разделения выражения (1.183) и (1.184) упрощаются в случае слабого обогащения на ступенях каскада. Учитывая, что  $\alpha = 1 + \varepsilon'$ , причем  $\varepsilon' \ll 1$ , соотношение (1.200) может быть преобразовано к виду



$$\Delta = -\frac{\varepsilon'}{2} + \frac{\varepsilon'}{2} \sqrt{1 + \frac{8y}{\varepsilon'^2}}. \quad (1.206)$$

Если ввести обозначение  $\tilde{\delta} = \frac{\Delta}{\varepsilon'} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8y}{\varepsilon'^2}}$ , то формулы (1.204) и (1.205) также приобретут простой вид:

$$L_s^* \Big|_{y \neq 0} = \frac{4Pc_p}{\varepsilon'(1+2\tilde{\delta})} e^{\frac{\varepsilon'(s-s_p)}{2}} \cdot sh \left[ \frac{\varepsilon'}{2} (s_p - s)(1+2\tilde{\delta}) \right] \quad (1.207)$$

$$\sum_{s=0}^{s=s_p} L_s^* \Big|_{y \neq 0} = \frac{2Pc_p}{\varepsilon'^2(1+2\tilde{\delta})} \left[ \frac{e^{\tilde{\delta}\varepsilon's_p} - 1}{\tilde{\delta}} \left( 1 - \frac{1}{R_p e^{\tilde{\delta}\varepsilon's_p}} \right) + \frac{1 - e^{-(1+\tilde{\delta})\varepsilon's_p}}{1+\tilde{\delta}} \left( \frac{e^{\tilde{\delta}\varepsilon's_p}}{R_0} - 1 \right) \right]. \quad (1.208)$$

Для компенсации потерь рабочего вещества в разделительных ступенях необходимо увеличить суммарный поток в каскаде. Выражение (1.207) позволяет оценить, во сколько раз следует увеличить поток на входе в  $s$ -ую ступень идеального каскада при наличии потерь:

$$\frac{L_s^*(\tilde{\delta})}{L_s^*(0)} = \frac{1}{1+2\tilde{\delta}} \cdot \frac{sh \left[ \frac{\varepsilon's_p}{2} (1+s\tilde{\delta}) \left( 1 - \frac{s}{s_p} \right) \right]}{sh \left[ \frac{\varepsilon's_p}{2} \left( 1 - \frac{s}{s_p} \right) \right]} \quad (1.209)$$

Величина  $\frac{L_s^*(\tilde{\delta})}{L_s^*(0)}$  является функцией параметра  $\tilde{\delta}$ , который в

свою очередь зависит от отношения  $\frac{y}{\varepsilon'^2} = \frac{yL}{\varepsilon'^2 L}$ , определяющего отношение потерь к разделительной способности ступени.

Анализ выражения (1.209) свидетельствует о том, что наибольшие потери имеют место в головных ступенях каскада.

Зависимость относительного изменения суммарного потока от величины  $\frac{y}{\varepsilon^2}$  представлена на рис. 1.13. Видно, что при величине потерь  $y = 0,025$  относительное возрастание суммарного потока составляет примерно 15%.

Величина концентрации ценного изотопа в потоке отбора при фиксированном значении относительного увеличения суммарного потока оказывается весьма чувствительной к изменению величины  $\frac{y}{\varepsilon^2}$ , что наглядно демонстрирует зависимость, приведенная на рис. 1.14.

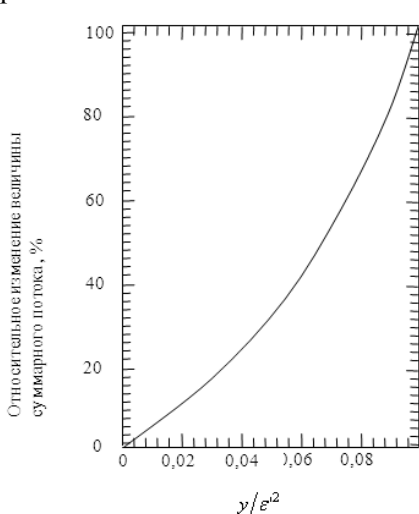


Рис. 1.13. Зависимость относительного изменения суммарного потока в идеальном каскаде от величины  $y/\varepsilon^2 \cdot c_p = 90\%$ ,  $y$  — доля потока  $L_s$ , теряемая в ступени [1]

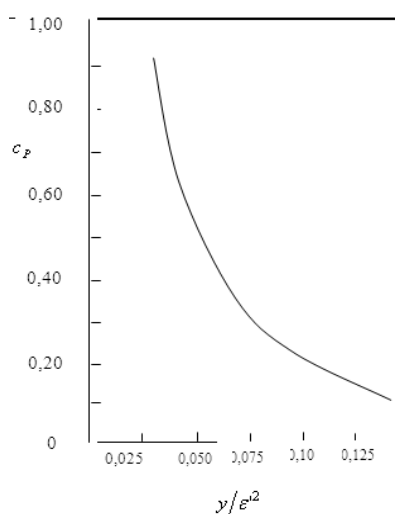


Рис. 1.14. Зависимость концентрации в отборе идеального каскада от величины  $y/\varepsilon^2$  при фиксированном значении относительного увеличения суммарного потока, равном 20% [1]

## 1.9. Прямоугольно-секционированные (ПСК) и прямоугольные каскады (ПК) для разделения бинарных смесей [4, 5, 7]

### 1.9.1. ПСК и ПК в случае «слабого обогащения»

Очевидно, что осуществить непрерывное изменение потока по мере увеличения концентрации, как это должно происходить в идеальном каскаде, практически невозможно. Поэтому это изменение осуществляют ступенчато, вследствие чего каскад, аппроксимирующий идеальный, представляет собой определенное число секций, в каждой из которых поток постоянен, но отличается от потока в другой секции (рис. 1.15).

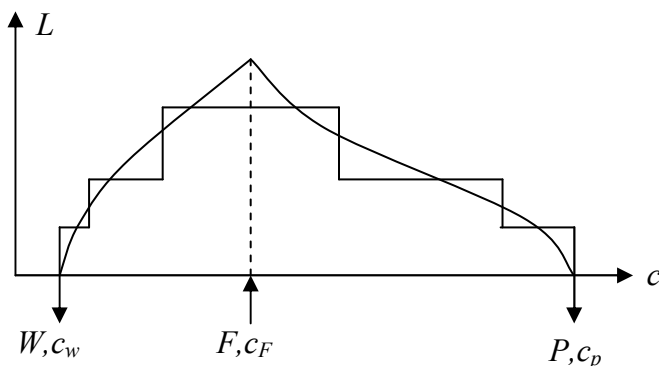


Рис. 1.15. Распределение потока в идеальном каскаде и его аппроксимация прямоугольно-секционированным каскадом из 6-ти секций

Каждая секция представляет собой участок из определенного числа ступеней, через каждую из которых проходит один и тот же поток разделяемой смеси. Такой каскад называют прямоугольно-секционированным каскадом (ПСК).

Как же осуществляют изменение потока между отдельными секциями ПСК?

В точках соединения двух прямоугольных секций их стыковка осуществляется следующим образом (рис. 1.16).

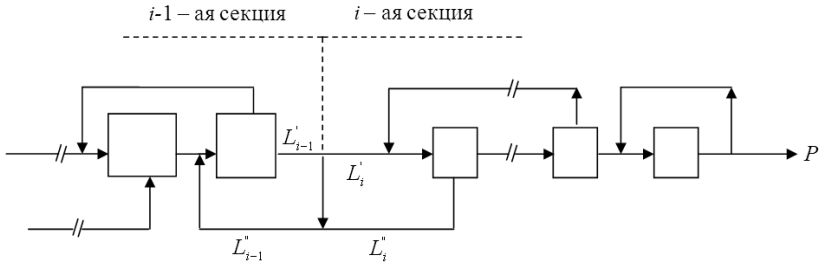


Рис. 1.16. Схема двух соседних секций в обогащительной части прямоугольно-секционированного каскада

Обогащенный поток  $L'_{i-1}$ , выходящий из последней ступени  $i-1$ -й секции делится на две части: одна часть  $L'_i$  поступает на питание первой ступени  $i$ -ой секции, а вторая часть  $L'_{i-1} - L'_i$  смешивается с обедненным потоком  $L''_i$  секции  $i$  и возвращается на вход последней ступени  $i-1$ -й секции ( $L'_i = L''_i = \frac{L'_{i-1}}{2}$ ).

В классической монографии К.Коэна [1] доказана теорема: при отклонении потока реального каскада  $L$  от идеального (оптимального)  $L^*$  на величину  $eL^*$ ,  $|L - L^*| = eL^*$ , отклонение интегрального потока  $I$  по каскаду от суммарного потока идеального каскада  $I^*$  пропорционально  $e^2 I^*$  и

$$|I - I^*| \leq e^2 I^*. \quad (1.210)$$

Из этого следует, что даже при больших отклонениях потоков от потоков в идеальном каскаде, например,  $e = 0,2$ , результирующее отклонение суммарного потока  $I$  от  $I^*$  составит всего несколько процентов:  $e^2 = 0,2^2 = 0,04$ , т.е. 4%. Поэтому сумма потоков в ПСК, аппроксимирующая соответствующую часть идеального каскада, незначительно отличается от суммарного потока в идеальном каскаде. Последнее обстоятельство позволяет строить ПСК, близкие по свойствам к идеальным.

Величина суммарного потока ПСК  $\sum L_j S_j$  будет больше суммы потоков соответствующего идеального каскада. Мерой проигрыша служит коэффициент полезного действия формы – отношение суммарного потока идеального каскада к суммарному потоку ПСК [7]:

$$\eta = \frac{\sum L^*}{\sum L_j S_j} = \frac{8P\Phi(c_P, c_F, c_W)}{\varepsilon^2 \sum L_j S_j} = \frac{P\Phi(c_P, c_F, c_W)}{\sum \frac{\varepsilon^2 L_j}{8} S_j}, \quad (1.211)$$

где  $S_j$  – число ступеней в  $j$ -й секции.

Из (1.211) видно, что КПД формы равен также отношению работы разделения, которую каскад совершает в единицу времени (нагрузки) к сумме разделительных способностей ступеней, т.е. характеризует использование разделительной способности каскада. Если считать, что все ступени komponуются из одинаковых элементов, то (1.211) можно переписать в виде

$$\eta = \frac{P\Phi(c_P, c_F, c_W)}{Z\delta U_{\ominus}}, \quad (1.212)$$

где  $Z$  – суммарное число элементов в каскаде,  $\delta U_{\ominus}$  – разделительная способность элемента, и

$$Z = \frac{P\Phi(c_P, c_F, c_W)}{\eta\delta U_{\ominus}} \quad (1.213)$$

Из (1.213) непосредственно следует, что разделительная способность элемента при заданных внешних условиях (величинах внешних потоков и концентраций) и КПД формы определяет полное число элементов в каскаде, а значит, общие затраты на производство изотопного продукта. Тем самым разделительная способность является важнейшей характеристикой элемента.

Связь между внешними и внутренними параметрами произвольной  $i$ -й секции ПСК можно найти, используя уравнение (1.85) при  $L = L_i = \text{const}$ .

$$S_i = \int_0^{S_i} ds = \int_{c_{in}}^{c_{jk}} \frac{dc}{ds} = \int_{c_{in}}^{c_{jk}} \frac{dc}{\varepsilon c(1-c) - \frac{2P}{L_i}(c_P - c)} = \frac{1}{\varepsilon\Delta\Psi_i} \ln \frac{1+X_i}{1-X_i}, \quad (1.214)$$

где  $S_i$  – число ступеней в  $i$ -й секции,  $c_{ii}$  – концентрация ценного изотопа в начале секции,  $c_{ik}$  – концентрация ценного изотопа в конце секции;

$$X_i = \frac{(c_{ik} - c_{ii})\Delta\Psi_i}{(1 + \Psi_i)(c_{ii} + c_{ik}) - 2c_{ii}c_{ik} - 2\Psi_i c_p};$$

$$\Delta\Psi_i = [(1 + \Psi_i)^2 - 4\Psi_i c_p]^{1/2};$$

$$\Psi_i = \frac{2P}{\varepsilon L_i}.$$

В области малых концентраций ( $c \ll 1, c_p \ll 1$ ) решение будет иметь более простой вид

$$S_i = \frac{1}{\varepsilon(1 + \Psi_i)} \ln \frac{(1 + \Psi_i)c_{ik} - \Psi_i c_p}{(1 + \Psi_i)c_{ii} - \Psi_i c_p}. \quad (1.215)$$

Формулы (1.214) и (1.215) справедливы и для секцией, расположенных в отвальной части каскада, если произвести в них следующие замены:

$$P \rightarrow -W, \quad c_p \rightarrow c_w \quad (1.216)$$

Частным случаем ПСК является прямоугольный каскад (ПК). Прямоугольным называется каскад с постоянной производительностью  $L$  на всех ступенях каскада. Если обозначать через  $S_p$  и  $S_w$  числа ступеней в отборной и отвальной частях ПК, то решение уравнений (1.214) и (1.215) может быть представлено в виде:

$$S_i = \frac{1}{\varepsilon\Delta\Psi} \ln \frac{1 + X}{1 - X} \quad (1.217)$$

где для отборной части каскада ( $S_i = S_p$ )

$$X = \frac{(c_p - c_f)\Delta\Psi}{(1 + \Psi)(c_p + c_f) - 2c_p c_f - 2\Psi c_p},$$

$$\Delta\Psi = [(1 + \Psi)^2 - 4\Psi c_p],$$

$$\Psi = \frac{2P}{\varepsilon L},$$

а для отвальной части ( $S_i = S_w$ )

$$X = \frac{(c_F - c_W)\Delta\Psi}{(1 + \Psi)(c_W + c_F) - 2c_Wc_F - 2\Psi c_W}$$

$$\Psi = \frac{2W}{\varepsilon L}$$

В случае очень «короткого» ПК, когда  $\frac{c_P - c_F}{c_F} \ll 1$  и

$\frac{c_F - c_W}{c_F} \ll 1$ , можно считать, что  $c(1 - c) \approx \text{const} = c_F(1 - c_F)$  и

решения уравнений (1.217) принимает вид:

$$S_P = \frac{c_F(1 - c_F)}{c_F(1 - c_F) - \frac{2P}{\varepsilon L}(c_P - c_F)}, \quad (1.218)$$

$$S_W = \frac{c_F(1 - c_F)}{c_F(1 - c_F) - \frac{2W}{\varepsilon L}(c_F - c_W)}. \quad (1.219)$$

### 1.9.2. Противоточная ступень. Представление разделительной колонны как прямоугольного каскада из противоточных ступеней

Противоточной разделительной ступенью назовем разделительную ячейку, в которую встречно подают два потока питания  $L_1$  и  $L_2$ , и из которой выводят два потока – обогащенный  $L'_1$  и обедненный  $L''_2$ , причем концентрации ценного компонента в выходящих потоках  $c'$  и  $c''$  связаны соотношением

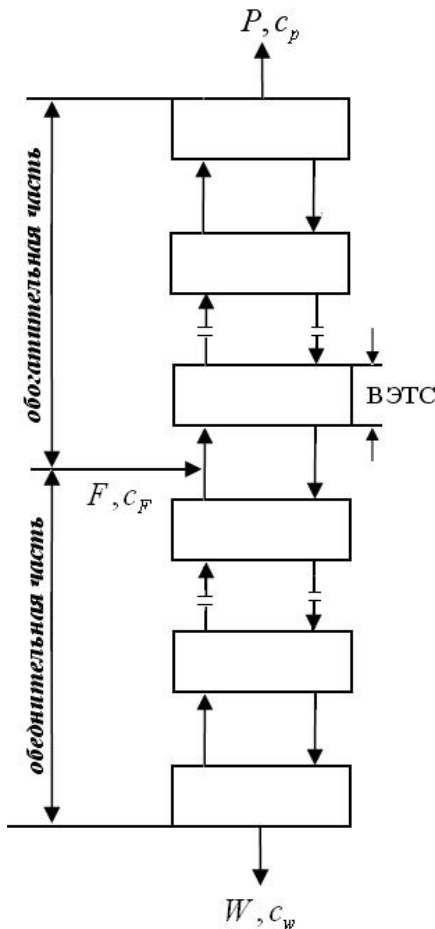
$$\frac{c'}{1 - c'} / \frac{c''}{1 - c''} = q_t, \quad (1.220)$$

где  $q_t$  – «первичный» (термодинамический) коэффициент разделения.

Например, в случае дистилляции покидающие ступень пары равновесны стекающей из этой ступени жидкости так что концентрации в этих потоках связаны соотношением (1.220). При этом величина  $q_i$  показывает, во сколько раз относительная концентрация ценного изотопа в одной фазе превышает эту концентрацию в другой фазе, при условии, что фазы приведены в соприкосновение и находятся в состоянии термодинамического равновесия.

Любая разделительная колонна может быть схематически представлена рядом противоточных ступеней (рис. 1.17). Такую ступень обычно называют «теоретической», а длину участка колонны, на которой относительная концентрация ценного изотопа возрастает в  $q_i$  раз принято называть «высотой эквивалентной теоретической ступени» или сокращенно ВЭТС.

Рис. 1.17. Разделительная колонна как последовательность противоточных разделительных ступеней. ВЭТС – высота эквивалентной теоретической ступени, на которой концентрация ценного компонента увеличивается в  $q_i$  раз



Как правило, в разделительных колоннах поперечный (радиальный) поток вещества отсутствует, так что для всех ступеней выполняется соотношение



$$L_1 = L'_1 \text{ и } L_2 = L''_2. \quad (1.221)$$

Покажем, что при сделанных предположениях противоточная колонна представляет собой прямоугольный каскад, теория которого рассмотрена в разделе 1.9.1. Введем обозначения

$$L = L_1 + L_2, \quad (1.222)$$

$$\theta = \frac{L_1}{L}, \quad 1 - \theta = \frac{L_2}{L} \quad (1.223)$$

и понятие средней концентрации  $\bar{c}_s$  на входе в  $s$ -ую ступень

$$L\bar{c}_s = L_1c_{1s} + L_2c_{2s}, \quad (1.224)$$

где  $c_{1s}, c_{2s}$  – концентрации ценного изотопа на входе в  $s$ -ую ступень.

С учетом выражения (1.223) концентрацию  $\bar{c}_s$  можно переписать в виде

$$\bar{c}_s = \theta c_{1s} + (1 - \theta)c_{2s}. \quad (1.225)$$

Уравнения материального и компонентного баланса для произвольной  $s$ -й ступени (рис. 1.18) в обогатительной части колонны (каскада из противоточных ступеней), работающей в стационарном режиме, запишутся в виде

$$L_1 - L_2 = P, \quad (1.226)$$

$$L_1c'_s - L_2c''_s = L_1c_{1s} - L_2c_{2s} = Pc_p, \quad (1.227)$$

где  $c'_s$  и  $c''_s$  – концентрации ценного изотопа в выходящих из  $s$ -й ступени потоках;

$P$  – поток отбора из колонны;

$c_p$  – концентрация ценного изотопа в потоке отбора.

С учетом (1.223) соотношение (1.226) можно переписать в виде

$$\theta - (1 - \theta) = \frac{P}{L}. \quad (1.228)$$

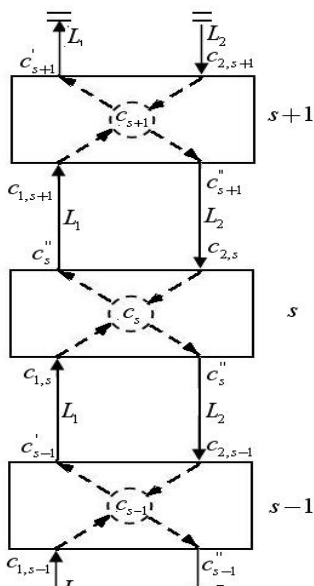


Рис. 1.18. Схема соединения противоточных ступеней в колонне («внутреннее каскадирование»)

Откуда следует, что

$$\theta = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{P}{L} \right). \quad (1.229)$$

Аналогично, соотношение (1.227) может быть записано как

$$\theta c'_s - (1 - \theta) c_{2s} = \theta c_{1s} - (1 - \theta) c''_s = \frac{P}{L} c_p. \quad (1.230)$$

Используя понятие средней концентрации (1.225) и обозначение для приращения концентрации ценного компонента на  $s$ -й ступени  $\delta_s = c'_s - c_{1s}$ , преобразуем выражение (1.230) к виду

$$\theta \delta_s + 2\theta c_{1s} = \frac{P c_p}{L} + c_s. \quad (1.231)$$

Используя определение коэффициента разделения  $q_t$  (1.220), можно найти разность концентраций ценного изотопа в потоках, выходящих из ступени

$$c'_s - c''_s = \frac{q_t c''_s}{1 + (q_t - 1) c''_s} - c''_s = \frac{(q_t - 1) c''_s (1 - c''_s)}{1 + (q_t - 1) c''_s}. \quad (1.232)$$

Комбинируя выражения (1.232) с уравнением баланса (1.230) и учитывая, что  $c'_s = c_{1s} + \delta_s$ , получаем

$$c_{1s} = \frac{1 - \theta}{1 - 2\theta} \delta_s + \frac{(1 - \theta)(q_t - 1) c''_s (1 - c''_s)}{(1 - 2\theta)[1 + (q_t - 1) c''_s]} - \frac{P c_p}{(1 - 2\theta)L}. \quad (1.233)$$

Подставляя (1.233) в (1.231) с учетом (1.229), после несложных алгебраических преобразований находим

$$\delta_s = \left( 1 - \frac{P}{L} \right) \frac{(q_t - 1) c''_s (1 - c''_s)}{1 + (q_t - 1) c''_s} - \frac{2P(c_p - c_s)}{L \left( 1 + \frac{P}{L} \right)}. \quad (1.234)$$

Для случая слабого обогащения на ступени должны выполняться следующие условия:

$$q_t - 1 = \varepsilon_t \ll 1, \quad c''_s (1 - c''_s) \approx c'_s (1 - c'_s) \approx c_s (1 - c_s), \quad \frac{P}{L} \ll 1.$$

Учитывая также, что число теоретических ступеней в колонне для получения высококонцентрированного изотопа велико, прираще-

ние концентрации ценного компонента на одной ступени  $\delta_s$  можно заменить производной  $\frac{dc}{ds}$ , а уравнение (1.234) переписать в виде

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon_i c(1-c) - \frac{2P}{L}(c_p - c), \quad (1.235)$$

где концентрация  $c = c(s)$  является непрерывной функцией номера теоретической ступени  $s$ , а  $\frac{L}{2} = L_1 = L_2$ .

Уравнение (1.235) совпадает с уравнением (1.85) при  $L = \text{const}$ , т.е. с уравнением прямоугольного каскада. Таким образом, математическое описание процесса разделения в установке с «внутренним» каскадированием (т.е. в противоточной колонне) совпадает с описанием процесса разделения в прямоугольном каскаде из однофазных дискретных ступеней.

Если через  $h$  обозначить величину ВЭТС – высоту, эквивалентную теоретической ступени, через  $z$  продольную координату в единицах длины ( $ds = h^{-1} dz$ ) и считать, что величина  $h$  от  $z$  не зависит, то уравнение (1.235) примет вид

$$h \frac{dc}{dz} = \varepsilon_i c(1-c) - \frac{2P}{L}(c_p - c). \quad (1.236)$$

Величину  $h$  для каждого метода разделения изотопов находят, решая задачу конвективной диффузии в противоточной колонне [7]. Анализ показывает, что ВЭТС определяется гидродинамическим режимом течения в колонне, физико-химическими свойствами разделяемой смеси и геометрическими параметрами колонны. Следует отметить, что при использовании 2-фазных колонн (дистилляция, химический изотопный обмен) на их торцах устанавливают специальные устройства, предназначенные для создания противоточного движения фаз путем перевода разделяемой изотопной смеси из одной фазы в другую. Эти устройства называют узлами обращения потоков (УОП) (рис. 1.19а, б).

Заметим, что изменение потоков от ступени к ступени (секционирование) в одиночной колонне осуществить невозможно. Поэтому в этом случае соединяют последовательно ряд колонн (секций),

в каждой из которых потоки постоянны по длине, но меняются от колонны к колонне. В случае 2-фазных методов каждая колонна (секция) имеет УОП для того, чтобы вернуть в нее ту часть потока, которая не поступает в последующую колонну (секцию).

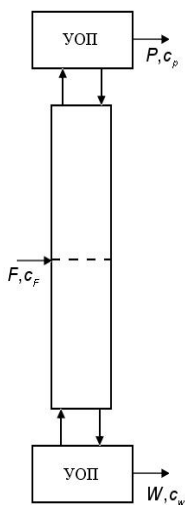


Рис. 1.19а. Разделительная колонна в 2-фазных методах разделения с устройствами обращения потоков

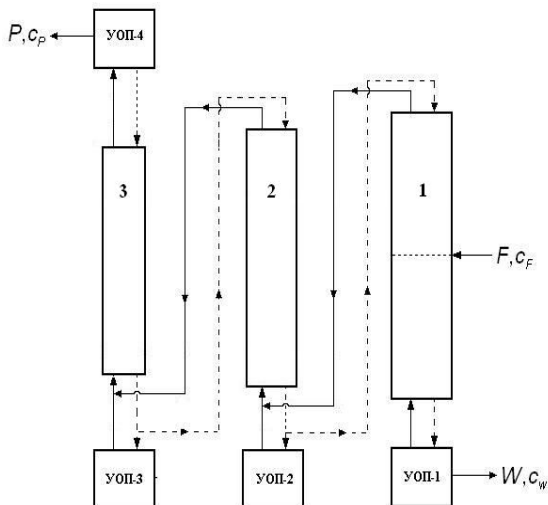


Рис. 1.19б. Схема прямоугольно-секционированного каскада из 2-фазных колонн (секций), предназначенных для концентрирования легкого (в случае дистилляции более летучего) компонента. Секцией обеднения является нижняя часть первой колонны, концентрирование происходит в верхней части первой и всех последующих колонн (секций)

Возможность сокращения потоков позволяет уменьшить объем аппаратуры, а также количество разделяемого вещества, находящегося в этом объеме. Такая установка по сути дела представляет собой прямоугольно-секционированный каскад, процесс разделения в котором описан в разделе 1.9.1. Таким образом, теории каскадов для разделения бинарных изотопных смесей оказывается весьма универсальной. То есть, с точки зрения теории, не принципиально является ли каскад установкой, состоящей из последовательно соединенных разделительных ступеней, или одиночной противоточной колонной, а также состоит ли ступень из одного или несколь-

ких параллельно соединенных элементов. Равным образом для теории не имеет значения, каким образом организованы потоки внутри элемента: является ли он противоточным, как это имеет место, например, на участке насадочной или пленочной дистилляционной колонны или работает со смешением потоков, что реализуется при использовании элементов однократного разделительного действия.

### 1.9.3. Оптимизация ПК и ПСК в случае «слабого обогащения» [3, 5, 7]

Целью оптимизации при заданных внешних параметрах каскада является определение таких его внутренних параметров, при которых КПД формы каскада имеет максимальное значение.

При оптимизации каскадов, помимо КПД формы, используют понятие КПД ступени (или локального КПД). Определить его можно как отношение приращения ценности, создаваемого ступенью, к ее разделительной способности (мощности):

$$\eta_{\text{ст}} = \frac{P[V(c_p, c) - V(c_p, c + \Delta c)]}{L\varepsilon^2/8}, \quad (1.237)$$

где

$$V(c_p, c) = P \left[ (2c_p - 1) \ln \frac{c_p}{1 - c_p} - (2c_p - 1) \ln \frac{c}{1 - c} + \frac{(c_p - c)(1 - 2c)}{c(1 - c)} \right], \quad (1.238)$$

а  $\Delta c$  - приращение концентрации на ступени.

Разлагая разность в квадратных скобках (1.237) в ряд вблизи  $c$ , ограничиваясь первым членом разложения и учитывая, что приращение концентрации на одной ступени  $\Delta c = \frac{dc}{ds} \Delta s = \frac{dc}{ds}$  (поскольку  $\Delta s = 1$ ), найдем:

$$\eta_{\text{ст}} = -\frac{4P}{L\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial V(c_p, c)}{\partial c} \cdot \frac{dc}{ds} \quad (1.239)$$

Поскольку

$$\frac{dc}{ds} = \varepsilon c(1 - c) - \frac{2P(c_p - c)}{L} = \frac{\varepsilon c(1 - c)}{2} \left( 2 - \frac{L^*}{L} \right),$$

где  $L^* = \frac{4P(c_P - c)}{\varepsilon c(1 - c)}$ , а производная разделительного потенциала по

концентрации  $c$  равна  $\frac{\partial V(c_P, c)}{\partial c} = -\frac{c_P - c}{c^2(1 - c)^2}$ , то КПД ступени принимает следующий вид:

$$\eta_{ст} = \frac{L^*}{L} \left( 2 - \frac{L^*}{L} \right). \quad (1.240)$$

Нетрудно видеть, что  $\eta_{ст} = 0$  при  $\frac{L^*}{L} = 0$ , т.е. при очень больших потоках ( $L \rightarrow \infty$ ) и при  $\frac{L^*}{L} = 2$ , т.е. при значении потока, при котором  $\frac{dc}{ds} = 0$ .

Решение задачи об определении оптимальных условий разделения начнем с простейшего случая – прямоугольного каскада (ПК).

Математический анализ показывает, что чем «короче» ПК, тем выше его КПД формы. Выясним, величину максимального КПД, которую может иметь ПК. Для «короткого» ПК можно принять  $c(1 - c) \approx \text{const} = c_F(1 - c_F)$ , и, следовательно, для обогатительной части идеального каскада

$$L^* = \frac{4P(c_P - c)}{\varepsilon c_F(1 - c_F)} \quad (1.241)$$

для обеднительной части идеального каскада

$$L^* = \frac{4W(c - c_W)}{\varepsilon c_F(1 - c_F)}. \quad (1.242)$$

Соответственно, вычисляя суммарные потоки отборной и отальной частей «короткого» идеального каскада, имеем:

$$I_P = \int_0^{S_P} L^* ds = \int_{C_F}^{C_P} \frac{L^*(c)dc}{\left(\frac{dc}{ds}\right)^*} = \quad , \quad (1.243)$$

$$= \frac{8P}{\varepsilon^2 c_F^2 (1-c_F)^2} \int_{C_F}^{C_P} (c_P - c)dc = \frac{1}{4P} (L^*(c_F))^2$$

$$I_W = \int_0^{S_W} L^* ds = \int_{C_W}^{C_F} \frac{L^*(c)dc}{\left(\frac{dc}{ds}\right)^*} = \quad , \quad (1.244)$$

$$= \frac{8W}{\varepsilon^2 c_F^2 (1-c_F)^2} \int_{C_W}^{C_F} (c - c_W)dc = \frac{1}{4W} (L^*(c_F))^2$$

где

$$\left(\frac{dc}{ds}\right)^* = \frac{1}{2} \varepsilon c_F (1 - c_F), \quad L^*(c_F) = \frac{4P(c_P - c_F)}{\varepsilon c_F (1 - c_F)} = \frac{4W(c_F - c_W)}{\varepsilon c_F (1 - c_F)}.$$

Суммарный поток «короткого» идеального каскада составит

$$I = \sum L^* = I_P + I_W = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{W}\right) (L^*(c_F))^2 \quad (1.245)$$

Решения (1.218) и (1.219), перепишем в виде:

$$S_P = \frac{L}{2P} \ln \frac{2}{2 - \frac{L^*(c_F)}{L}}, \quad (1.246)$$

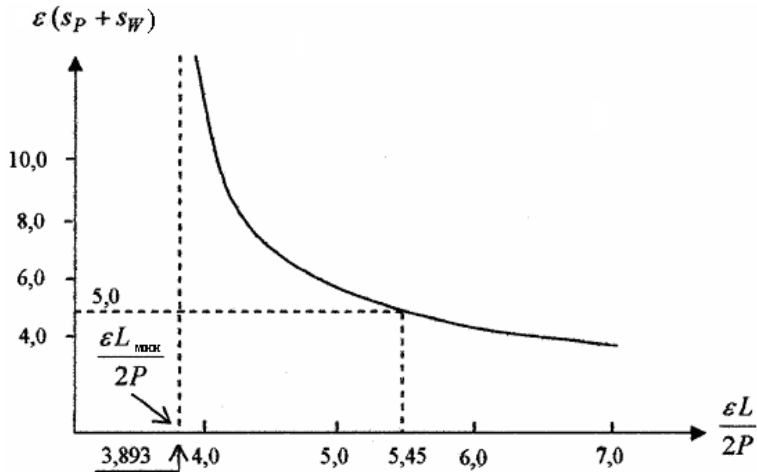
$$S_W = \frac{L}{2W} \ln \frac{2}{2 - \frac{L^*(c_F)}{L}}. \quad (1.247)$$

Тогда величина КПД формы «короткого» ПК с учетом (1.245)-(1.247) запишется в виде

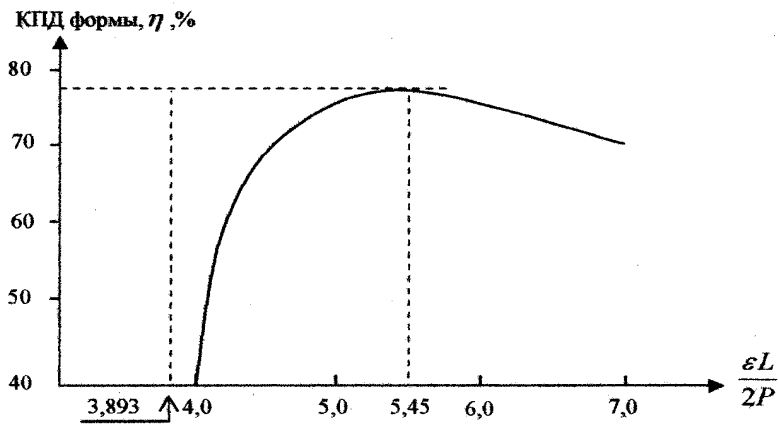
$$\eta = \frac{\sum L^*}{L S_P + L S_W} = \frac{\zeta^2}{2 \ln \frac{2}{2 - \zeta}}, \quad (1.248)$$

где

$$\zeta = \frac{L^*(c_F)}{L}$$



а)



б)

Рис. 1.20. Определение оптимальных параметров каскада при следующих исходных данных:  $c_p=3,5\%$ ,  $c_F=0,719\%$ ,  $c_w=0,2\%$ ,  $F/P=6,353$ ,  $W/P=5,353$  [4]



Величина КПД имеет максимум в зависимости от безразмерного параметра  $\zeta$ , а именно  $\eta = \eta_{\max} = 0,814$  (т.е. 81,4%) при  $\zeta_{\text{опт}} = 1,43$ . Величина 81,4% представляет верхний предел КПД, который может быть достигнут в ПК.

В общем случае оптимизацию ПК целесообразно проводить следующим образом. По формулам (1.217) с учетом (1.77) и (1.78) рассчитываем зависимость  $\varepsilon(S_P + S_W)$  от  $\frac{\varepsilon L}{2P}$ .

Далее, с учетом этих результатов и построив зависимость КПД формы от той же переменной, находим оптимальные значения  $\frac{\varepsilon L}{2p}$  и  $\varepsilon(S_P + S_W)$  (рис. 1.20, а и б).

На рис. 1.21 для заданных значений  $c_p$ ,  $c_F$  и  $c_w$  представлены распределения потоков питания ступеней в идеальном каскаде и аппроксимирующем его оптимизированном прямоугольном каскаде.

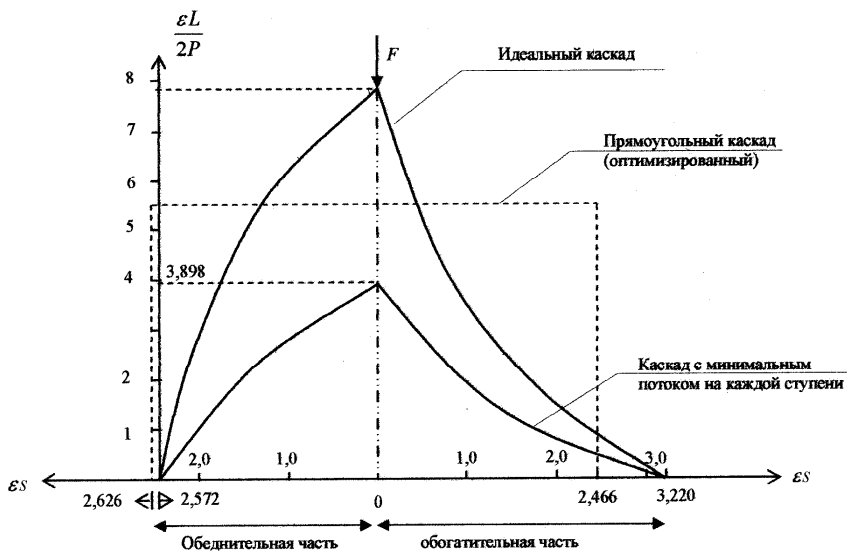


Рис. 1.21. Профили идеального и оптимизированного прямоугольного каскада (потоки выражены в относительных единицах). Исходные условия:  $c_p=3,5\%$ ,  $c_F=0,719\%$ ,  $c_w=0,2\%$ ,  $F/P=6,353$ ,  $W/P=5,353$  [4]

Здесь же приведено распределение  $L_{\min}(s)$ , соответствующее минимальному потоку через каждую ступень. Очевидно, что величина потока прямоугольного каскада (в том числе и оптимизированного) должна превышать величину потока  $L_{\min}(c_F)$ , равную

$$L_{\min}(c_F) = \frac{2P(c_p - c_F)}{\varepsilon c_F(1 - c_F)} = \frac{2W(c_F - c_w)}{\varepsilon c_F(1 - c_F)}. \quad (1.249)$$

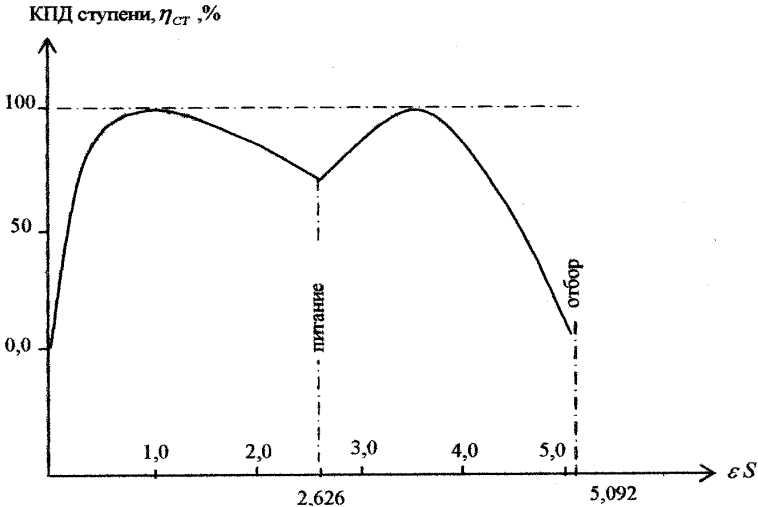


Рис. 1.22. Распределение КПД ступени (локального КПД) по длине прямоугольного каскада. Исходные данные:  $c_p=3,5\%$ ,  $c_F=0,719\%$ ,  $c_w=0,2\%$ ,

$$F/P=6,353, W/P=5,353, \frac{\varepsilon L}{2P} = 5,45 \quad [4]$$

На рис. 1.22 представлено распределение локального КПД по длине оптимизированного прямоугольного каскада. На двух ступенях этого каскада величина локального КПД достигает 100% (на входе в каждую из этих ступеней концентрации  $c$  таковы, что  $L = L^*(c)$ ). Монотонное уменьшение  $\eta_{ст}$  у концов каскада, очевидно, связано с тем, что на концевых ступенях каскада ( $c \rightarrow c_p$ ,  $c \rightarrow c_w$ ) и, соответственно,  $L^* \rightarrow 0$  (см. формулу 1.240).

С ростом длины каскада, величина КПД прямоугольного каскада снижается, что наглядно демонстрирует данные, приведенные в табл. 1.4.

Таблица 1.4  
 Параметры ПК, оптимизированных по величине КПД формы  
 (разделяемая смесь  $^{235}\text{UF}_6/^{238}\text{UF}_6$ ) [4]

|                          |       |       |        |       |         |        |        |
|--------------------------|-------|-------|--------|-------|---------|--------|--------|
| $c_P, \%$                | 3,5   | 5,0   | 20     | 20    | 93,5    | 93,5   | 93,5   |
| $c_F, \%$                | 0,7   | 0,7   | 0,7    | 3,5   | 0,7     | 3,5    | 5,0    |
| $c_W, \%$                | 0,2   | 0,2   | 0,2    | 0,7   | 0,2     | 0,7    | 0,7    |
| $\Delta U / P$           | 5,356 | 8,765 | 45,397 | 8,261 | 235,285 | 26,583 | 45,286 |
| $F / P$                  | 6,353 | 9,241 | 38,121 | 6,934 | 179,630 | 33,367 | 21,675 |
| $\varepsilon L / 2P$     | 5,443 | 8,241 | 35,094 | 6,869 | 155,644 | 33,468 | 24,091 |
| $\varepsilon S_P$        | 2,438 | 2,948 | 5,092  | 2,860 | 9,432   | 7,716  | 7,386  |
| $\varepsilon S_W$        | 2,672 | 2,628 | 2,8562 | 3,268 | 3,334   | 3,894  | 4,688  |
| $\varepsilon(S_P + S_W)$ | 5,010 | 5,576 | 7,764  | 6,128 | 12,766  | 11,610 | 11,966 |
| $\eta, \%$               | 78,6  | 76,3  | 66,7   | 78,5  | 47,4    | 58,2   | 62,8   |

Задача оптимизации ПСК для заданных величин  $P$ ,  $c_P$ ,  $c_F$ ,  $c_W$ ,  $\varepsilon$ , числа прямоугольных секций в обогащательной и обеднительной частях каскада сводится к определению оптимальных параметров, соответствующих максимальному значению КПД формы, а именно потоков во всех секциях, концентраций на границах («стыках») секций и соответственно чисел ступеней во всех секциях.

Оптимальные значения «стыковых» концентраций находят следующим образом. Для ПСК, состоящего из  $k$  прямоугольных участков, суммарный поток можно записать в виде:

$$\sum_{i=1}^k L_i S_i = \sum_{i=1}^k L_i \int_{c_H^i}^{c_K^i} \frac{dc}{dc/ds}, \quad (1.250)$$

где  $c_H^i, c_K^i$  – концентрация ценного изотопа в начале и конце  $i$ -й секции, соответственно. Для нахождения оптимума (минимума) соотношения (1.250) продифференцируем его по  $c_K^i$ , учитывая, что  $c_K^i$  входит в уравнение дважды: как верхний предел интеграла для секции  $i$  и как нижний – для секции  $i+1$  (так как  $c_H^{i+1} = c_K^i$ ). Поскольку производная интеграла по нижнему пределу отрицательна, условие оптимума (минимума) будет иметь вид:

$$\frac{\partial}{\partial c_i} \left[ \sum_{i=1}^k L_i S_i \right] = \frac{L_i}{\left( \frac{dc}{ds} \right)_K^i} - \frac{L_{i+1}}{\left( \frac{dc}{ds} \right)_H^{i+1}} = 0 \quad (1.251)$$

где  $\left( \frac{dc}{ds} \right)_K^i, \left( \frac{dc}{ds} \right)_H^{i+1}$  – значения производных в конце  $i$ -й секции и в начале  $i+1$ -й секции соответственно.

Учитывая соотношения (1.85) и (1.144), условие (1.251) можно преобразовать к виду

$$\eta_{CT,K}^i = \eta_{CT,H}^{i+1} \quad (1.252)$$

где  $\eta_{CT,K}^i, \eta_{CT,H}^{i+1}$  – локальные КПД в конце секции  $i$  и в начале секции  $i+1$  соответственно. Полученное условие (1.252) означает, что при оптимальном соединении секций в ПСК локальные КПД в точке перехода от предыдущей секции к последующей должны быть равны.

Подставляя в (1.252) значения  $\eta_{CT,K}^i, \eta_{CT,H}^{i+1}$ , после несложных преобразований получим:

$$L_i^* = \frac{2L_i}{\sigma_i + 1}, \quad (1.253)$$

где

$$L_i^* = \frac{4P(c_P - c_K^i)}{\varepsilon c_K^i (1 - c_K^i)} = \frac{4P(c_P - c_H^{i+1})}{\varepsilon c_H^{i+1} (1 - c_H^{i+1})} \quad (1.254)$$

– идеальный поток в точке перехода,  $\sigma_i = \frac{L_i}{L_{i+1}}$  – величина, назы-

ваемая коэффициентом ступенчатости. Обозначая  $c_K^i = c_H^{i+1} = c_*$ , соотношение (1.253) с учетом (1.254) приводим к квадратному уравнению:

$$c_*^2 - (1 + \varphi_i)c_* + \varphi_i c_P = 0, \quad (1.255)$$

где  $\varphi_i = \frac{2P(\sigma_i + 1)}{\varepsilon L_i}$ . Корни этого уравнения определяют опти-

мальные значения концентраций в точках перехода:

$$c_* = \frac{1 + \varphi_i}{2} \pm \frac{\sqrt{1 + 2(1 - 2C_P)\varphi_i + \varphi_i^2}}{2}. \quad (1.256)$$

Для секций обогатительной части каскада в формуле (1.256) следует выбирать знак минус.

Зная значения  $L_i$  во всех секциях отборной части ПСК, по формуле (1.256) определяют значения всех «стыковых» концентраций. Далее по формуле (1.214) находят числа ступеней на прямоугольных участках ПСК, и тогда расчет отборной части оптимального ПСК будет завершен. Аналогично проводится расчет отвальной части оптимального ПСК. При этом необходимо во всех формулах произвести соответствующие замены ( $P \rightarrow -W$ ,  $c_P \rightarrow c_W$ ), а в формуле (1.256) следует выбрать знак плюс.

Для случая малых концентраций ( $c \ll 1$ ,  $c_P \ll 1$ ) соотношение (1.256) упрощается и может быть приведено к виду

$$c_* = \frac{c_P}{1 + \frac{\varepsilon L_i}{2P(\sigma_i + 1)}}. \quad (1.257)$$

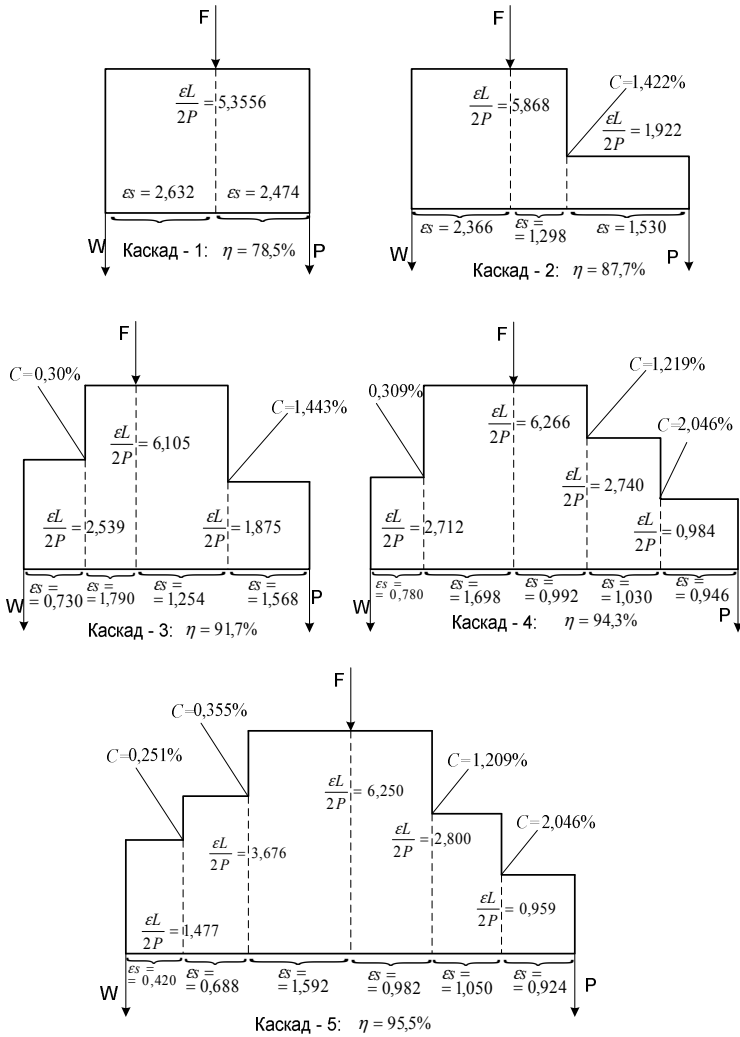


Рис. 1.23. Схемы ПСК, оптимизированные по исходным данным:

$$c_p = 3,5\%, c_F = 0,719\%, c_w = 0,20\%, \frac{F}{P} = 6,3535, \frac{W}{P} = 5,3535$$

(Каскад 1 – прямоугольный; каскад 2 – одна секция в отвальной части, две – в отборной; каскад 3 – две секции в отвальной, две секции в отборной; каскад 4 – две секции в отвальной, три – в отборной; каскад 5 – три секции в отвальной части, три – в отборной) [4]

Заметим, что при выполнении соотношения (1.251) параметрами оптимизации становятся головной поток прямоугольно-секционированного каскада (ПСК) -  $L_{\Gamma}$  (или отношение головного потока идеального каскада  $L^*(c_F)$  к головному потоку ПСК -  $L_{\tilde{\lambda}}$ ) и коэффициенты ступенчатости  $\sigma_i = \frac{L_i}{L_{i+1}}$ .

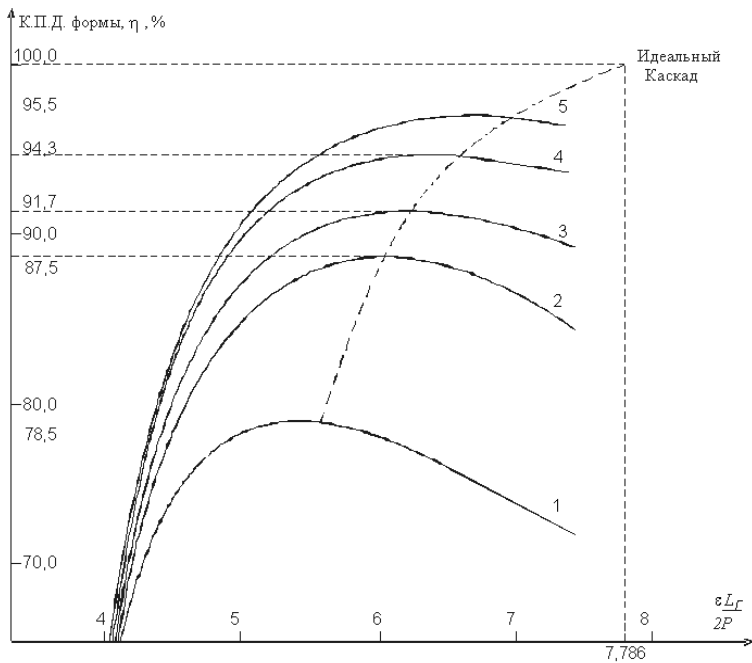


Рис. 1.24. Зависимость КПД формы от относительной величины головного потока ПСК при различных числах секций в каскадах, приведенных на рис. 1.23 [4]

На рис. 1.24 представлены зависимости КПД формы ПСК от головного потока  $L_{\Gamma}$  при различных значениях чисел секций. Каждому значению головного потока  $L_{\Gamma}$  на зависимостях 1-5 соответствует максимальное значение величины К.П.Д. формы при опти-

мизации по переменным  $\sigma_i = \frac{L_i}{L_{i+1}}$ . В свою очередь каждая кривая

$\eta = f(L_{\Gamma})$  на рис. 1.24 проходит через максимум. Эти точки экстремума и сами экстремумы соответствуют абсолютному максимуму величины  $\eta$  и, соответственно, определяют оптимальный вариант ПСК с заданным числом прямоугольных секций. С ростом числа секций максимумы  $\eta = f(L_{\Gamma})$  становятся более пологими, а при бесконечном увеличении числа секций КПД прямоугольно-секционированных каскадов стремится к 100%.

### 1.10. ПК в случае произвольных обогачений на его ступенях [27]

В случае немалых обогачений на ступенях ПК (рис. 1.25) с математической точки зрения представляет дискретную систему, к которой не приемлемы подходы и допущения, имеющие место для каскадов с малыми обогачениями на его ступенях.

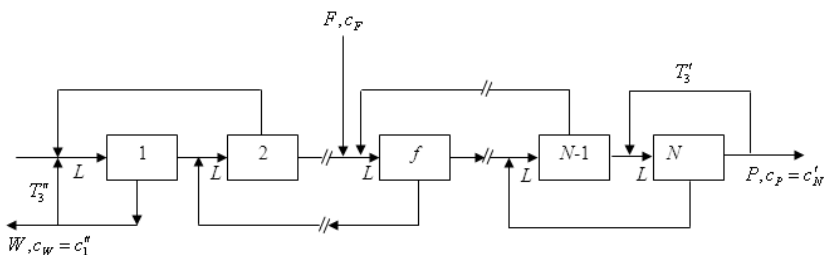


Рис. 1.25. Схема прямоугольного каскада

По определению прямоугольного каскада на входе в каждую ступень поток одинаков, т.е.  $L_s = L = \text{const}$ ,  $1 \leq s \leq N$ . Для выполнения этого условия в общем случае на концах каскада организуется закрутка в виде подачи части потока, выходящего с крайних ступеней в их питание

$$\left. \begin{aligned} T_3'' &= L_1'' - W_1 \\ T_3' &= L_n' - P \end{aligned} \right\} \quad (1.258)$$



Для отборной части каскада:

$$\theta_s L - (1 - \theta_{s+1})L = P, \quad (1.259)$$

$$\theta_s L c'_s - (1 - \theta_{s+1})L c''_{s+1} = P c_p. \quad (1.260)$$

Для отвальной части каскада эти уравнения справедливы, нужно только заменить  $P \rightarrow -W$ ,  $c_p \rightarrow c_W$ .

Из этих формул следует

$$\begin{cases} \theta_{s+1} = 1 - \theta_s - \frac{W}{L}, & s = 2, \dots, f-1, \\ \theta_{s+1} = 1 - \theta_s + \frac{P}{L}, & s = f, \dots, N. \end{cases} \quad (1.261)$$

Рассмотрим способы задания коэффициентов деления потока  $\theta_s$  в прямоугольном каскаде (см. рис.1.25) [27, 28]. Равенство  $L = \text{const}$  налагает определенные условия на выбор  $\theta_s$ . Общим для всех способов задания  $\theta_s$  является периодическое повторение через ступень по всей длине каскада «базового» коэффициента деления потока, имеющего место на ступени с номером  $f$ .

Первый способ задания коэффициента деления потока состоит в том, что все коэффициенты в отвальной (обеднительной) части каскада равны «базовому», в отборной (обогащительной) части базовый коэффициент периодически повторяется через ступень:

$$\begin{aligned} \theta_s &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{W}{L} \right) \quad \text{где } s = 1, 2, \dots, f \text{ и } s = f+2, f+4, \dots \\ \theta_s &= \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{W}{L} \right) + \frac{F}{L} \quad \text{где } s = f+1, f+3, \dots \end{aligned} \quad (1.262)$$

Во втором способе наоборот, коэффициенты деления потока периодически меняются в отвальной части, а в отборной равны между собой

$$\begin{aligned} \theta_s &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{P}{L} \right), \quad \text{где } s = f, f+1, \dots, N \text{ и } s = f-2, f-4, \dots, \\ \theta_s &= \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{P}{L} \right) - \frac{F}{L} \quad \text{где } s = f-1, f-3, \dots \end{aligned} \quad (1.263)$$

И, наконец, общий способ задания коэффициента деления потока состоит в следующем. Задают для разных ступеней следующие коэффициенты деления потока

$$\begin{aligned} \theta_s &= \theta_f, \quad s = \dots, f-4, f-2, f, f+2, f+4, \dots \\ \theta_s &= 1 - \frac{W}{L} - \theta_f, \quad s = f-1, f-3, \dots, \\ \theta_s &= 1 + \frac{P}{L} - \theta_f, \quad s = f+1, f+3, \dots, \end{aligned} \quad (1.264)$$

где  $0 < \theta_f < \left(1 - \frac{W}{L}\right)$  – величина базового коэффициента, задаваемая, например, из соображений гидродинамической устойчивости каскада. Как нетрудно убедиться, первые два из описанных методов являются частными случаями третьего.

Если потребовать равенство  $\theta$  в двух соседних ступенях и внешнее питание подавать в равных долях  $\left(\frac{F}{2}\right)$  в обогащенный поток  $f-1$ -й ступени и в обедненный поток  $f$ -й ступени (см. схему на рис. 1.26), то в этом случае приходим к следующим формулам

$$\theta_s = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(1 - \frac{W}{L}\right), & 1 \leq s \leq f-1 \\ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P}{L}\right), & f \leq s \leq N \end{cases} \quad (1.265)$$

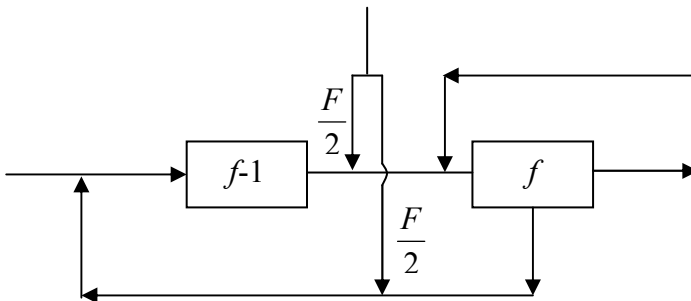


Рис. 1.26. Схема деления внешнего потока питания

Получим теперь формулы для расчета распределения концентрации по длине каскада. По определению полного коэффициента разделения ступени имеем:

$$q = \frac{\frac{c'}{1-c'}}{\frac{c''}{1-c''}}, \quad (1.266)$$

откуда концентрация ценного (целевого) компонента в обогащенном потоке будет равна

$$c' = \frac{qc''}{1+(q-1)c''} \quad (1.267)$$

В дальнейшем принято, что величина  $q$  по ступеням каскада не меняется.

Из балансовых уравнений (1.259) с учетом (1.266) и (1.267) следует

$$\left\{ \begin{array}{l} c_{s+1}'' = \frac{\theta_s}{1-\theta_{s+1}} \frac{qc_s''}{1+(q-1)c_s''} + \frac{Wc_1''}{(1-\theta_{s+1})L}, \quad s < f \\ c_{s+1}'' = \frac{\theta_s}{1-\theta_{s+1}} \frac{qc_s''}{1+(q-1)c_s''} + \frac{Wc_1'' - Fc_F}{(1+\theta_{s+1})L}, \quad s \geq f. \end{array} \right. \quad (1.268)$$

Чаще всего задачу поверочного расчета прямоугольного каскада формулируют следующим образом.

Задано:  $N, f, q, c_F, P, W, F, L$ . Найти  $c_P$  и  $c_W$ , возможно и  $c_s$ , а также распределение  $\theta_s$  по длине каскада. Такой расчет необходим при исследовании оптимального управления процессом разделения при изменении режимов работы отдельных ступеней разделительного каскада, а также при использовании одного и того же каскада для разделения различных изотопных смесей. Сложность такого расчета связана с нелинейностью уравнений (1.268), а также с тем фактом, что значения концентраций на концах каскада, явно входящие в эти уравнения, неизвестны.

Невозможность аналитического решения системы (1.268) приводит к необходимости разработки и использования численных

итерационных методов с уточнением ориентировочно принятых начальных значений концентраций на концах каскада (см. часть 2).

Соотношения (1.259) – (1.260) и (1.268) и соответственно алгоритм расчета могут быть легко обобщены на случай ПСК

Задачу оптимизации ПК можно сформулировать следующим образом. Пусть величины  $P, c_p, c_f, c_w, q$  заданы, тогда количество свободно выбираемых переменных каскада составляет три параметра. Это дискретные параметры  $N$  (полное число ступеней в каскаде),  $f$  (номер ступени, на вход которой подают поток питания  $F$ ) и величина потока питания ступеней  $L = \text{const}$ . Значения  $N, f$  и  $L$  должны быть найдены в результате решения задачи оптимизации. В качестве критерия оптимизации может быть выбран минимум суммарного потока.

## **1.11. Нестационарные (переходные) процессы в каскадах**

### ***1.11.1. Дифференциальное уравнение нестационарного разделительного процесса. Некоторые особенности нестационарных процессов [29, 30]***

Одной из специфических особенностей получения стабильных изотопов (особенно в случае «слабого обогащения», реализующегося в методе газовой диффузии, а также в физико-химических методах: дистилляции, химическом изотопном обмене) является большая длительность переходных процессов в разделительных каскадах, измеряемая в ряде случаев неделями и даже месяцами, что может быть сравнимо с длительностью непрерывной работы установки.

Одной из основных целей исследования нестационарных (переходных) процессов в каскадных установках является определение характерного «времени установления», т.е. времени от запуска каскада до достижения величин внешних потоков и концентраций, соответствующих стационарному режиму установки. Этот режим имеет место в том случае, когда в каждом сечении каскада перенос (поток) ценного изотопа  $J_s$  равен  $Pc_p$  для отборной и  $Wc_w$  для отвалной частей каскада соответственно. При этом ста-

ционарный режим течения разделяемой смеси устанавливается сравнительно быстро, тогда как стационарный режим по концентрациям в случае  $q-1 \ll 1$  достигается за существенно более длительное время.

Для получения уравнений, описывающих нестационарный процесс переноса ценного компонента в каскаде в случае «слабого обогащения», рассмотрим каскад для разделения бинарной смеси изотопов однофазным методом. Пусть в некоторое промежуточное сечение каскада подают поток питания  $F$ , а с концов каскада отбирают потоки отбора  $P$  и отвала  $W$ . Величины  $P$ ,  $W$  и  $F$  в общем случае могут быть функциями от времени, но при этом должны быть связаны уравнением сохранения вещества ( $F = P + W$ ). Предположим, что режим гидродинамических течений в каскаде установился и потоки, а также количество разделяемого вещества на каждой ступени («задержка»)  $H(s)$  не зависят от времени. Ниже будет показано, что такое предположение допустимо при разделении изотопов. С учетом сделанных предположений запишем условия материального баланса в произвольном сечении каскада на участке между  $s$ -ой и  $s+1$  ступенями

$$L'(s) - L''(s+1) = T(s). \quad (1.269)$$

$$L'(s)C'(s,t) - L''(s+1)C''(s+1,t) = J(s,t). \quad (1.270)$$

где  $T(s)$  – перенос (поток) разделяемого вещества,  $J(s,t)$  – перенос (поток) ценного (извлекаемого) изотопа.

В отборной части каскада перенос  $T$  равен величине потока отбора, а в отвальной части – величине потока отвала со знаком минус. Поток  $J(s,t)$  определяется накоплением ценного компонента в различных частях каскада:

- в отборной части

$$J(s,t) = P \cdot c(s,t) + \sum_{i=s+1}^s \frac{\partial}{\partial t} [H(i) \cdot c(i,t)], \quad (1.271)$$

- в отвальной части

$$J(s,t) = -W \cdot c(1,t) + \sum_{i=s+1}^s \frac{\partial}{\partial t} [H(i) \cdot c(i,t)] \quad (1.272)$$

где  $s=1$  и  $s=S$  – номера первой и последней ступеней каскада соответственно.

Для рассматриваемого случая «слабого обогащения» с точностью до малых порядка  $\varepsilon^2$  система разностных уравнений (1.269), (1.270) с учетом (1.271) и (1.272) может быть приведена к уравнению в частных производных

$$H(s) \frac{\partial c(s,t)}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial s} J(s,t), \quad (1.273)$$

где выражение для потока ценного изотопа определяется как

$$J(s,t) = \frac{L(s)}{2} \left[ \varepsilon c(1-c) - \frac{\partial c}{\partial s} \right] + Tc. \quad (1.274)$$

В однофазных методах разделения разделительные каскады, как правило, имеют одинаковые элементы. Это позволяет полагать, что задержка ступени прямо пропорциональна потоку  $L(s)$  [1], т.е.

$$H(s) = \omega L(s), \quad (1.275)$$

где  $\omega$  – коэффициент пропорциональности, имеющий размерность времени. Величина  $\omega$  определяет время, на которое задерживается разделяемое вещество в ступени. При этом время, равное  $\omega/\varepsilon^2$ , по порядку совпадает с продолжительностью переходных процессов, связанных установлением потока  $L(s)$ . А время достижения равновесных распределений концентраций характеризуется, как будет показано ниже, временем  $h/\varepsilon^2$ . Учитывая, что число ступеней в каскаде обратно пропорционально величине  $\varepsilon$ , очевидно, что временем установления  $Nh$  можно пренебречь и полагать  $H$  и  $L$  функциями только номера ступени.

Если ввести новые переменные

$$y = \varepsilon s, \quad \tau = \frac{\varepsilon^2 t}{2\omega}, \quad \chi = \frac{\varepsilon L}{2} \quad (1.276)$$

то после этого такие характеристики разделительного процесса, как  $\varepsilon$  и  $\omega$ , из описания нестационарного процесса, могут быть исключены, а исходная система (1.273), (1.274) примет вид, не зависящий от конкретного метода разделения

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \chi \left[ -\frac{\partial c}{\partial y} + c(1-c) + \frac{P}{\chi} c \right] \right\} \quad (1.277)$$

для отборной части каскада, и

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = -\frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \chi \left[ -\frac{\partial c}{\partial y} + c(1-c) - \frac{W}{\chi} c \right] \right\} \quad (1.278)$$

для отвальной части каскада.

В уравнениях (1.273) и (1.277) в приближении «слабого обогащения» предполагается, что отсчет ступеней каскада проводится от отвала к отбору, то есть от  $y = 0$  до  $y_0 = \varepsilon S$ . В граничные условия кроме условий на концах каскада должны входить условия на стыках соседних секций\*.

Связь уравнений нестационарного процесса в точке «стыка» соседних  $i$ -й и  $(i+1)$ -й секций можно получить из условий сохранения переноса в этом сечении

$$J_i = J_{i+1}, \quad (1.279)$$

то есть

$$\chi_i \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^- + \chi_{i+1} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^+ - (\chi_i - \chi_{i+1}) c_* (1 - c_*) = 0 \quad (1.280)$$

где знаки  $-$  и  $+$  обозначают производную слева и справа от «стыка»  $i$ -ой и  $(i+1)$ -ой секций, а  $c_*$  – концентрации в точке «стыка» секций.

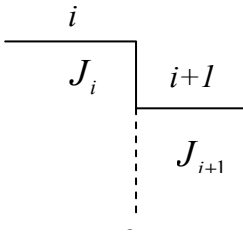


Схема «стыка» секций

Если на стыке  $k$ -й и  $k+1$ -й секции подают поток питания  $F$ , то уравнение (1.280) с учетом уравнения баланса разделяемого вещества по каскаду:

$$F = P + W \quad (1.281)$$

перепишется в виде

---

\* Под секцией в общем случае следует понимать участок каскада, на котором функция  $\chi(y)$  является непрерывной функцией координаты.

$$\begin{aligned} \chi_k \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^- - \chi_{k+1} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^- - (\chi_k - \chi_{k+1}) c_f (1 - c_f) = & \quad (1.282) \\ = (c_f - c_F)(P + W), \end{aligned}$$

где  $c_f$  – концентрация на входе в ступень, в которую подают поток питания  $F$  с концентрацией  $c_F$ .

Краевые условия для концов каскада описываются следующими равенствами.

$$J_0 = -Wc_W(\tau), \quad (1.283)$$

$$J_S = Pc_P(\tau), \quad (1.284)$$

где  $c_P(\tau)$  и  $c_W(\tau)$  – нестационарные значения концентраций на отборном и отвальном концах каскада соответственно. Подставляя (1.277) и (1.278) в (1.283) и (1.284), краевые условия приводим к виду

$$\left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} = c(1-c)|_{y=0}, \quad (1.285)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=y_0} = c(1-c)|_{y=y_0}. \quad (1.286)$$

Для решения краевой задачи необходимо также задать начальное условие в виде распределения концентрации по каскаду в начальный (нулевой) момент времени. В частности, если каскад заполнен однородной смесью с концентрацией  $c_F$ , начальное условие имеет вид

$$c(y, 0) = c_F, \quad (1.287)$$

Уравнения (1.277) и (1.278) с условиями связи (1.280) и (1.282), краевыми условиями (1.285), (1.286) и начальным условием (1.287) представляют собой краевую задачу, описывающую нестационарный процесс разделения в каскаде, состоящем из участков с непрерывным распределением  $\chi(y)$ , в частности в прямоугольно-секционированном каскаде (ПСК).

При расчете каскадных установок, основанных на использовании двухфазных систем (таких, как дистилляция,



химический обмен), необходимо учитывать процесс накопления ценного изотопа в устройствах обращения потоков. В этом случае уравнения имеют вид, аналогичный (1.277) и (1.278), а условия связи и краевые условия могут быть записаны в форме

$$\chi_i \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^- - \chi_{i+1} \left( \frac{\partial c}{\partial y} \right)^- - (\chi_i - \chi_{i+1}) c_* (1 - c_*) + E_i \frac{dc_*}{dt} = 0, \quad (1.288)$$

$$\chi_0 \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{\dot{y}=0} - \chi_0 c_W (1 - c_W) = E_0 \frac{dc_W}{dt}, \quad (1.289)$$

$$-\chi_S \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{\dot{y}=\varepsilon S} - \chi_S c_P (1 - c_P) = E_S \frac{dc_P}{dt}, \quad (1.290)$$

где  $E_i$  – емкость устройства обращения потоков на «стыке» между  $i$ -й и  $i+1$ -й секциями,  $E_0$ ,  $E_S$  – емкости устройств обращения потоков на концах каскада,  $c_*(t)$ ,  $c_W(t)$ ,  $c_P(t)$  – концентрации, усредняемые по объему устройств обращения потоков.

Таким образом, нестационарный процесс разделения описывается нелинейной краевой задачей, причем условия связи и краевые условия могут быть заданы в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае аналитическое решение подобных краевых задач получить невозможно.

В приложении 1 описана численная модель нестационарного процесса, коорую используют для численного решения системы уравнений (1.277), (1.278), (1.281)-(1.290) [29]. Заметим, что для решения ряда частных задач эту систему можно существенно упростить, что позволяет получить аналитическое решение, позволяющее оценить время достижения стационарного режима работы каскада. Однако общие закономерности переходных режимов работы могут быть выявлены только в результате численного решения рассмотренной выше краевой задачи.

Рассмотрим некоторые результаты, иллюстрирующие особенности нестационарных процессов в каскадах для разделения бинарных смесей и некоторые закономерности ведения переходных процессов [30, 31]. Расчеты показывают, что, во-

первых, динамика изменения концентрации ценного компонента на отборном конце трехпоточного каскада, имеющего потоки питания, отбора и отвала, может значительно отличаться от классических представлений, согласно которым концентрация монотонно возрастает, постепенно приближаясь к своему стационарному значению. Ключевым параметром, определяющим изменение концентрации в потоке отбора каскада, является величина относительного накопления

$$\Delta \tilde{M}_{\text{отн}} = \frac{\tilde{M}_{\infty} - \tilde{M}_0}{\tilde{M}_0}, \quad (1.291)$$

где

$$\tilde{M}_0 = \frac{2hc_F}{\varepsilon^2} \int_0^{y_0} \chi(y) dy, \quad (1.292)$$

$$\tilde{M}_{\infty} = \frac{2h}{\varepsilon^2} \int_0^{y_0} c_{CT}(y) \chi(y) dy - \quad (1.293)$$

начальное и конечное содержание ценного компонента в каскаде соответственно;  $c_{CT}(y)$  - стационарное распределение концентрации;  $y_0 = \varepsilon S$ .

Величина относительного накопления зависит от профиля каскада и от соотношения объемов его обогатительной и обеднительной частей. Если каскад суживающийся (в предельном случае – идеальный каскад), то относительное накопление может принимать отрицательные значения. Для идеального каскада относительное накопление, рассчитываемое по формуле (1.291), имеет вид

$$\Delta \tilde{M}_{\text{отн}} = \frac{(Q_W - 1)(Q_P + 1) \ln Q_P - (Q_P - 1)(Q_W + 1) \ln Q_W}{(Q_W - 1)(R_F Q_P - 1) \ln Q_P - (Q_P - 1)(R_F - Q_W) \ln Q_W}, \quad (1.294)$$

где

$Q_P = R_P / R_F$ ,  $Q_W = R_F / R_W$ ,  $R_F = c_F / (1 - c_F)$ ,  $R_P = c_P / (1 - c_P)$ ,  $R_W = c_W / (1 - c_W)$ ,  $c_F, c_P, c_W$  - стационарные значения концентрации ценного компонента в потоках питания, отбора и отвала соответственно.

Анализ формулы (1.294) показывает, что переход к отрицательным значениям накопления, соответствующим  $\Delta\tilde{M}_{\text{отн}} < 0$ , имеет место при соблюдении условия  $Q_W > Q_P$ . Численные исследования показали, что достаточным условием возрастания в начальные моменты времени концентрации  $c_P$  для каскадов любого профиля является условие  $\Delta\tilde{M}_{\text{отн}} \leq 0$ .

Влияние относительного накопления на особенности нестационарного процесса можно проследить на примере разделения изотопов неона в каскадах различного профиля, обеспечивающих значения  $Q_P = 15$  и  $Q_W = 33$ .

На рис. 1.27 приведены зависимости концентрации целевого изотопа  $^{22}\text{Ne}$  на отборном конце каскада от безразмерного времени  $\tau$  для разных значений относительного накопления. Видно, что с увеличением относительного накопления происходит сокращение периода времени, за который может быть достигнуто расчетное значение концентрации  $c_P$ , а при  $\Delta\tilde{M}_{\text{отн}} < 0$ , когда в начальный момент времени ценного изотопа в каскаде содержится больше, чем в стационарном состоянии, в зависимости  $c_P(\tau)$  появляется максимум.

При достаточно большой величине первоначального избытка ценного изотопа (например, при  $\Delta\tilde{M}_{\text{отн}} < -0,15$  для концентраций питания  $c_F \ll 1$ ) среднее по времени  $\tau^*$ , отсчитываемого от момента запуска каскада, значение концентрации  $\bar{c}_P$  в точке отбора оказывается не ниже расчетного значения  $c_P$ , то есть

$$\bar{c}_P = \frac{\int_0^{\tau^*} c_P(\tau) d\tau}{\tau^*} \geq c_P. \quad (1.295)$$

Другими словами, в суживающемся каскаде (идеальный каскад, ПСК) потери от существования переходного процесса могут быть сведены к минимуму. Во-вторых, исследования показали, что если переходной процесс проводят при

выключенном отборе, то в начальные моменты времени всегда происходит уменьшение концентрации, за счет чего реализуется повышенная скорость накопления ценного изотопа, а расчетное (номинальное) значение концентрации  $c_p$  может быть получено за существенно более короткое время, чем при работе с отбором.

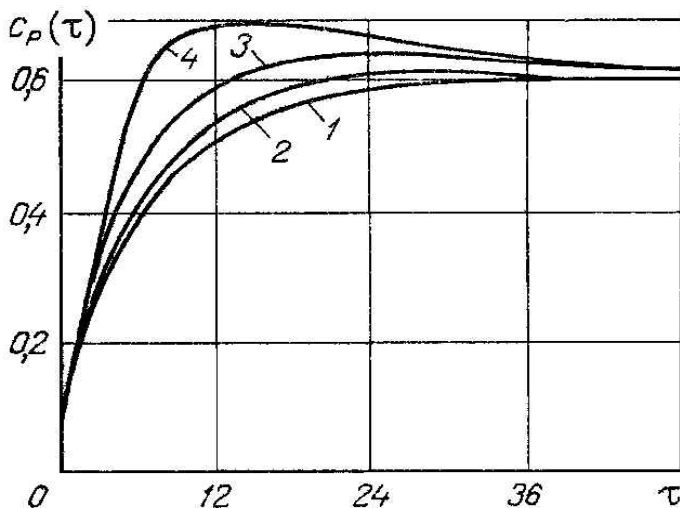


Рис. 1.27. Зависимость концентрации на отборном конце каскада от времени разделения изотопной смеси  $^{22}\text{Ne}/^{20}\text{Ne}$  ( $Q_p = 15$ ,  $Q_w = 33$ ) при различных значениях параметра  $\Delta\tilde{M}_{\text{отн}}$ : 1 –  $\Delta\tilde{M}_{\text{отн}} = 0,1$ ; 2 – 0; 3 –  $-0,1$ ; 4 –  $-0,17$  (идеальный каскад) [30]

Это обстоятельство в основном связано с тем, что отключение потока отбора способствует избыточному накоплению ценного изотопа на ступенях каскада, в основном в отборной его части. Включение потока отбора в моменты времени, соответствующие приближению концентрации на отборном конце  $c_p(\tau)$  к расчетному значению  $c_p$  приводит к тому, что нестационарный процесс относительно концентрации ценного компонента в отборе практически завершается. Имеют место непродолжительные (по сравнению с переходным периодом) изменения концентрации на отборном конце каскада. Характер

этих изменений таков, что в каскадах с  $\Delta\tilde{M}_{\text{отн}} > 0$  поток отбора рекомендуется включать с некоторым запаздыванием относительно момента времени  $\tau_p$ , при котором реализуется условие  $c_p(\tau_p) = c_p$ .

Особое влияние на нестационарный процесс в каскаде с выключенным потоком отбора оказывает величина потока вещества в обеднительной части каскада, обусловленная потоком отвала  $W^*$ . Причем в общем случае  $W^* \neq W$ , где  $W$  – расчетное значение потока отвала из каскада в стационарном режиме.

Приведенные выше закономерности нестационарного массопереноса являются общими, выбор конкретного режима обычно проводят по результатам численных расчетов.

### 1.11.2. Приближенные решения уравнения нестационарного процесса

Получение аналитического решения уравнения (1.273) возможно лишь в случае его линеаризации. Приведем некоторые характерные решения линеаризованного уравнения (1.273).

#### 1. Нестационарный процесс в идеальном каскаде [32, 33]

Рассмотрим нестационарный процесс в идеальном каскаде с бесконечным резервуаром на входе в исходную ступень (на «отрицательном» конце каскада) при постоянном отборе (рис. 1.28).



Рис. 1.28. Схема идеального каскада с бесконечным резервуаром на «отрицательном» конце каскада

Рассмотрим случай  $c \ll 1$ . Интегрируя в этом частном случае уравнение  $\left(\frac{dc}{ds}\right)_{\text{стац.}} = \frac{1}{2} \varepsilon c$  и подставляя результат в выражение

$L^* = \frac{4P(c_p - c)}{\varepsilon c}$ , получим формулу для распределения потоков

идеального каскада в рассматриваемом случае:

$$L^* = \frac{2P}{\varepsilon} \left[ Q_p \exp\left(-\frac{\varepsilon s}{2}\right) - 1 \right], \quad (1.296)$$

где  $Q_p = c_p / c_0$ .

Тогда, дифференцируя выражение (1.296), имеем

$$\frac{dL^*}{ds} = -P - \frac{\varepsilon L^*}{2}. \quad (1.297)$$

Подставляя результат в уравнение (1.273) и переходя к безразмерным переменным  $\zeta = \frac{cL^*}{c_0P}$ ,  $y = \varepsilon s$ ,  $\tau = \frac{\varepsilon^2 t}{\omega}$ , где  $c_0$  - начальная (исходная) концентрация обогащаемого изотопа, уравнение нестационарного процесса можно записать в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial y}. \quad (1.298)$$

Считая, что в начальный момент времени концентрация извлекаемого изотопа во всем каскаде равна  $c_0$  имеем

$$\zeta(y, 0) = \frac{2}{\varepsilon} \left[ Q_p \exp\left(-\frac{y}{2}\right) - 1 \right]. \quad (1.299)$$

Начальные и граничные условия для переменной  $\zeta$  запишутся в виде

$$\zeta(0, \tau) = \frac{2}{\varepsilon} [Q_p - 1], \quad \zeta(y_p, \tau) = 0. \quad (1.300)$$

Краевую задачу (1.298) – (1.300) решаем методом разделения переменных [33]:

$$\zeta(y, \tau) = u(y) + v(y, \tau), \quad (1.301)$$

где  $u(y)$  – член, описывающий стационарный режим,  $v(y, \tau)$  – «добавка», соответствующая нестационарному процессу. Возвращаясь к переменной  $c(y, t)$ , можно это решение записать в виде

$$\frac{c}{c_0} = \exp\left(\frac{y}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(\frac{y}{4} - \frac{t}{t_n}\right) \frac{\sin \frac{\pi n y}{y_p}}{Q_p \exp\left(\frac{y}{2}\right) - 1}, \quad (1.302)$$

где

$$A_n = \frac{4Q_p (\ln Q_p)^2}{\pi^3} n \frac{(-1)^n Q_p^{-1,5} - 1}{\left[\left(\frac{3 \ln Q_p}{2\pi}\right)^2 + n^2\right] \left[\left(\frac{\ln Q_p}{2\pi}\right)^2 + n^2\right]} \quad (1.303)$$

$$\frac{1}{t_n} = \frac{\varepsilon^2}{32\omega} \left[ \left(\frac{2\pi n}{\ln Q_p}\right)^2 + 1 \right]. \quad (1.304)$$

Устремляя в выражении (1.304)  $y \rightarrow y_p = \varepsilon S_p$ , где  $S_p$  – число ступеней в каскаде, и раскрывая неопределенность, получим формулу для степени разделения каскада в произвольный момент времени  $t$ :

$$Q_p(t) = Q_p \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_p^{-0,5} \frac{\pi n (-1)^n}{\ln Q_p} \exp\left(\frac{t}{t_n}\right) \right]. \quad (1.305)$$

Аналогично можно получить решение уравнения (1.273) для случая больших концентраций, когда  $1 - c \ll 1$ . Опуская промежуточные преобразования, запишем окончательный результат в виде

$$Q_p^{-1}(t) = Q_p^{-1} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Q_p^{0,5} \frac{\pi n (-1)^n}{\ln Q_p} \exp\left(-\frac{t}{t_n}\right) \right], \quad (1.306)$$

где

$$A_n = \frac{4Q_p^{-1} (\ln Q_p)^2}{\pi^3} n \frac{(-1)^{n+1} Q_p^{1,5} + 1}{\left[\left(\frac{3 \ln Q_p}{2\pi}\right)^2 + n^2\right] \left[\left(\frac{\ln Q_p}{2\pi}\right)^2 + n^2\right]}, \quad (1.307)$$

$\frac{1}{t_n}$  определяется формулой (1.304).

Для концентрации в диапазоне  $0,3 < c < 0,7$  часто полагают  $a = c(1-c) = \text{const}$ . В этом случае уравнение нестационарного процесса после аналогичных преобразований можно выразить следующим образом:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{a}{\varepsilon c_0} \quad (1.308)$$

с начальными и краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} \zeta(y, 0) &= \frac{1}{\varepsilon} (y_p - y); \\ \zeta(0, \tau) &= \frac{y}{\varepsilon}; \\ \zeta(y_p, \tau) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.309)$$

Решение имеет вид

$$c = \left( c_0 + \frac{a}{2} y \right) - \frac{16a^2 (\ln Q_p)^2}{\pi^3 (y_p - y)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \exp\left(-\frac{t}{t_n}\right) \sin \frac{\pi(2n-1)}{2 \ln Q_p} y, \quad (1.310)$$

где

$$\frac{1}{t_n} = \frac{1}{3\omega} \left[ \frac{\varepsilon \pi (2n-1)}{\ln Q_p} \right]^2. \quad (1.311)$$

Переходя к пределу при  $y \rightarrow y_p = \varepsilon S_p$  и учитывая, что для рассматриваемого случая

$$(c_p)_{\text{стац}} = c_0 + \frac{a}{2} \ln Q_p, \quad (1.312)$$

получим формулу для избыточной концентрации в конце каскада  $\Delta = c_p(t) - c_0$  в момент времени  $t$

$$\Delta = \Delta_{\text{стац}} \left[ 1 + \frac{8a \ln Q_p}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp\left(\frac{t}{t_n}\right)}{(2n-1)^2} \right], \quad (1.313)$$



где  $\Delta_{\text{стац}} = (c_P)_{\text{стац}} - c_0$ .

Иногда полезно использовать линейную аппроксимацию

$$c(1-c) \approx a + bc, \quad (1.314)$$

где  $a$  и  $b$ -константы. В этом случае уравнение (1.273) удастся привести к следующей краевой задаче:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} - \frac{b}{2} \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \\ \zeta(y, 0) &= \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{b} \left[ \frac{a + bc_P}{a + bc_0} \exp\left(-b \frac{y}{2}\right) - 1 \right]; \\ \zeta(0, \tau) &= \frac{2}{\varepsilon} \frac{1}{b} \left[ \frac{a + bc_P}{a + bc_0} - 1 \right]; \\ \zeta(y_P, 0) &= 0, \end{aligned} \right\}, \quad (1.315)$$

где

$$\zeta = \frac{(a + bc)L^*}{(a + bc_0)P}; \quad (1.316)$$

$$L^* = \frac{2P}{\varepsilon} \left[ \frac{a + b \cdot c_P}{a + b \cdot c_0} \exp\left(-b \frac{y}{2} - 1\right) \right]. \quad (1.317)$$

Решение краевой задачи (1.315) с учетом

$$\frac{a + bc_P}{a + bc_0} = \exp\left(b \frac{y_P}{2}\right) = Q_P^b \quad (1.318)$$

запишем в виде

$$\frac{a + b \cdot c}{a + b \cdot c_0} = \exp\left(b \frac{y}{2}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(b \frac{y}{4} - \frac{t}{t_n}\right) \frac{\sin \frac{\pi n}{y_P} y}{Q_P^b \exp\left(-b \frac{y}{2}\right) - 1}, \quad (1.319)$$

где

$$A_n = \frac{4b^2 Q_P^b (\ln q_P)^2}{\pi^3} n \frac{(-1)^n Q_P^{-1,5b} - 1}{\left[ \left( \frac{3b \ln Q_P}{2\pi} \right)^2 + n^2 \right] \left[ \left( \frac{b \ln Q_P}{2\pi} \right)^2 + n^2 \right]} \quad (1.320)$$

$$\frac{1}{t_n} = \frac{\varepsilon^2}{32\omega} \left[ \left( \frac{2\pi n}{b \ln Q_P} \right)^2 + 1 \right]. \quad (1.321)$$

Принимая  $y \rightarrow y_P = \varepsilon S_P$ , получим из выражения (1.321) следующее соотношение для «положительного» конца идеального каскада

$$\frac{a + bc_P(t)}{a + bc_0} = Q_P^b \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n q_P^{-0,5b} \frac{\pi n (-1)^n}{b \ln Q_P} \exp\left(-\frac{t}{t_n}\right) \right]. \quad (1.322)$$

Нетрудно видеть, что рассмотренный случай  $c(1-c) \approx a + bc$  включает в себя также линейризацию при  $c \ll 1$  и  $1-c \ll 1$  (этим условиям будут соответствовать значения соответственно  $a = 0, b = 1$  и  $a = 1, b = -1$ ). Соотношения (1.305), (1.306), (1.313) и (1.322) можно использовать для расчета степени разделения (или концентрации в потоке отбора) идеального каскада в переходном режиме в произвольный момент времени.

Очевидно, что ряды в этих решениях будут сходящимися. Ограничиваясь случаем  $c \ll 1$ , исследуем сходимость выражения (1.305). Так как члены ряда в этом выражении знакопеременны, то согласно признаку Лейбница [26] погрешность при вычислении суммы ряда будет не больше первого из отброшенных членов. Значения отношения второго члена  $B_2$  к первому  $B_1$  ряда (1.305) в момент времени  $t = t_1$  при различных значениях  $\ln Q_P$  приведены в табл. 1.5.

Из приведенных значений непосредственно следует, что вплоть до  $\ln Q_P = 2 \div 2,5$  без существенной погрешности можно ограничиться лишь первым членом разложения, и, учитывая, что при  $t = 0, Q_P(0) = 1$ , выражение (1.305) легко преобразовать к виду

$$\frac{Q_p(t)}{Q_p} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{t_1}\right), \quad (1.323)$$

где  $t_1$  – так называемое время релаксации [7], определяемое формулой (1.304) для  $n = 1$ .

Если для рассматриваемого случая ввести в расчет степень приближения  $\varphi$  к равновесию, определяемую как отношение текущего обогащения к равновесному [7], то

$$\varphi = \frac{Q_p(t) - 1}{Q_p - 1} \quad (1.324)$$

и время достижения заданной степени приближения к равновесию составит

$$t_\varphi = t_1 \ln \frac{1}{1 - \varphi}. \quad (1.325)$$

Из соотношения (1.325) следует, что время, необходимое для приближения к равновесию на 95-99 %, т.е. практическое время установления, будет равно  $(3 - 5)t_1$ .

Таблица 1.5

Значения отношений  $B_2 / B_1$  в решении (1.305) при различных величинах  $\ln Q_p$

|             |       |       |       |       |       |      |      |      |
|-------------|-------|-------|-------|-------|-------|------|------|------|
| $\ln Q_p$   | 0,5   | 1,0   | 1,5   | 2,0   | 2,5   | 3,0  | 3,5  | 4,0  |
| $B_2 / B_1$ | 0,003 | 0,001 | 0,017 | 0,025 | 0,035 | 0,05 | 0,07 | 0,09 |

## 2. Переходной процесс в прямоугольном каскаде [1, 3, 7, 35, 36]

Ограничимся рассмотрением случая, когда концентрации на ступенях каскада в течение всего переходного периода сохраняет малое значение, т.е.  $c \ll 1$ , концентрация у «отрицательного» конца каскада равна  $c = c_0$  и процесс осуществляется при непрерывном и постоянном по величине потоке отбора. При сделанных предположениях основное уравнение (1.273) линеаризуется и принимает вид

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - (1 + \Psi) \frac{\partial c}{\partial y}, \quad (1.326)$$

где  $\Psi = \frac{2P}{\varepsilon L}$ , которое должно удовлетворять условиям:

$$c(y, 0) = c_0 \quad (0 < y < y_p), \quad (1.327)$$

$$c(0, \tau) = c_0 \quad (\tau > 0), \quad (1.328)$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=y_p} - c|_{y=y_p} = 0. \quad (1.329)$$

Решение (1.326) удобнее выполнить, вводя новую зависимую переменную следующим образом

$$u = c - c_0, \quad (1.330)$$

тогда (1.326) – (1.329) переписутся в виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (1 + \Psi) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (1.331)$$

$$u(y, 0) = 0 \quad (0 < y < y_p), \quad (1.332)$$

$$u(0, \tau) = 0 \quad (\tau > 0), \quad (1.333)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=y_p} - u|_{y=y_p} = c_0. \quad (1.334)$$

Решая уравнение (1.331) методом интегральных преобразований Лапласа\*, получим в изображениях

$$\begin{aligned} \bar{u} = A \exp \left\{ \left[ \frac{1 + \Psi}{2} + \sqrt{\left( \frac{1 + \Psi}{2} \right)^2 + p} \right] \cdot y \right\} \\ + B \exp \left\{ \left[ \frac{1 + \Psi}{2} - \sqrt{\left( \frac{1 + \Psi}{2} \right)^2 + p} \right] \cdot y \right\}. \end{aligned} \quad (1.335)$$

Из условия (1.333) найдем  $B = -A$  и

---

\* Правила операционного исчисления коротко изложены в Приложении 2.

$$\bar{u} = 2A \exp\left[\frac{1}{2}(1+\Psi)y\right] \operatorname{sh}\left[\sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p} \cdot y\right]. \quad (1.336)$$

Используя условие (1.334), определим значение  $A$ , подставив которое в (1.336) получим

$$\begin{aligned} \bar{u} = c_0 \exp\left[-\frac{1}{2}(1+\psi)(y_p - y)\right] \times \\ \times \left[ \sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p} \cdot \operatorname{sh}\sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p} \cdot y \right] \left\{ \left[ \left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p \right] \times \right. \\ \left. \times \operatorname{ch}\sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p} \cdot y_p - \frac{1-\psi}{2} \sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p} \cdot \operatorname{sh}\sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2} \cdot y_p \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.337)$$

Пользуясь теоремой разложения и переходя к оригиналу, получим, что изменение концентрации у «положительного» конца ПК составит

$$\begin{aligned} \frac{c_p(\tau)}{c_0} = \frac{1 + \operatorname{th}\left(\frac{1+\Psi}{2} y_p\right)}{1 - \frac{1-\Psi}{1+\Psi} \operatorname{th}\left(\frac{1+\Psi}{2} y_p\right)} + \\ + 32 y_p \sum_n \frac{r_n^2 \exp\left[-\frac{(1+\Psi)^2 y_p^2 - 4r_n^2}{4 y_p^2} \tau\right]}{\left[(1+\Psi)^2 y_p^2 - 4r_n^2\right] \left[(1-\Psi)^2 y_p^2 - 2y_p - 4r_n^2\right]}, \end{aligned} \quad (1.338)$$

где  $r_n$  корни характеристического уравнения

$$\operatorname{th} r_n = \frac{2r_n}{(1-\Psi)y_p}. \quad (1.339)$$

Значения этих корней приведены в Приложении 3.

Если в течение переходного процесса отбор выключен, то  $\Psi \equiv 0$  и (1.339) приводится к виду [37]:

$$\frac{c_p(\tau)}{c_0} = \exp(y_p) + 32 y_p \sum_n \frac{r_n^2 \exp\left[-\frac{y_p^2 - 4r_n^2}{4 y_p^2}\right]}{\left[y_p^2 - 4r_n^2\right] \left[y_p^2 - 2y_p - 4r_n^2\right]}, \quad (1.340)$$

Из сравнения (1.339) и (1.340) следует, что при наличии отбора достижение заданной концентрации у «положительного» конца ПК требует большего времени, чем в случае работы ПК в безотборном режиме.

В случае  $y_p \rightarrow \infty$  соотношение (1.337) может быть упрощено, и для «положительного» конца ПК ( $y = y_p$ ) получим

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{c_0}{\sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p} - \left(\frac{1-\Psi}{2}\right)} = \\ &= \frac{c_0}{\Psi} \left[ \sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p} - \frac{p \sqrt{\left(\frac{1+\Psi}{2}\right)^2 + p}}{p + \Psi} \right] \end{aligned} \quad (1.341)$$

Переходя к оригиналам, с учетом (1.330) имеем

$$\begin{aligned} \frac{c_p(\tau)}{c_0} &= 1 + \frac{1}{\Psi} \left\{ \frac{1+\Psi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1+\Psi}{2} \sqrt{\tau}\right) + \frac{1-\Psi}{2} (1 - \exp(-\psi\tau)) \cdot \right. \\ &\cdot \left. \left[ 1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1-\Psi}{2} \sqrt{\tau}\right) \right] - \frac{1-\Psi}{2} \operatorname{erf}\left(\frac{1-\Psi}{2} \sqrt{\tau}\right) \right\} \end{aligned} \quad (1.342)$$

где

$$\operatorname{erf} z = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-x^2) dx \quad (1.343)$$

При  $\Psi \rightarrow 0$  в формуле (1.342) возникает неопределенность, раскрывая которую найдем отношение концентраций в безотборном режиме, когда  $c \ll 1$

$$\frac{c_p(\tau)}{c_0} = \left(1 + \frac{\tau}{2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\tau}}{2}\right)\right] + \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \exp\left(-\frac{\tau}{4}\right). \quad (1.344)$$

Численный анализ показывает, что при одинаковых безразмерных временах  $\tau$  значения концентрации в потоке отбора, получаемые с помощью формулы (1.341), всегда превышают значения, получаемые с помощью формулы (1.340).

Сравним теперь переходные процессы, протекающие в идеальном и прямоугольном каскадах.

На рис. 1.29 приведено отношение времен при одинаковом значении коэффициента  $\varphi = 0,95$  идеального каскада  $t^*$  и прямоугольного каскада  $t_{\text{ПК}}$  в зависимости от степени разделения

$Q_p = R_p/R_0$  для случая  $c \ll 1$ . Время  $t_{\text{ПК}}$  рассчитываем по формуле (1.338), а  $t^*$  – по формуле (1.325).

Следует отметить, что величины  $t^*/t_{\text{ПК}}$  в широком диапазоне  $Q_p$  практически совпадают с соответствующими величинами к.п.д. формы прямоугольного каскада. Качественно это можно объяснить тем, что времена  $t^*$  и  $t_{\text{ПК}}$  пропорциональны накоплению изотопа, а накопление, в свою очередь, пропорционально объему каскада и соответственно для ПК определяется КПД формы.

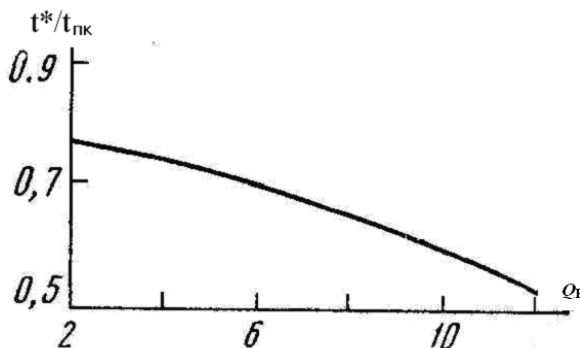


Рис. 1.29. Зависимость величины  $t^*/t_{\text{ПК}}$  от степени разделения  $Q_p = R_p/R_0$  для случая малых концентраций ( $c \ll 1$ ) [33]

### 3. Оценка времени установления по отношению суммарного накопления ценного изотопа в каскаде к средней скорости его накопления [4]

Рассмотрим упрощенный подход для оценки времени выхода каскада на стационарный режим работы.

Исходные предположения:

1) в начальный момент времени каскад заполнен смесью с концентрацией ценного изотопа  $c_F$ ;

2) так как время выхода каскада на стационарный режим работы  $t_P$  определяется в основном обогатительной частью, рассмотрим случай  $y_W = 0$  (отсутствие обеднительной части). На «отрицательном» конце каскада ( $s = 0$ ) поддерживают постоянное значение концентрации  $c(0, \tau) = c_0$ . Это эквивалентно тому, что к «отрицательному» концу каскада подсоединен резервуар бесконечного объема, содержащий рабочее вещество с концентрацией  $c_0$  (см. рис. 1.30).

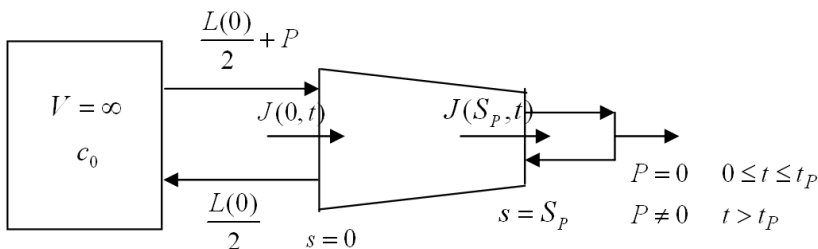


Рис. 1.30. Схема каскада в бесконечном резервуаре на «отрицательном» конце

3) в период времени  $[0, t_P]$  поток отбора выключен. Он включается в момент времени  $t = t_P$ , когда концентрация на «положительном» конце достигает расчетного значения  $c_P$  (рис. 1.31).

Для того, чтобы вывести каскад на стационарный режим работы, в нем следует накопить ценный изотоп (полное накопление) в количестве



$$\tilde{M} = \omega \int_0^{S_p} L(s)[c(s) - c_F] ds \quad (1.345)$$

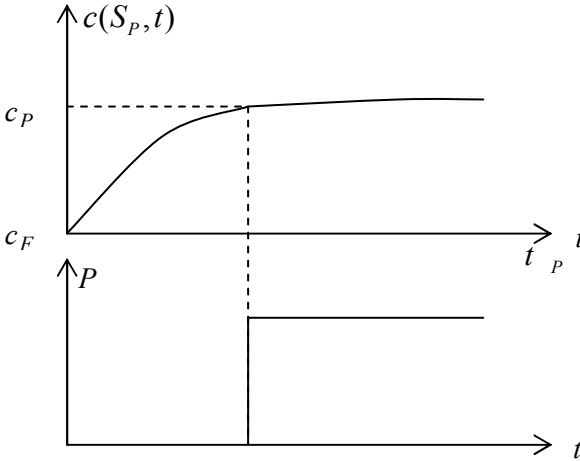


Рис. 1.31. Качественные зависимости, поясняющие момент включения потока отбора из каскада

Обозначим через  $J(0, t)$  и  $J(S_p, t)$  соответственно поток ценного изотопа через начальную и конечную ступени в момент времени  $t$ . Поток изотопа через произвольную ступень  $s$  в момент времени  $t$  равен:

$$J(s, t) = \frac{L(s)}{2} \left\{ \varepsilon c(s, t) [1 - c(s, t)(1 - c(s, t))] - \frac{\partial c(s, t)}{\partial t} \right\} \quad (1.346)$$

Тогда скорость накопления ценного изотопа в каскаде для  $0 \leq t < t_p$  будет равна

$$\begin{aligned} \Delta J(t) &= J(0, t) - J(S_p, t) = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \left[ L(0) c(0, t)(1 - c(0, t)) - L(S_p) c(S_p, t)(1 - c(S_p, t)) \right] + \\ &+ \frac{1}{2} \left[ L(S_p) \frac{\partial c}{\partial s} \Big|_{s=S_p} - L(0) \frac{\partial c}{\partial s} \Big|_{s=0} \right] \end{aligned} \quad (1.347)$$

Величины (1.345) и (1.347) связаны очевидным соотношением

$$\tilde{M} = \int_0^{t_p} \Delta J(t) dt \quad (1.348)$$

Интеграл в (1.348) можно представить в виде

$$\int_0^{t_p} \Delta J(t) dt = \overline{\Delta J} \cdot t_p \quad (1.349)$$

где  $\overline{\Delta J}$  – средняя скорость накопления ценного изотопа за временной промежуток  $[0, t_p]$ , тогда, время  $t_p$  можно оценить по формуле

$$t_p = \frac{\tilde{M}}{\overline{\Delta J}} \quad (1.350)$$

Оценим теперь среднюю скорость накопления в начальный момент времени  $\overline{\Delta J}(0) = J(0, 0) - J(S_p, 0)$  и в момент времени  $t = t_p$ ,  $\overline{\Delta J}(t_p) = J(0, t_p) - J(S_p, t_p)$ .

При  $t = 0$ ,

$$c(0, 0) = c_0, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial s} \right|_{\substack{s=0 \\ t=0}} = 0;$$

$$c(S_p, 0) = c_p, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial s} \right|_{\substack{s=0 \\ t=0}} = 0.$$

Следовательно,

$$\overline{\Delta J}(0) = \frac{1}{2} \varepsilon c_0 (1 - c_0) [L(0) - L(S_p)]. \quad (1.351)$$

Для любого момента времени  $t'$

$$t' > t_p, \quad c(0, t') = c_0,$$

$$\left. \frac{\partial c}{\partial s} \right|_{s=0} = \varepsilon c_0 (1 - c_0) - \frac{2P}{L(0)} (c_p - c_0),$$

$$c(s_p, t') = c_p, \quad \left. \frac{\partial c}{\partial s} \right|_{s=S_p} = \varepsilon c_p (1 - c_p),$$

при этом  $J(0, t') = Pc_p$ ,  $J(S_p, t') = Pc_p$ , и, следовательно,  $\Delta J(t') = 0$ .

При  $t = t_p$  поток отбора скачком меняет свое значение от нуля до расчетного значения (рис.1.31). Будем считать, что при этом функции  $c(0, t)$ ,  $c(S_p, t)$  и  $\left. \frac{\partial c}{\partial s} \right|_{s=S_p}$  остаются непрерывными. В

этом случае можно написать при  $t = t_p$ :

$$P = 0, \quad c(0, t_p) = c_0 \quad \left. \frac{\partial c}{\partial s} \right|_{s=0} = \varepsilon c_0 (1 - c_0) - \frac{2P}{L(0)} (c_p - c_0),$$

$$c(S_p, t_p) = c_p \quad \left. \frac{\partial c}{\partial s} \right|_{s=S_p} = \varepsilon c_p (1 - c_p),$$

и, следовательно,

$$\Delta J(t_p) = P(c_p - c_0). \quad (1.352)$$

Предполагая, что функция  $\Delta J(t)$  монотонная, аппроксимируем среднее значение  $\overline{\Delta J}$  формулой

$$\overline{\Delta J} = (1 - K) \Delta J(0) + K \Delta J(t_p), \quad (1.353)$$

где  $0 \leq K \leq 1$ .

Оценим теперь  $t_p$  для идеального каскада. Поскольку  $L^*(0) = \frac{4P(c_p - c_0)}{\varepsilon c_0 (1 - c_0)}$  и  $L^*(S_p) = 0$ , и, следовательно

$\Delta J^*(0) = 2P(c_p - c_0)$ ,  $\Delta J^*(l_p) = P(c_p - c_0)$ , то в соответствии с формулой (1.353)

$$\overline{\Delta J^*} = (2 - K) P(c_p - c_0). \quad (1.354)$$

Ограничиваясь случаем  $c \ll 1$ , определим полное накопление  $\tilde{M}$

$$\begin{aligned}
\tilde{M} &= \omega \int_0^{S_p} L^*(s)(c - c_0) ds = \omega \int_{c_F}^{c_P} \frac{L^*(c)(c - c_0)}{\left(\frac{dc}{ds}\right)^*} dc = \\
&= \omega \int_{c_F}^{c_P} \frac{4P(c_P - c)(c - c_0)}{\frac{1}{2} \varepsilon c^2} dc = \\
&= \frac{8\omega P}{\varepsilon^2} \int_{c_F}^{c_P} \frac{c_P c - c_P c_0 - c^2 + c_0 c}{c^2} dc = \\
&= \frac{8\omega P}{\varepsilon^2} \left[ (c_P + c_0) \ln \frac{c_P}{c_0} - 2(c_P - c_0) \right].
\end{aligned} \tag{1.355}$$

Подставляя (1.354), (1.355) в (1.350), получим

$$t_p^* = \frac{1}{2-K} \frac{8}{\varepsilon^2} \omega E(c_P, c_0), \tag{1.356}$$

где

$$E(c_P, c_0) = \frac{(c_P + c_0) \ln \frac{c_P}{c_0}}{c_P - c_0} - 2. \tag{1.357}$$

Так как,  $0 \leq K \leq 1$ , то

$$\frac{1}{2} \frac{8\omega}{\varepsilon^2} E(c_P, c_0) \leq t_p^* \leq \frac{8\omega}{\varepsilon^2} E(c_P, c_0). \tag{1.358}$$

Если  $\varepsilon = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\omega = 30c$ ,  $c_P = 3,5\%$ ,  $c_F = 0,7\%$  [4], то

$$\frac{8\omega}{\varepsilon^2} E(c_P, c_F) \approx 127 \text{ дней.}$$

В случае, если каскад прямоугольный, то  $L(0) = L(S_p) \equiv L$ ,  $\Delta J(0) = 0$ ,  $\Delta J(t_p) = P(c_P - c_0)$  и, следовательно,

$$\overline{\Delta J} = K P(c_P - c_0) \tag{1.359}$$

Оценим накопление в ПК следующим образом. Пусть  $\bar{c}$  - средняя по длине каскада концентрация ценного изотопа в ПК, работающем в стационарном режиме.

Если положить

$$\bar{c} = K' c_p + (1 - K') c_0 = c_0 + K' (c_p - c_0), \quad 0 \leq K' \leq 1 \quad (1.360)$$

то полное накопление с учетом (1.360) можно оценить как

$$\tilde{M} = \omega \int_0^{s_p} L(c_p - \bar{c}) ds = \omega L K' (c_p - c_0) S_p, \quad (1.361)$$

подставляя (1.361) и (1.3360) в (1.350), получим

$$t_p = \frac{\omega}{\varepsilon^2} \cdot \frac{K'}{K} \cdot \frac{\varepsilon L}{P} \cdot \varepsilon S_p. \quad (1.362)$$

В работе [4] по выбору величины  $K'$  даны следующие рекомендации:

$$\begin{aligned} &\text{для } c_p < 50\%, \quad 0 \leq K' \leq 0,5; \\ &\text{для } c_0 \geq 50\%, \quad 0,5 \leq K' \leq 1; \\ &\text{для } c_0 < 50\% < c_p, \quad K' \approx 0,5; \end{aligned} \quad (1.363)$$

При  $\varepsilon = 3 \times 10^{-3}$ ,  $\omega = 30$  с,  $K' = 0,25$ ,  $K = 1$ ,  $\frac{\varepsilon L}{P} = 10,70$  и  $\varepsilon S_p = 2,48$ ,  $t_p = 275$  дней, что менее, чем на 10 %, отличается от соответствующей величины, полученной из решения задачи численным методом.

## 1.12. Несимметричные каскады [3, 40-46]

В разделе 1.7 на примере симметричного идеального каскада показано, что соединение несимметричных ступеней ( $\alpha \neq \beta$ ) в такой каскад не может обеспечить для каждой из них режим работы, близкий к оптимальному. В результате суммарный поток в каскаде оказывается больше минимально возможного. Для таких способов разделения смесей, как сопло Беккера [38] или разделение на полупроницаемых мембранах [39], применение несимметричных ступеней с существенным отличием величины  $\theta$  от 0,5 является прин-

ципальным. Так, согласно [38], при разделении изотопов урана в виде  $UF_6$  оптимальный режим работы сопла Беккера осуществляется при  $\theta=0,2$ .

Как известно, изменить значение коэффициента деления потока на ступенях каскада можно за счет изменения схемы их соединения, применяя, например, несимметричные схемы противоточных каскадов, в которых обогащенный поток  $\theta_s L_s$  с  $s$ -й ступени подается на вход  $(s+k)$ -й ступени, а обедненный поток  $(1-\theta_s)L_s$  возвращается на вход  $(s-p+1)$ -й ступени, причем  $k \geq 1$ ,  $p \geq 2$ . В частном случае  $k=1$ ,  $p=2$  каскад будет работать в симметричном режиме.

Как будет показано ниже, изменением величин  $k$  и  $p$  можно достичь как меньших, так и больших по сравнению с симметричным каскадом значений  $\theta_s$ .

Ниже приводятся основные сведения из теории несимметричных каскадов, разработанной авторами работ [3, 40-46].

### ***1.12.1. Основные уравнения несимметричного каскада.***

#### ***Идеальный несимметричный каскад с произвольным обогащением на ступени***

Несимметричный каскад имеет, вообще говоря,  $k$  отборов и  $p-1$  отвалов. При малом обогащении на одной ступени можно считать концентрации всех отборов и соответственно всех отвалов приближенно одинаковыми. Это предположение значительно упрощает условия на концах каскада.

Для каскадов с большими обогащениями на ступенях такое предположение неправомерно и необходимо уточнить условия соединения ступеней на концах каскада. Можно принять, что на отборном конце каскада все обогащенные потоки со ступеней  $N-k \leq s \leq N$  подаются на вход последней  $N$ -й ступени, а на отвальном конце все обедненные потоки со ступеней  $1 < s \leq p$  подаются на вход первой ступени. Схема такого каскада в частном случае  $k=2$ ,  $p=4$ ,  $N=6$  показана на рис. 1.32.

Баланс полных потоков и потоков обогащенного компонента на входе в некоторую ступень, где  $1 + k \leq s \leq N - (p - 1)$  дает

$$L_{s-k} \theta_{s-k} + L_{s+(p-1)} (1 - \theta_{s+(p-1)}) = L_s, \quad (1.364)$$

$$L_{s-k} \theta_{s-k} (c_{s-k} + \delta'_{s-k}) + L_{s+(p-1)} (1 - \theta_{s+(p-1)}) (c_{s+(p-1)} + \delta''_{s+(p-1)}) = L_s c_s. \quad (1.365)$$

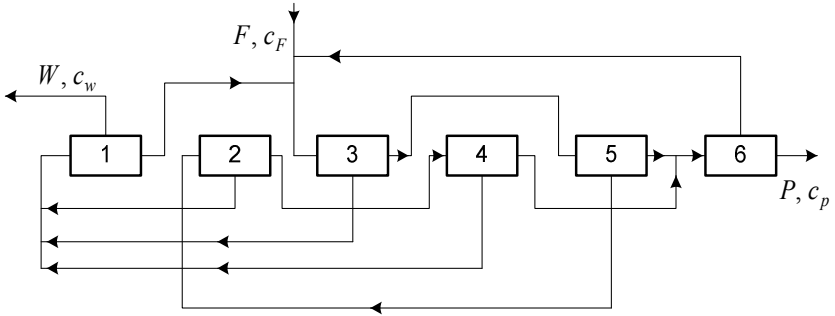


Рис. 1.32. Несимметричный каскад из шести ступеней

Если на одну из ступеней с номером  $s = f$  подается поток питания  $F$  с концентрацией  $c_F$ , то для этой ступени можно написать

$$F + L_{f-k} \theta_{f-k} + L_{f+(p-1)} (1 - \theta_{f+(p-1)}) = L_f, \quad (1.366)$$

$$F c_F + L_{f-k} \theta_{f-k} (c_{f-k} + \delta'_{f-k}) + L_{f+(p-1)} (1 - \theta_{f+(p-1)}) (c_{f+(p-1)} + \delta''_{f+(p-1)}) = L_f c_f. \quad (1.367)$$

На отборном конце каскада те же уравнения принимают более простой вид:

$$L_{s-k} \theta_{s-k} = L_s, \quad N - (p - 1) < s < N; \quad (1.368)$$

$$L_{s-k} \theta_{s-k} (c_{s-k} + \delta'_{s-k}) = L_s c_s, \quad N - (p - 1) < s < N, \quad (1.369)$$

$$\sum_{i=1}^k L_{N-i} \theta_{N-i} = L_N, \quad (1.370)$$

$$\sum_{i=1}^k L_{N-i} \theta_{N-i} (c_{N-i} + \delta'_{N-i}) = L_N c_N, \quad (1.371)$$

$$L_N \theta_N = P, \quad (1.372)$$

$$L_N \theta_N (c_N + \delta'_N) = P c_p ; \quad (1.373)$$

и, соответственно, для отвального конца

$$L_{s+(p-1)} (1 - \theta_{s+(p-1)}) = L_s, \quad 1 < s < 1 + k ; \quad (1.374)$$

$$\begin{aligned} L_{s+(p-1)} (1 - \theta_{s+(p-1)}) (c_{s+(p-1)} - \delta''_{s+(p-1)}) = \\ = L_s c_s, \quad 1 < s < 1 + k \end{aligned} ; \quad (1.375)$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} L_{i+1} (1 - \theta_{i+1}) = L_1 ; \quad (1.376)$$

$$\sum_{i=1}^{p-1} L_{i+1} (1 - \theta_{i+1}) (c_{i+1} - \delta''_{i+1}) = L_1 c_1 ; \quad (1.377)$$

$$L_1 (1 - \theta_1) = W ; \quad (1.378)$$

$$L_1 (1 - \theta_1) (c_1 - \delta''_1) = W c_w . \quad (1.379)$$

Если приращение концентрации (функцию обогащения) на произвольной  $s$ -й ступени задать в виде

$$c'_s - c_s = \delta'_s = f(c_s, \theta_s), \quad (1.380)$$

причем, согласно балансу потоков

$$\delta'_s = \frac{1 - \theta_s}{\theta_s} \delta''_s, \quad (1.381)$$

то система уравнений (1.364) – (1.379) представляет полную систему для любого каскада с заданным профилем. При этом подразумевается, что отбор  $P$ , концентрации в потоках отбора  $c_p$  и отвала  $c_w$  заданы, а значения  $L_s$  должны оставаться в известных пределах, чтобы не получилось отрицательных обогащений. Кроме того, следует учитывать, что обогащение на одной ступени конечно и при строгом выполнении условий баланса число ступеней может оказаться «дробным». При необходимости точной корректировки считают, что одна из величин  $L_s$  не является произвольной.

Для построения идеального несимметричного каскада необходимо использовать условие отсутствия смешивания концентраций на входах в разделительную ступень

$$c'_{s-k} = c_s = c''_{s+(p-1)}. \quad (1.382)$$



Условие (1.382) дает возможность из уравнений (1.365), (1.369), (1.370), (1.374), (1.376) после алгебраических преобразований и с использованием условия (1.380) и граничных условий (1.373) и (1.379) получить соотношения для приращения концентраций на разделительной ступени несимметричного идеального каскада

$$c_s - c_{s-k} = f(c_{s-k}, \theta_{s-k}), \quad 1+k \leq s < N, \quad (1.383)$$

$$c_N - c_{s-k} = f(c_{s-k}, \theta_{s-k}), \quad N \leq s < N+k, \quad (1.384)$$

$$c_p - c_N = f(c_N, \theta_N) \quad (1.385)$$

и формулы для определения коэффициентов деления потоков

$$\theta_s = \frac{c_s - c_{s-(p-1)}}{c_{s+k} - c_{s-(p-1)}}, \quad 1+(p-1) < s < N-k, \quad (1.386)$$

$$\theta_s = \frac{c_s - c_{s-(p-1)}}{c_n - c_{s-(p-1)}}, \quad N-k \leq s < N; \quad (1.387)$$

$$\theta_s = \frac{c_s - c_1}{c_{s+k} - c_1}, \quad 1 < s \leq 1+(p-1); \quad (1.388)$$

$$\theta_1 = \frac{c_1 - c_w}{c_{1+k} - c_w}, \quad (1.389)$$

$$\theta_N = \frac{c_N - c_{N-(p-1)}}{c_p - c_{N-(p-1)}}. \quad (1.390)$$

Для получения полной системы уравнений несимметричного идеального каскада достаточно к уравнениям (1.383) – (1.390) добавить уравнения баланса по полным потокам или по потоку ценного (целевого) компонента на выбор. Рассматривая первый случай, можно утверждать, что системы уравнений (1.383) – (1.385), (1.386) – (1.390) и уравнения (1.364), (1.366), (1.368), (1.370), (1.372), (1.374), (1.376), (1.378) образуют полную систему уравнений идеального несимметричного каскада при произвольных обогашениях на отдельной ступени.

Для случая, когда полный коэффициент деления не зависит от  $\theta$ , для идеального несимметричного каскада может быть получено аналитическое решение.

В качестве примера рассмотрим такой тип каскад, в котором ступени соединены так, что обогащенная фракция со ступени  $s$  направляется на питание ступени  $s+2$ , а обедненная фракция подается на вход  $(s-1)$ -й ступени, т.е.  $k=2, p=2$ .

Такой каскад дает два потока отбора  $P_1$  и  $P_2$  с концентрациями  $c_{P_1}$  и  $c_{P_2}$  и один поток отвала с концентрацией  $c_W$  (рис. 1.33).

Уравнения материального баланса для обеднительной части каскада, находящейся между точкой отвала и произвольной ступенью  $s$  имеют вид

$$\theta_s L_s + \theta_{s-1} L_{s-1} + W = (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}, \quad (1.391)$$

$$\theta_s L_s c'_s + \theta_{s-1} L_{s-1} c'_{s-1} + W = (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_{s+1}. \quad (1.392)$$

Аналогичные соотношения для обогащительной части каскада можно записать следующим образом

$$\theta_s L_s + \theta_{s-1} L_{s-1} = P_1 + P_2 + (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}, \quad (1.393)$$

$$\theta_s L_s c'_s + \theta_{s-1} L_{s-1} c'_{s-1} = P_1 c_{P_1} + P_2 c_{P_2} + (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_{s+1}. \quad (1.394)$$

Условие идеальности в рассматриваемом случае запишется в виде

$$c''_{s+2} = c_{s+1} = c'_{s-1}. \quad (1.395)$$

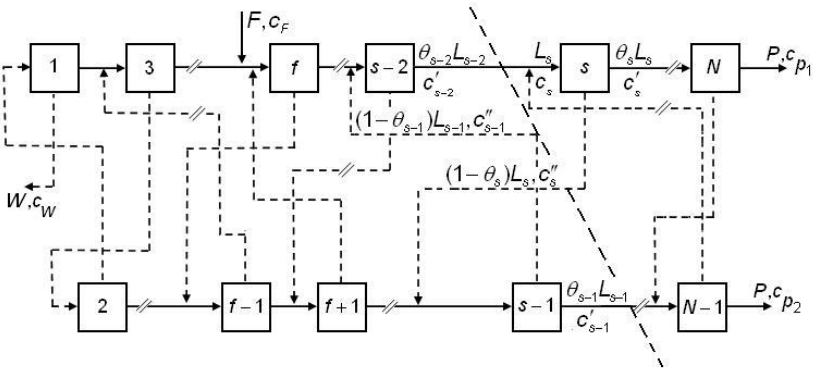


Рис. 1.33. Схема несимметричного каскада с обогащенным потоком, выходящим из произвольной ступени и подаваемым через одну ступень «вперед» в прямом направлении, и обедненным потоком, подаваемым на вход предыдущей ступени

Для случая малых концентраций ( $c \ll 1$ ) коэффициент разделения ступени соответственно для обогащенной и обедненной фракций с учетом (1.395) можно записать в виде

$$\alpha = \frac{c'_{s+1}}{c'_{s-1}} = \frac{c'_{s+1}}{c'_s} \cdot \frac{c'_s}{c'_{s-1}}, \quad (1.396)$$

$$\beta = \frac{c'_{s-1}}{c''_{s+1}} = \frac{c'_s}{c'_{s-1}} = \frac{c'_{s+1}}{c'_s}. \quad (1.397)$$

По исходному предположению величины  $\alpha$  и  $\beta$  не меняются по длине каскада. Комбинируя в этом случае (1.396) и (1.397), получаем, что для любой ступени рассматриваемого каскада выполняются соотношения

$$\alpha = \beta^2, \quad (1.398)$$

$$q = \alpha \cdot \beta = \beta^3. \quad (1.399)$$

Решая уравнения (1.396) и (1.397) с граничным условием  $c'_1 = \beta^3 c_w$  и учетом соотношений (1.398) и (1.399), получим

$$c'_s = c_w \beta^{s+2}, \quad 1 \leq s \leq N, \quad (1.400)$$

$$c''_s = c_w \beta^{s-1}, \quad 1 \leq s \leq N. \quad (1.401)$$

Из уравнения баланса для произвольной  $s$ -й ступени

$$c_s = \theta_s c'_s + (1 - \theta_s) c''_s, \quad (1.402)$$

имея в виду, что  $\alpha = \frac{c'_s}{c_s}$ ,  $\beta = \frac{c_s}{c''_s}$  и учитывая соотношение (1.399),

получим выражение для коэффициента деления потока

$$\theta_s = \frac{\beta - 1}{q - 1} = \frac{\beta - 1}{\beta^3 - 1}, \quad s = 1, 2, \dots, N. \quad (1.403)$$

Комбинируя уравнения (1.391) и (1.392) с учетом (1.400) и (1.401), приходим к следующему уравнению, описывающему отвальную часть каскада

$$\beta^s (\beta^2 - 1) Y_s + \beta^s (\beta - 1) Y_{s-1} = \beta^s - 1, \quad (1.404)$$

где  $Y_s = \frac{\theta_s L_s}{W}$ .

Уравнение (1.404) представляет собой неоднородное разностное уравнение первого порядка, общее решение которого имеет вид [26]

$$Y_s = k \left( -\frac{1}{\beta+1} \right)^{s-1} - \frac{\beta^{-s}}{(\beta-1)(2\beta+1)} + \frac{1}{(\beta-1)(\beta+2)}. \quad (1.405)$$

$$1 \leq s \leq f-1.$$

Константу  $k$  определяют, используя граничное условие:

$$Y_1 = \frac{\theta_1 L_1}{W} = \frac{\theta_1}{1-\theta_1} = \frac{1}{\beta(\beta+1)};$$

$$k = \frac{1}{\beta(\beta+1)} + \frac{1}{\beta(\beta-1)(2\beta+1)} - \frac{1}{(\beta-1)(\beta+2)}. \quad (1.406)$$

Для отборной части каскада комбинирование уравнений (1.393) и (1.394) с учетом (1.400) и (1.401) дает

$$(\beta^2 - 1)X_s + (\beta - 1)X_{s-1} = (\beta^{N-s+2} - 1) + \gamma(\beta^{N-s+1} - 1), \quad (1.407)$$

где  $X_s = \frac{\theta_s L_s}{P_1}$ ,  $\gamma = \frac{P_1}{P_2}$ .

Учитывая, что  $X_N = \frac{\theta_N L_N}{P_1}$ , решение (1.407) можно записать

следующим образом

$$X_s = [-(\beta+1)]^{N-s} - \frac{\beta(\beta+\gamma)}{(\beta-1)(2\beta+1)} \left\{ [-(\beta+1)]^{N-s} - \beta^{N-s} \right\} +$$

$$+ \frac{1+\gamma}{(\beta-1)(\beta+2)} \left\{ [-(\beta+1)]^{N-s} - 1 \right\}, \quad f-1 \leq s \leq N. \quad (1.408)$$

Для  $(N-1)$ -й и  $(N-2)$ -й ступеней решение (1.408) преобразуется к виду

$$X_{N-1} = \gamma, \quad (1.409)$$

$$X_{N-2} = \frac{1}{\theta} = \beta^2 + \beta + 1. \quad (1.410)$$

При  $s = f-1$  справедливы соотношения (1.405) и (1.406), так что можно записать равенство

$$X_{f-1} = Y_{f-1} \cdot \frac{W}{P_1}. \quad (1.411)$$

С другой стороны из общих уравнений баланса следует

$$F = P_1 + P_2 + W, \quad (1.412)$$

$$Fc_F = P_1c_{P_1} + P_2c_{P_2} + Wc_W. \quad (1.413)$$

С учетом (1.400) и (1.401) получаем

$$\frac{W}{P_1} = \frac{\beta + \gamma + (1 + \gamma) / \beta^{N-f+1}}{\frac{1}{\beta^{N-f+1}} - \frac{1}{\beta^{N+1}}}. \quad (1.414)$$

Исключая из выражений (1.390) и (1.393) отношение  $\frac{W}{P_1}$ , окончательно имеем

$$\gamma = \frac{d - \beta l - a + r}{b + l - r}, \quad (1.415)$$

где

$$a = \left( \frac{\beta^{N-f+2} - 1}{1 - 1/\beta^f} \right) Y_{f-1}, \quad (1.416)$$

$$b = \left( \frac{\beta^{N-f+1} - 1}{1 - 1/\beta^f} \right) Y_{f-1}, \quad (1.417)$$

$$d = [ -(\beta + 1) ]^{N-f+1}, \quad (1.418)$$

$$l = \frac{\beta \{ [ -(\beta + 1) ]^{N-f+1} - \beta^{N-f+1} \}}{(\beta - 1)(\beta + 2)}, \quad (1.419)$$

$$r = \frac{[ -(\beta + 1) ]^{N-f+1} - 1}{(\beta - 1)(\beta + 2)} \quad (1.420)$$

Таблица 1.6

Распределение концентраций  $c'_s$  и потоков в идеальном несимметричном каскаде (значения параметров приведены в тексте)

| $\gamma = P_1 / P_2 = 2,868$ |            |                      |
|------------------------------|------------|----------------------|
| $W / P_1 = 12,479$           |            |                      |
| $c_w = 0,246\%$              |            |                      |
| Номер ступени                | $c'_s, \%$ | $\theta_s L_s / P_1$ |
| 1                            | 0,545      | 4,160                |
| 2                            | 0,710      | 5,546                |
| 3                            | 0,925      | 7,400                |
| 4                            | 1,205      | 8,473                |
| 5                            | 1,570      | 4,000                |
| 6                            | 2,045      | 2,868                |
| 7                            | 2,664      | 1,000                |

Таким образом, если заданы величины  $\beta, N, f$ , соотношения (1.400), (1.401), (1.408), (1.411) и (1.412) образуют полную систему для определения величин  $P_1 / P_2$  и  $W / P_1$ , а также распределения концентраций и потоков по длине каскада. Распределения концентраций  $c'_s$  и потоков по ступеням идеального несимметричного каскада при значениях параметров  $k=2, p=2, N=7, f=4, \beta=1,303, \theta=0,25$  для разделяемой смеси  $^{235}\text{UF}_6 / ^{238}\text{UF}_6$  [14] приведены в табл. 1.6.

В соответствии с формулами (1.62), (1.398), (1.399) и (1.409) удельная разделительная способность ступени несимметричного каскада при значениях параметров  $k=2, p=2$  будет рассчитываться по формуле

$$\delta U / L = (1 - 3\theta) \ln \beta. \quad (1.421)$$

Подстановка данных, приведенных в табл. 1.6, в выражение для удельной разделительной способности (1.421) дает значение  $\delta U / L = 0,198$ .

Суммарное число разделительных элементов в каскаде может быть рассчитано по формуле

$$\sum Z = \frac{\Delta U}{\delta U_{эл}}, \quad (1.422)$$

$$\Delta U = P_1 V(c_{p_1}) + P_2 V(c_{p_2}) + W V(c_W) - F V(c_F),$$

где

$$V(c) = (2c - 1) \ln \frac{c}{1 - c} \approx -\ln c.$$

### 1.12.2. Несимметричный идеальный каскад с малым обогащением на ступени

Для малых обогащений на ступени можно считать концентрации всех отборов и соответственно всех отвалов приблизительно одинаковыми. Это значительно упрощает условия на концах каскада ( $P = P_1 + \dots + P_k$ ,  $W = W_1 + \dots + W_{P-1}$ ,  $c_P = c_{P_1} = \dots = c_{P_K}$ ,  $c_W = c_{W_1} = \dots = c_{W_{P-1}}$ ).

Составляя уравнения баланса потоков для смеси и для одного из компонентов в сечении между  $s$ -й и  $s+1$ -й ступенью получим:

$$A_s + A_{s-1} + \dots + A_{s-k+1} - B_{s+1} - B_{s+2} - \dots - B_{s+p-1} = P, \quad (1.423)$$

$$\begin{aligned} & A_s(c_s + \delta'_s) + A_{s-1}(c_{s-1} + \delta'_{s-1} + \dots + A_{s-k+1}(c_{s-k+1} + \delta'_{s-k+1}) - \\ & - B_{s+1}(c_{s+1} - \delta''_{s+1}) - B_{s+2}(c_{s+2} - \delta''_{s+2}) - \dots - \\ & - B_{s+p-1}(c_{s+p-1} - \delta''_{s+p-1}) = P c_P, \end{aligned} \quad (1.424)$$

где  $A_s$ ,  $B_s$  – обогащенный и обедненный потоки на  $s$ -й ступени.

Будем, как и раньше, обозначать разность  $c_{s+1} - c_s$  через  $\frac{dc_s}{ds}$ . Так

как величины  $\delta$  и  $\frac{dc_s}{ds}$  по определению малы по сравнению с  $c_s$ , а числа  $p$  и  $k$  невелики (не больше нескольких единиц), то с точностью до малых второго порядка можно принять.

$$\left. \begin{aligned} \delta'_s &= \delta'_{s-1} = \dots = \delta'_{s-k+1} = \delta' \\ \delta''_{s+1} &= \delta''_{s+2} = \dots = \delta''_{s+p-1} = \delta'' \\ \frac{dc_s}{ds} &= \frac{dc_{s-1}}{ds} = \dots = \frac{dc}{ds} \\ c_s &= c_{s-1} = \dots = c \end{aligned} \right\}. \quad (1.425)$$

Для каскадов с непрерывным распределением параметров можно также считать

$$\left. \begin{aligned} A_s &= A_{s-1} = \dots = A_{s-k+1} = A = \theta L \\ B_{s+1} &= B_{s+2} = \dots = B_{s+p-1} = B = (1-\theta)L \end{aligned} \right\}. \quad (1.426)$$

Величина  $\theta$  в этих равенствах может быть найдена из уравнения (1.423), которое с учетом принятых приближений может быть переписано в виде:

$$kA - (p-1)B = P \quad (1.427)$$

Считая  $P$  малым по сравнению с  $L$ , получим из (1.426) и (1.427):

$$\frac{A}{B} = \frac{\theta}{1-\theta} \cong \frac{p-1}{k}, \quad (1.428)$$

откуда

$$\theta \cong \frac{p-1}{k+p-1} \quad (1.429)$$

Формула (1.429) получена с такой же степенью приближения, с какой в симметричном каскаде  $\theta = \frac{1}{2}$ . Это значение  $\theta$  очевидно получается из (1.429) при  $k=1$  и  $p=2$ . С учетом выражений (1.425) и (1.426) уравнение (1.424) переписывается в виде:

$$\begin{aligned} kAc + kA\delta' - A \frac{dc}{ds} [(1+2+3+\dots+(k-1))] - (p-1)Bc + \\ + (p-1)B\delta'' - B \frac{dc}{ds} [(1+2+3+\dots+(p-1))] = Pc_p, \end{aligned} \quad (1.430)$$



а поскольку  $[1 + 2 + 3 + \dots + (k - 1)] = \frac{k(k - 1)}{2}$ ,  $[1 + 2 + 3 + \dots +$   
 $\dots + (p - 1)] = \frac{p(p - 1)}{2}$  то

$$kAc + kA\delta' - \frac{1}{2} \frac{dc}{ds} [k(k - 1)A + p(p - 1)B] - \quad (1.431)$$

$$- (p - 1)Bc + (p - 1)B\delta'' = Pc_p$$

Умножая выражение (1.427) на  $c$  и вычитая его из (1.431), получим:

$$\frac{1}{2} \frac{dc}{ds} [k(k - 1)A + p(p - 1)B] = \quad (1.432)$$

$$= kA\delta' + (p - 1)B\delta'' - P(c_p - c)$$

Решая это уравнение относительно  $\frac{dc}{ds}$  с учетом (1.426) и (1.428), будем иметь

$$\frac{dc}{ds} = \frac{2\theta}{p - 1} \varepsilon c(1 - c) - \frac{2P}{k(p - 1)L} (c_p - c). \quad (1.433)$$

Уравнение для приращения концентраций (1.433) является обобщением уравнения (1.85) на случай несимметричного каскада.

Рассмотри теперь условия, которым должен подчиняться идеальный каскад. Точно также как и для симметричных каскадов, условие несмещения может быть записано в виде:

$$c_{s-k} + \delta'_{s-k} = c_s = c_{s+p-1} - \delta''_{s+p-1}, \quad (1.434)$$

или с учетом принятых приближений, вытекающих из малости обогащения на ступени

$$c_s - k \frac{dc}{ds} + \delta' = c_s = c_s + (p - 1) \frac{dc}{ds} - \delta'' . \quad (1.435)$$

Условия (1.435) можно также переписать в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta' + \delta''}{p+k-1} &= \frac{\delta'}{k} = \frac{\delta''}{p-1} \\ \frac{dc}{ds} &= \frac{\delta' + \delta''}{p+k-1} \end{aligned} \right\}. \quad (1.436)$$

Легко проверить, что первое из условий (1.436) с учетом (1.430) совпадает с условием баланса. Таким образом, первое условие в несимметричном каскаде с произвольными  $p$  и  $k$  выполняется автоматически так же, как и для симметричного каскада.

Из сравнения второго условия (1.436) с уравнением (1.433) следует, что для выполнения условия несмещения второй член справа от знака равенства уравнения (1.433) должен равняться половине первого, то есть

$$kL^* = \frac{2P(c_p - c)}{\theta \varepsilon c(1-c)} \quad (1.437)$$

Формула (1.437) дает распределение потоков в идеальном несимметричном каскаде в зависимости от концентрации. Второе из соотношений (1.436) дает зависимость концентрации от номера ступени. Суммарный поток в каскаде составит:

$$\sum L^* = \int_{c_w}^{c_F} \frac{2W(c - c_w)dc}{\theta(1-\theta)\varepsilon^2 c^2(1-c)^2} + \int_{c_F}^{c_p} \frac{2p(c_p - c)}{\theta(1-\theta)\varepsilon^2 c^2(1-c)^2} \quad (1.438)$$

Вынося за знак интегрирования не зависящую от  $c$  величину  $\theta(1-\theta)\varepsilon^2$ , можно вычислить оба интеграла в выражении (1.438). В результате получим:

$$\sum L^* = \frac{2}{\varepsilon^2 \theta(1-\theta)} P\Phi(c_p, c_F, c_w), \quad (1.439)$$

или

$$\sum \frac{\theta(1-\theta)L\varepsilon^2}{2} = P\Phi(c_p, c_F, c_w), \quad (1.440)$$

где  $\Phi(c_p, c_F, c_w)$  – функция ценности, определяемая формулой (1.130).

Соотношения (1.439) и (1.440) могут быть получены также из условия минимума суммарного потока. Таким образом, в каскаде с произвольными значениями параметров  $p$  и  $k$  всегда можно найти распределение  $L^*$ , обеспечивающее отсутствие смешения различных концентраций (или минимальность суммарного потока). Для каскада с известными внешними параметрами произведение  $P\Phi$  есть величина заданная; для того, чтобы каскад при заданных внешних условиях имел наименьшее число элементов, необходимо, чтобы выражение  $\frac{1}{\theta(1-\theta)\varepsilon^2}$  в соотношении (1.439) было минимальным. Это условие позволяет найти наивыгоднейшую величину  $\theta$ , а, следовательно, и наилучший коэффициент несимметричности. Так, для элементов, в которых разделение происходит вдоль некоторого канала, можно принять, что [5, 7]

$$\varepsilon = \varepsilon_* \frac{1}{\theta} \ln \frac{1}{1-\theta}, \quad (1.441)$$

где  $\varepsilon_*$  - постоянная величина, определяемая отношением разности масс изотопов к средней массе изотопной смеси. В данном случае функция

$$\frac{1}{\theta(1-\theta)\varepsilon^2(\theta)} = \frac{\theta}{(1-\theta)\ln^2 \frac{1}{\theta(1-\theta)}}$$

имеет минимум при  $\theta \approx 0,8$ , что соответствует несимметричному каскаду с одним потоком «вперед» и четырьмя потоками «назад»  $\left(k = 1, p = 5, \theta = \frac{4}{5}\right)$ .

### 1.12.3. Прямоугольный несимметричный каскад

В случае слабого обогащения уравнение отборной части несимметричного прямоугольного каскада в соответствии с (1.433) имеет вид

$$\frac{dc}{ds} = \frac{2\theta\varepsilon}{p-1}c(1-c) - \frac{2p(c_p - c)}{k(p-1)L}, \quad (1.442)$$

где  $L = \text{const}$ . Общее решение уравнения (1.442) позволяет найти  $S_p$  - число ступеней в обогащительной части несимметричного ПК

$$S_p = \frac{p-1}{2\theta\varepsilon\Delta\Psi_p} \ln \frac{1+X}{1-X}, \quad (1.443)$$

где величина  $X$  определяется формулами:

$$X = \frac{(c_p - c_F)\Delta\Psi_p}{(1 + \Psi_p)(c_p + c_F) - 2c_p c_F - 2c_p \Psi_p}, \quad (1.444)$$

$$\Delta\Psi_p = \left[ (1 + \Psi_p)^2 - 4\Psi_p c_p \right]^{1/2}, \quad (1.445)$$

$$\Psi_p = \frac{p}{k\theta\varepsilon L}. \quad (1.446)$$

Соответственно число ступеней  $S_w$  в обеднительной части несимметричного ПК будет равно

$$S_w = \frac{p-1}{2\theta\varepsilon\Delta\Psi_w} \ln \frac{1+X}{1-X}, \quad (1.447)$$

где 
$$X = \frac{(c_F - c_w)\Delta\Psi_w}{(1 + \Psi_w)(c_F + c_w) - 2c_F c_w - 2c_w \Psi_w}, \quad (1.448)$$

$$\Delta\Psi_w = \left[ (1 + \Psi_w)^2 - 4\Psi_w c_w \right]^{1/2}, \quad (1.449)$$

$$\Psi_w = \frac{W}{k\theta\varepsilon L}. \quad (1.450)$$

При  $k = 1$  и  $p = 2$  уравнения (1.442), (1.443) и (1.447) преобразуются в соотношения для прямоугольного симметричного каскада.

## Контрольные вопросы к первой части

1. Какую величину называют коэффициентом деления потока ступени?

2. Дайте определение полного коэффициента разделения ступени, коэффициентов разделения по обогащенной и обедненной фракции.

3. При каком значении концентрации в случае «слабого обогащения» обогащение  $\delta'$  и обеднение  $\delta''$  достигают максимального значения?

4. Как, согласно теории Дирака – Пайерлса, вводится понятие разделительной способности (мощности) ступени?

5. Опишите подход определения явного вида разделительного потенциала в случае «слабого обогащения».

6. Как в случае слабого обогащения связана величина разделительной способности с уменьшением энтропии при разделении на ступени?

7. Как определяют разделительный потенциал в случае произвольных обогащений на ступени?

8. Дайте определение симметричного противоточного разделительного каскада.

9. Перечислите основные параметры симметричного противоточного каскада.

10. Из каких соображений можно получить конечно-разностные уравнения, описывающие процесс разделения в каскаде?

11. Как выглядят уравнения противоточного симметричного каскада в случае «слабого обогащения»?

12. Из каких соображений можно найти минимальный поток питания каждой ступени в случае слабого обогащения?

13. Как рассчитать полное число ступеней в каскаде в случае безотборного режима ( $P = W = F = 0$ )?

14. Опишите два принципиальных подхода к выбору критериев эффективности работы каскада.

15. Какой каскад называют «идеальным»?

16. Из каких практических соображений в качестве критерия оптимизации принят минимум суммарного потока питания ступеней?

17. Опишите свойства идеального каскада с малым обогащением на ступени.

18. Дайте определение функции ценности.

19. Какая величина принята за единицу работы разделения?

20. Каковы особенности идеального каскада с немалым коэффициентом разделения на ступенях?

21. Опишите подходы к оптимизации (по суммарному потоку) каскада с немалым обогащением на ступенях и с заданными концентрациями целевого изотопа в потоках отбора и отвала.

22. Объясните, почему суммарный поток каскада со «смешением» может оказаться меньше суммарного потока идеального каскада из несимметричных ступеней.

23. Как учитывают потери рабочего вещества при расчете идеального каскада?

24. Какой каскад называют прямоугольно-секционированным?

25. Дайте определение КПД формы каскада.

26. Объясните, почему противоточную колонну формально можно представить как прямоугольный каскад.

27. Что называется высотой, эквивалентной теоретической ступни (ВЭТС)?

28. Каковы принципы оптимизации ПСК и ПК в случае «слабого обогащения»?

29. Как распределяется коэффициент деления потока по длине прямоугольного каскада в случае произвольных обогащений на его ступенях?

30. Из каких исходных соображений можно получить дифференциальные уравнения нестационарного процесса в случае «слабого обогащения»?

31. Каковы особенности нестационарных процессов разделения в каскадах для разделения бинарных смесей?

32. При каких допущениях получены приближенные решения уравнения нестационарного процесса?

33. Какой каскад называют несимметричным?

34. В каком случае может быть получено аналитическое решение для несимметричного идеального каскада при произвольных обогащениях на отдельной ступени?

35. Какой вид имеет уравнение, описывающее процесс разделения в несимметричном каскаде с малым обогащением на ступени?

36. Из каких соображений можно найти минимальное число элементов в идеальном несимметричном каскаде при заданных величинах  $P$ ,  $C_p$ ,  $C_F$ ,  $C_w$ ?

## Список литературы

1. Cohen K. The theory of isotope separation as applied to the large scale production of U-235. N.Y.: McGraw-Hill, 1951.
2. Benedict M., Pigford T.H. Nuclear Chemical Engineering. N.Y.: McGraw-Hill, 1957.
3. Обогащение урана / Под. ред. С.Виллани. Пер. с англ., М.: Энергоатомиздат, 1983.
4. Agostini J.-P. Theory of cascades in isotope separation. Report CEA-R-5666, 1994.
5. Сазыкин А.А. Термодинамический подход к разделению изотопов, в кн. Изотопы (Свойства. Получение. Применение.) / Под ред. В.Ю. Баранова. М: ИздАТ, 2000, С. 72-108.
6. Whitley S. Review of the gas centrifuge until 1962. Part 1 and 2. // Rev. Modern Physics. 1984. No. 56. P. 41-97.
7. Розен А.М. Теория разделения изотопов в колоннах. М.: Атомиздат, 1960.
8. Sulaberidze G.A., Borisevich V.D. and Gorbanev A.M. Modern concept of separation power and bounds of putting it into practice. // Proc. 5th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases. Iguassu Falls, Brazil, 1996. P. 33-347.
9. Kanagawa A., Yamamoto I. Separative power with respect to desired and undesired materials // Nucl. Sci. And Technol. 1977. V. 14[8]. P. 565-571.
10. Палкин В.А. Потенциал и разделительная способность в процессах разделения бинарных смесей изотопов // Атомная энергия. 1998. Т. 84. Вып. 3. С. 253-259.
11. Yamamoto I. and Kanagawa A. Optimum cut of separating element as a function of total separation factor // J. Nucl. Sci. and Technol. 1990. V. 27(6). P. 584-586.
12. Fenske M.R. // Ind. Engng. Chem. 1932. V. 24. P. 483.
13. Колокольцов Н.А., Лагунцов Н.И. К теории разделительных каскадов с произвольным обогащением на ступени // Атомная энергия. 1969. Т. 27. Вып. 6. С. 560-561.
14. Olander D.R. Design of ideal cascades of gas centrifuges with variable separation factors // Nucl. Sci. and Engng. 1976. V. 60. P. 421-434.

15. Yamamoto I., Kanagawa A. Separation power of ideal cascade with variable separation factors // J. Nucl. Sci. and Technol. 1978. V. 15[6]. P. 426-432.

16. Борисевич В.Д., Лагунцов Н.И., Сулаберидзе Г.А. и др. Методы оптимизации каскадов для разделения двух и многокомпонентных изотопных смесей // Тезисы докладов II-го Международного симпозиума стран-членов СЭВ по стабильным изотопам. Тбилиси, 27-30 ноября 1989. С. 28-30.

17. Палкин В.А. Оптимизация каскада при произвольно заданных коэффициентах разделения ступеней // Атомная энергия. 1997. Т. 82. Вып. 4. С. 295-301.

18. Палкин В.А. Определение оптимальных параметров каскада из газовых центрифуг // Атомная энергия. 1998. Т. 84. Вып. 3. С. 246-253.

19. Sulaberidze G.A., Borisevich V.D., Morin P.B., Wood H.G. On ideal and optimum cascades for separation of binary isotope mixtures // Proc. 8 th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases. ORNL, TN, USA, October 12-16, 2003.

20. Borisevich V.D., Sulaberidze G.A., Wood H.G. The theory of isotope separation in cascade: problems and solutions // Ars Separatoria Acta. 2003. No. 2. P. 107-124.

21. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М., 1975.

22. Палкин В.А., Фролов Е.С. Неоптимальные свойства идеального каскада с симметричными ступенями. // Атомная энергия. 2005. Т. 99. Вып. 3. С. 184-190.

23. Борисевич В.Д., Борман В.Д., Сулаберидзе Г.А., Тихомиров А.В., Токманцев В.И. Физические основы разделения изотопов в газовой центрифуге. Учебное пособие / Под ред. В.Д.Бормана, 2005.

24. Artyukhov A.A., Babichev A.P., Knyasev I.Yu. et al. Centrifugal enrichment of cadmium isotopes as the basis for further experiments on physics of weak interactions // Nucl. Instr. & Meth. 1997. A 401. P. 281-288.

25. Aisen E.M., Borisevich V.D., Potapov D.V. et al. Computing experiments for study of cadmium isotope separation by gas centrifuges // Nucl. Instr. & Meth. 1998. A 417. P. 428-433.



26. Корн Г. и Корн Т. Справочник по математике для научных работников. М.: Наука, 1973.

27. Палкин В.А., Фролов Е.С. Расчет и свойства прямоугольного каскада с заданными внешними концентрациями по целевому изотопу // В Сб. Трудов VII Всеросс. (Международной) научной конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул», 30 сентября- 04 октября 2002 г., Звенигород, ЦНИИАтоминформ, 2002, С.124-129.

28. Филиппов И.Г. Метод расчета разделительных каскадов с большими обогащениями на ступенях // ТОХТ. 1996. Т. 30. С. 175-179.

29. Лагунцов Н.И., Левин Е.В., Сулаберидзе Г.А. К расчету на ЭВМ нестационарных процессов в многоступенчатых каскадах для разделения двухкомпонентных изотопных смесей // ИФЖ. 1976. Т. XXXI. №3. С. 506-513.

30. Лагунцов Н.И., Левин Е.В., Сулаберидзе Г.А. Особенности нестационарного массопереноса в каскадах для разделения бинарных смесей изотопов // ИФЖ. 1986. Т. L. № 5. С. 798 -803.

31. Сулаберидзе Г.А., Левин Е.В. Разработка РРМ (Руководящего расчетного материала) на основе каскадных уравнений для исследования флуктуации внешних потоков на переходные процессы в одиночных колоннах и каскадах из колонн. Книга 2: Исследование нестационарного массопереноса при разделении двух- и многокомпонентных смесей, Отчет МИФИ, 1985, рег.№01.82.0092641, 130 с.

32. Higashi K., Oya A., Oishi Y. // Nucl. Sci.Engng. 1968. V. 32. P. 159.

33. Сулаберидзе Г.А., Лагунцов Н.И. К расчету нестационарного процесса в идеальном каскаде для разделения двухкомпонентной изотопной смеси // ТОХТ. 1973. Т. VII. № 3. С. 328-334.

34. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.

35. Джонс К., Ферри В. Разделение изотопов методом термодиффузии. М.: Иностранная литература, 1947.

36. Рабинович Г.Д., Гуревич Р.Я., Боброва Г.И. Термодиффузионное разделение жидких смесей. Минск, Наука и техника, 1971.

37. Bardin J. // Physics Rev. 1940. V. 58. 94(L).

38. Ран Ф., Адамантиадес А., Кентон Дж., Браун Ч. Справочник по ядерной энерготехнологии / Под ред. В.А.Легасова. Пер. с англ. М.: Энегтоатомиздат, 1989.

39. Николаев Б.И., Князев И.С., Лагунцов Н.И. и др. Теория оптимальных каскадов для разделения смесей на полупроницаемых мембранах // ТОХТ. 1979. Т. XIII. № 1. С. 10-16.

40. Bouligand G. // CEA Rep. 2622, 1965, UK AEA Prod. Group, inform ser. 16.

41. Колокольцов Н.А. К вопросу о построении идеальных несимметричных разделительных каскадов // Атомная энергия. 1969. Т. 27. Вып. 1. С. 9-13.

42. Olander D.R. Two-up, one-down ideal cascades for isotope separation // Nuclear Technology. 1976. V. 29. P. 108-112.

43. Wolf D., Borowitz J.L., Gabor A., Shraga Y. A general method for the calculation of an ideal cascade with asymmetric separation units // Ind. Eng. Chem. Fundam. 1976. V. 15. № 1. P. 15-19.

44. Kanagawa A., Yamamoto I., Mizuno Y. Separative power of 2-up and 1-down ideal cascade // J. Nucl. Sci. Technol. 1977. V. 14[12]. P. 892-900.

45. Колокольцов Н.А., Лагунцов Н.И. К теории несимметричных разделительных каскадов при произвольных обогашениях на разделительном элементе // Атомная энергия. 1970. Т. 29. Вып. 4.

46. Николаев Б.И., Князев И.С., Лагунцов Н.И., Сулаберидзе Г.А., К расчету несимметричных каскадов из элементов мембранного типа // ТОХТ. 1980. Т. XIV. № 1. С. 29-35.

47. Березин И.С., Жидков Н.Л. Методы вычислений. Т. 2, гл. X. М.: Наука, 1966.

48. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалов Э.В. Численные методы анализа. М.: Наука, 1967.

49. Бабушка И., Витасек Э, Прагер М. Численные процессы решения дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1969.

50. Ракитский Ю.В. Новые численные методы решения систем обыкновенных дифференциальных и разностных уравнений // Труды ЛПИ (Теория и техника вычислительных устройств). 1973. № 332. С. 88-97.

51. Ракитский Ю.В., Устинов С.М., Черноруцкий И.Г. Численные методы решения жестких систем. М.: Наука. 1979.

52. Синев Н.М. Экономика ядерной энергетики. Учебное пособие для ВУЗов. М.: Энергоатомиздат, 1987.

**Численный метод решения уравнения нестационарного процесса [29]**

Ниже представлена дифференциально-разностная модель уравнений нестационарного процесса. Эту модель можно рассматривать как предельный случай сеточной модели, когда одни из линейных размеров сетки (в нашем случае по временной координате) стремятся к нулю. В литературе эта модель известна под названием «метода прямых» [48]. Суть его применительно к рассматриваемой краевой задаче состоит в том, что интервал изменения координаты  $y$  для каждой секции каскада делится на  $n$  частей с шагом  $\Delta y$  и через внутренние точки проводится семейство параллельных прямых. На каждой прямой дифференциальное уравнение заменяется обыкновенным дифференциальным уравнением для функции  $c(y_i + k\Delta y, \tau) = c_k^i(\tau)$ . Таким образом, краевая задача сводится к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений по времени.

При переходе к задаче Коши замена первой и второй производных на выбранных прямых симметричными конечно-разностными соотношениями дает [48]

$$\frac{\partial c_k}{\partial y} = \frac{c_{k+1} - c_{k-1}}{2\Delta y}, \quad (\text{П1.1})$$

$$\frac{\partial^2 c_k}{\partial y^2} = \frac{c_{k+1} - 2c_k + c_{k-1}}{\Delta y^2}. \quad (\text{П1.2})$$

После чего уравнения (1.277) и (1.278) преобразуют в систему обыкновенных дифференциальных уравнений типа

$$\frac{dc_k}{d\tau} = f(c_{k+1}, c_k, c_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, k-1. \quad (\text{П1.3})$$

В граничных точках (точках «стыка» секций и на концах каскада) формулы (П1.1) и (П1.2) использовать нельзя, поскольку в этих точках существуют только односторонние производные. Анализ показывает, что в данном случае хорошие результаты дает применение формул Адамса – Башфорта и Адамса – Мултона [49]

$$\begin{cases} \frac{\partial c_k^+}{\partial y} = \frac{-c_{k+2} + 4c_{k+1} - 3c_k}{2\Delta y} \\ \frac{\partial c_k^-}{\partial y} = \frac{3c_k - 4c_{k-1} - c_{k-2}}{2\Delta y} \end{cases} \quad (\text{П1.4})$$

Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений должна решаться численно. Применение её для решения традиционных (классических) методов типа Эйлера или Рунге-Кутты нецелесообразно. Это связано с тем, что система уравнений оказывается жесткой, т.е. исследуемый процесс описывается несколькими частными решениями с большим разбросом производных во времени, за счет чего при использовании классических методов развивается неустойчивость, и наибольший допустимый шаг интегрирования оказывается слишком мал.

Для решения (П1.3) целесообразно использовать так называемый «системный» метод численного решения дифференциальных уравнений [50, 51], который учитывает общие свойства решаемой системы и позволяет значительно увеличить шаг интегрирования по сравнению с классическими методами. Суть метода – применение явной одношаговой аппроксимации

$$c(\tau + \Delta\tau) = c(\tau) + f(\tau, c(\tau)) \int_0^{\Delta\tau} \exp(At) dt, \quad (\text{П1.5})$$

где  $f$  – вектор-функция правых частей системы (П1.3);  $A$  – постоянная квадратная матрица, имеющая порядок, равный размерности системы  $k$ . Интеграл в правой части (П1.5) называют стабилизирующей матрицей, поскольку способ задания подынтегрального выражения определяет свойства численного метода. Для обеспечения устойчивости при достаточно больших  $\Delta\tau$ , матрицу  $A$  следует задавать как матрицу Якоби системы (П1.3).

Построение стабилизирующей матрицы основано на следующем рекуррентном соотношении:

$$\Phi_{v+1} = \Phi_v(2I + A\Phi_v), \quad v = 0, 1, \dots, n-1, \quad (\text{П1.6})$$

с начальным условием

$$\Phi_0 = \tilde{h} \sum_{r=1}^R \frac{(A\tilde{h})^r}{(r+1)!} ; \tilde{h} = 2^{-n} \Delta\tau, \quad (\text{П1.7})$$

где  $I$  – единичная матрица. Число  $R$  и  $n$  выбирают так, чтобы их изменение на единицу не приводило бы к изменению коэффициентов матрицы более чем в шестом-седьмом разряде.

Некоторые трудности при использовании «системного» метода вызывает необходимость многократного вычисления стабилизирующей матрицы, которая в общем случае является функцией времени. Однако при решении задач нестационарных процессов матрица Якоби на отдельных достаточно больших участках интервала интегрирования изменяется слабо. Поэтому необходимость пересчета стабилизирующей матрицы сводится к разумному минимуму, и его время занимает малую часть общего времени решения задачи.

Устойчивость данной схемы расчета очень слабо зависит от величины шага дискретности  $\Delta l$ . Поэтому величину  $\Delta l$  следует задавать только исходя из требований к точности получаемых результатов. Применение «системного» метода дает возможность увеличить шаг  $\Delta\tau$  в 20-30 раз по сравнению с классическими методами и, соответственно, резко сократить время вычислений. В принципе, шаг может быть доведен до  $\Delta\tau = 1$ , что позволяет за 50 ÷ 100 шагов практически до конца рассчитать нестационарный процесс в разделительном каскаде.

При числе компонентов смесей изотопов больше двух, размерность интегрируемых систем обыкновенных дифференциальных уравнений увеличивается в  $(m - 1)$  раз, где  $m$  - число компонентов смеси. Одновременно в несколько раз возрастает требуемое количество пересчетов матрицы  $\Phi$ . Поэтому применение рассмотренной расчетной схемы целесообразно ограничить только задачами разделения бинарных смесей.

**Основные правила операционного исчисления.  
Операторное изображение**

Операционное исчисление каждой однозначной функции (оригиналу)  $f(t)$  переменного  $t$  ставит в соответствие некоторую функцию  $[f(p)]^*$  с помощью преобразования

$$[f(p)]^* = f^*(p) = p \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (\text{П2.1})$$

Выражение (П2.1) называется интегралом Лапласа, а функция  $f^*(p)$  называется преобразованием Лапласа или операторным изображением функции  $f(t)$ . Например, изображение экспоненциальной функции будет

$$[e^{-at}]^* = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \cdot e^{-at} dt = \frac{p}{p-a}. \quad (\text{П2.2})$$

Преобразование Лапласа характерно тем, что многим соотношениям и операциям над оригиналами  $f(t)$  соответствуют более простые соотношения и операции над изображениями  $f^*(p)$ . Оно применяется для решения дифференциальных и интегральных уравнений: метод решения заключается в преобразовании данного уравнения, содержащего оригиналы  $f(t)$ , в эквивалентное уравнение относительно соответствующих изображений Лапласа  $f^*(p)$ .

Одно из основных свойств преобразования (П2.1) – его линейность: изображение суммы равно сумме изображений, то есть

$$[f_1 + f_2]^* = f_1^* + f_2^*, \quad (\text{П2.3})$$

если  $\lambda = \text{const}$ , то

$$[\lambda f]^* = \lambda f^*, \quad (\text{П2.4})$$

и в соответствии с (П2.1) изображения первой и второй производной функции имеют вид

$$[f'(t)]^* = p[f^*(p) - f(0)], \quad (\text{П2.5})$$

$$[f''(t)]^* = p_2 \left[ f^*(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} \right], \quad (\text{П2.6})$$

где  $f^*(p)$  – по-прежнему изображения функции,  $f(0)$  и  $f'(0)$  – значения функции и ее производной при  $t = 0$ .

Нетрудно убедиться также, что

$$\left[ \int_0^t f(t) dt \right]^* = \frac{f^*(p)}{p}. \quad (\text{П2.7})$$

соотношения (П2.3) – (П2.7) позволяют, например, найти изображение решения обыкновенного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами с помощью чисто алгебраической операции. Пусть, например, уравнение имеет вид

$$f''(t) + af'(t) + bf(t) = \Psi(t), \quad (\text{П2.8})$$

трансформируя уравнение (П2.8) с помощью интеграла Лапласа (П2.1) и учитывая свойства линейности (П2.3), (П2.4), получим

$$[f''(t)]^* + a[f'(t)]^* + b[f(t)]^* = \Psi^*(t). \quad (\text{П2.9})$$

Подставляя в (П2.9) изображения производных (П2.5) и (П2.6) и решая полученное алгебраическое уравнение относительно  $f^*(p)$ , найдем изображение решения

$$f^*(p) = \frac{\Psi^*(p) + (p^2 + ap)f(0) + pf'(0)}{p^2 + ap + b} \equiv \frac{F_1(p)}{F_2(p)}, \quad (\text{П2.10})$$

чтобы получить решение в виде функции от  $t$ , необходимо перейти от изображения к оригиналу, т.е. осуществить обратное преобразование.

Если задано уравнение с частными производными (от двух переменных), можно произвести преобразование по одной из переменных, (например, по времени); одновременно трансформируются и граничные условия. Тогда уравнение превратится в обыкновенное и может быть сравнительно легко решено.

## Отыскание оригинала

После нахождения операционного изображения решения, необходимо определить соответствующую ему функцию перемен-



ной  $t$ , т.е. оригинал. Это можно сделать с помощью таблиц изображений и оригиналов [26]. В приведенной ниже таблице даны формулы операционного исчисления, которые могут быть использованы при решении задач описания переходных (нестационарных) процессов в каскадах для разделения бинарных изотопных смесей.

Таблица преобразований Лапласа  
( $a, b, d, k$  -различные постоянные)

| Изображение                          | Оригинал (искомая функция)   |
|--------------------------------------|--|
| $\frac{p}{p+a}$                      | $e^{-at}$ (П2.11)  |
| $\frac{1}{p+a} = 1 - \frac{p}{p+a}$  | $1 - e^{-at}$ (П2.12)  |
| $\frac{b}{1-bp}$                     | $1 - e^{-t/b}$ (П2.13)   |
| $\frac{1}{p}$                        | $t$ (П2.14)  |
| $\frac{1}{p^n}$ ( $n$ - целое)       | $\frac{t^n}{n!}$ (П2.15)   |
| $\frac{1}{\sqrt{p}}$                 | $\frac{2}{\sqrt{\pi}} t$ (П2.16)   |
| $\frac{1}{p+b\sqrt{p}}$              | $\frac{2}{b} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + \frac{b^2 \operatorname{erf}(b\sqrt{t}) - 1}{b^2}$ (П2.17)   |
| $\frac{d^{-k\sqrt{p}}}{p+b\sqrt{p}}$ | $\frac{2}{b} \sqrt{\frac{t}{\pi}} e^{-k^2/4t} - \frac{1-bk}{b^2} \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}}\right) +$<br>$+ \frac{1}{b^2 d^{bk+b^2t}} \operatorname{erf}\left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)$ (П2.18) |

В приведенной таблице функция  $erf$  ошибок определяется соотношением

$$erf x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad (\text{П2.19})$$

так что  $erf(0) = 1$  и  $erf(\infty) = 0$ .

Существует также ряд правил и теорем, позволяющих анализировать полученное изображение или переходить от него к оригиналу. Особенно важной является теорема разложения: если  $f^*(p)$  – рациональная алгебраическая функция, выраженная отношением двух многочленов, то есть

$$f^*(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (\text{П2.20})$$

где  $n \geq m$ , то искомая функция будет

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)}, \quad (\text{П2.21})$$

где  $p_1, p_2, \dots, p_n$  – корни знаменателя (П2.20), т.е. уравнения

$$F_2(p) = 0. \quad (\text{П2.22})$$

## Приложение 3

### Значения корней трансцендентного уравнения [36]

| $y_p(1-\Psi)$ | Корни   |         |         |         |         |         |
|---------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
|               | $\mu_1$ | $\mu_2$ | $\mu_3$ | $\mu_4$ | $\mu_5$ | $\mu_6$ |
| 0             | 1,570   | 4,712   | 7,853   | 10,995  | 14,137  | 17,278  |
| 0,1           | 1,505   | 4,691   | 7,841   | 10,986  | 14,130  | 17,272  |
| 0,2           | 1,432   | 4,669   | 7,828   | 10,977  | 14,123  | 17,266  |
| 0,3           | 1,352   | 4,647   | 7,815   | 10,968  | 14,116  | 17,260  |
| 0,4           | 1,263   | 4,625   | 7,802   | 10,959  | 14,109  | 17,255  |
| 0,5           | 1,165   | 4,603   | 7,789   | 10,950  | 14,102  | 17,249  |
| 0,6           | 1,052   | 4,581   | 7,776   | 10,940  | 14,094  | 17,243  |
| 0,7           | 0,920   | 4,559   | 7,762   | 10,931  | 14,087  | 17,237  |
| 0,8           | 0,758   | 4,537   | 7,751   | 10,922  | 14,080  | 17,232  |
| 0,9           | 0,541   | 4,515   | 7,738   | 10,913  | 14,073  | 17,226  |
| 1,0           | 0       | 4,492   | 7,725   | 10,904  | 14,066  | 17,220  |
| 1,5           | 1,128   | 4,382   | 7,660   | 10,858  | 14,031  | 17,191  |
| 2,0           | 1,915   | 4,274   | 7,596   | 10,812  | 13,995  | 17,162  |
| 4,0           | 3,997   | 3,916   | 7,355   | 10,636  | 13,856  | 17,047  |
| 6,0           | 5,999   | 3,693   | 7,156   | 10,475  | 13,725  | 16,937  |
| 8,0           | 8,000   | 3,560   | 7,002   | 10,337  | 13,606  | 16,834  |
| $\infty$      | 0       | 3,142   | 6,283   | 9,424   | 12,566  | 15,708  |
|               |         |         |         |         |         |         |
| 0             | 1,570   | 4,712   | 7,853   | 10,955  | 14,137  | 17,278  |
| -0,1          | 1,630   | 4,733   | 7,866   | 11,004  | 14,143  | 17,284  |
| -0,2          | 1,688   | 4,754   | 7,879   | 11,014  | 14,151  | 17,290  |
| -0,3          | 1,741   | 4,775   | 7,892   | 11,023  | 14,157  | 17,296  |
| 0,4           | 1,790   | 4,795   | 7,904   | 11,032  | 14,165  | 17,301  |
| -0,5          | 1,836   | 4,815   | 7,917   | 11,041  | 14,172  | 17,307  |
| -0,6          | 1,879   | 4,835   | 7,929   | 11,050  | 14,179  | 17,313  |
| -0,7          | 1,920   | 4,855   | 7,941   | 11,058  | 14,186  | 17,319  |
| -0,8          | 1,958   | 4,874   | 7,954   | 11,068  | 14,193  | 17,324  |
| -0,9          | 1,994   | 4,894   | 7,966   | 11,076  | 14,200  | 17,330  |
| -1,0          | 2,028   | 4,912   | 7,978   | 11,085  | 14,206  | 17,336  |
| -1,5          | 2,174   | 5,003   | 8,038   | 11,129  | 14,241  | 17,364  |
| -2,0          | 2,288   | 5,086   | 8,096   | 11,173  | 14,275  | 17,393  |
| -4,0          | 2,570   | 5,353   | 8,303   | 11,335  | 14,407  | 17,503  |
| -6,0          | 2,716   | 5,537   | 8,470   | 11,477  | 14,528  | 17,607  |
| -8,0          | 2,804   | 5,666   | 8,603   | 11,599  | 14,643  | 17,702  |
| $\infty$      | 3,142   | 6,283   | 9,424   | 12,566  | 15,708  | 18,849  |

## **Часть 2**

# **ТЕОРИЯ КАСКАДОВ ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ СМЕСЕЙ**

## 2.1. Разделительная ступень. Основные характеристики и уравнения ступени [1]

Приведем общие характеристики разделительных ступеней (элементов), предназначенных для разделения однофазных многокомпонентных смесей. Состав смеси, содержащей  $m$  химически не реагирующих между собой компонентов, будем определять их мольными долями (концентрациями)  $c_i = \frac{n_i}{n}$  ( $n$  – мольная плотность смеси  $n_i$  – мольная плотность  $i$ -ого компонента,  $i = 1, 2, \dots, m$ ). Из определения концентраций следует тождество

$$\sum_{j=1}^m c_j = 1. \quad (2.1)$$

Из (2.1) следует, что число независимых концентраций равно  $m - 1$ . Наряду с  $c_i$  удобно применять относительные концентрации, определяемые по отношению к концентрации «опорного» компонента с фиксированным номером, например,  $k$ , т.е.

$$R_{ik} = \frac{c_i}{c_k}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.2)$$

Поскольку в качестве «опорного» может быть выбран любой из компонентов смеси, всего имеется  $m$  таких наборов. Однако каждый такой набор, например  $R_{ik}$ , может быть получен из любого другого, например  $R_{ij}$ , по следующим формулам преобразования:

$$R_{ik} = \frac{c_i}{c_k} = \frac{c_i}{c_j} \cdot \frac{c_j}{c_k} = R_{ij} \cdot R_{jk}, \quad (2.3)$$

относительные концентрации  $R_{ik}$  и концентрации  $c_j$  связаны соотношениями

$$c_i = \frac{R_{ik}}{\sum_{j=1}^m R_{jk}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.4)$$

Обычно номера компонентов принято располагать в порядке возрастания мольных масс или массовых чисел компонентов, начиная с самого легкого.

Заметим, что при разделении изотопов в виде химических соединений кроме основного процесса в разделительной ступени (элементе) может происходить обмен изотопами между молекулами компонентов, вследствие чего число молекул отдельного компонента не сохраняется. Влияние этого процесса на разделение определяется его относительной скоростью. Дальнейшее рассмотрение будет ограничено случаем отсутствия обмена (нулевой скоростью обмена), к которому

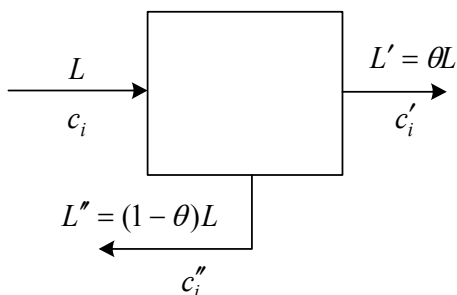


Рис. 2.1. Схема разделительной ступени (элемента)

сводится большинство практических задач разделения.

Так же, как и в случае разделения бинарной смеси, рассмотрим простую разделительную ступень (элемент), имеющий один вход и два выхода (рис. 2.1).

На вход поступает смесь  $m$  компонентов, поток питания (производительность ступени)  $L$  с концентрациями  $c_i$ . Из ступени (элемента) выходят два потока: легкая фракция (поток, обогащенный легкими компонентами) или отбор ступени  $L'$  и тяжелая фракция (поток, обедненный легкими компонентами) или отвал ступени  $L''$ . Концентрации компонентов в отборе равны  $c'_i$ , а в отвале -  $c''_i$ .

Коэффициент деления потоков смеси (срез)  $\theta$ , парциальные потоки компонентов  $G_i, G'_i, G''_i$  и срезы  $\varphi_i$  парциальных потоков определим по формулам

$$\theta = \frac{L'}{L}, \quad G_i = Lc_i, \quad G'_i = L'c'_i, \quad G''_i = L''c''_i,$$

$$\varphi_i = \frac{G'_i}{G_i}, \quad 1 - \varphi_i = \frac{G''_i}{G_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5)$$

Балансовые уравнения ступени в стационарном режиме работы в отсутствие потерь имеют вид

$$L = L' + L'',$$

$$G_i = G'_i + G''_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.6)$$

Введенное в (2.5) определение среза дает возможность уравнения (2.6) представить в виде

$$c_i = \theta c'_i + (1 - \theta) c''_i. \quad (2.7)$$

Из выражений (2.5) и (2.6) непосредственно следует

$$L = \sum_{j=1}^m G_j, \quad L' = \sum_{j=1}^m G'_j, \quad L'' = \sum_{j=1}^m G''_j, \quad (2.8)$$

$$c_i = \frac{G_i}{\sum_{j=1}^m G_j}, \quad c'_i = \frac{G'_i}{\sum_{j=1}^m G'_j}, \quad c''_i = \frac{G''_i}{\sum_{j=1}^m G''_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.9)$$

$$\theta = \frac{\sum_{j=1}^m G'_j}{\sum_{j=1}^m G_j}. \quad (2.10)$$

Для каждого компонента  $i$  с относительной концентрацией  $R_{ik}$  определяются относительные коэффициенты разделения: полный  $q_{ik}$ , в отборе  $\alpha_{ik}$  и в отвале  $\beta_{ik}$  и соответствующие коэффициенты обогащения  $\varepsilon_{ik}, \varepsilon'_{ik}, \varepsilon''_{ik}$

$$q_{ik} = \frac{R'_{ik}}{R''_{ik}}, \quad \alpha_{ik} = \frac{R'_{ik}}{R_{ik}}, \quad \beta_{ik} = \frac{R_{ik}}{R''_{ik}},$$

$$\varepsilon_{ik} = q_{ik} - 1, \quad \varepsilon'_{ik} = \alpha_{ik} - 1, \quad \varepsilon''_{ik} = 1 - \frac{1}{\beta_{ik}}. \quad (2.11)$$

При разделении изотопов молекулярно-кинетическими методами величины относительных коэффициентов разделения можно аппроксимировать соотношениями  $q_{ij} = q_0^{M_j - M_i}$ , где  $q_0$  – коэффициент разделения, приходящийся на единицу разности массовых чисел,  $M_i, M_j$  – массовые числа  $i$ -го и  $j$ -го компонентов соответственно.

Из определений (2.11) непосредственно следует:

$$q_{ik} = \alpha_{ik} \cdot \beta_{ik}, \quad q_{kk} = 1, \quad \alpha_{kk} = 1, \quad \beta_{kk} = 1. \quad (2.12)$$

При фиксированном номере "опорного" компонента существует набор из  $m - 1$  независимых  $q_{ik}$  (или  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}$ ). По определению  $R_{ik}$  всего имеется  $m$  таких наборов. Однако каждый из них, например  $q_{ik}$ , может быть преобразован в другой набор, например,  $q_{ij}$  по формулам

$$q_{ij} = q_{ik} \cdot q_{kj}, \quad (2.13)$$

Если  $k \neq m$ , то при всех  $i < k$  значения всех коэффициентов разделения  $q_{ik}, \alpha_{ik}, \beta_{ik}$  будут больше единицы, а при всех  $i > k$  – меньше единицы.

Полные коэффициенты разделения  $q_{ik}$ , как правило, не зависят от состава смеси. В некоторых случаях коэффициенты  $q_{ik}$  могут зависеть от среза  $\theta$ . В соответствии с определением (2.11) уравнения разделения могут быть представлены в виде

$$c'_i = \frac{\alpha_{ik} R_{ik}}{\sum_{j=1}^m \alpha_{jk} R_{jk}} = \frac{\alpha_{ik} c_i}{\sum_{j=1}^m \alpha_{jk} c_j}, \quad (2.14)$$

$$c''_i = \frac{(\beta_{ik})^{-1} R_{ik}}{\sum_{j=1}^m (\beta_{jk})^{-1} R_{jk}} = \frac{(\beta_{ik})^{-1} c_i}{\sum_{j=1}^m (\beta_{jk})^{-1} c_j}, \quad (2.15)$$



$$c'_i = \frac{q_{ik} R''_{ik}}{\sum_{j=1}^m q_{jk} R''_{jk}} = \frac{q_{ik} c''_i}{\sum_{j=1}^m q_{jk} c''_j}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.16)$$

Из (2.14) - (2.16) следует, что значения  $c'_i$  и  $c''_i$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) не зависят от номера «опорного» компонента  $k$ .

Введем обозначения:

$$g_i = \frac{\varphi_i}{1 - \varphi_i} = \frac{G'_i}{G''_i}, \quad i \neq k, \quad (2.17)$$

$$g_k = \frac{\varphi_k}{1 - \varphi_k} = \frac{G'_k}{G''_k}. \quad (2.18)$$

Нетрудно показать, используя (2.5) и (2.8), что величины  $g_i$  и  $g_k$  связаны с величинами относительных коэффициентов разделения следующими соотношениями

$$g_i = \frac{\alpha_{ik}(\beta_{ik} - 1)}{\alpha_{ik} - 1}, \quad i \neq k \quad (2.19)$$

$$g_k = \frac{\beta_{ik} - 1}{(\alpha_{ik} - 1)\beta_{ik}} = \frac{\varepsilon''_{ik}}{\varepsilon'_{ik}}. \quad (2.20)$$

При этом

$$\frac{g_i}{g_k} = q_{ik} \quad (2.21)$$

Величина  $g_k$  ( $k$  – номер «опорного» компонента) инвариантна относительно номера компонента, т.е. для всех  $i \neq j$   $g_k$  будет иметь одно и то же значение.

Приращения концентраций  $i$ -го компонента в отборе ступени (положительное или отрицательное)  $\delta'_i = c'_i - c_i$  и в отвале ступени  $\delta''_i = c_i - c''_i$  (положительное или отрицательное) с учетом (2.11) можно представить в виде

$$\delta'_i = c_i \frac{\varepsilon'_{ik} - \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{jk} c_j}{1 + \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{jk} c_j}, \quad (2.22)$$

$$\delta''_i = c_i \frac{\varepsilon''_{ik} - \sum_{j=1}^m \varepsilon''_{jk} c_j}{1 - \sum_{j=1}^m \varepsilon''_{jk} c_j}, \quad (2.23)$$

$$\delta_i = \delta'_i + \delta''_i = c_i \frac{(1 + g_k)(\varepsilon'_{ik} - \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{jk} c_j)}{(1 + \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{jk} c_j)(1 - \sum_{j=1}^m \varepsilon''_{jk} c_j)}. \quad (2.24)$$

В соответствии с уравнениями баланса (2.7) величины  $\delta''_i$  и  $\delta'_i$  должны удовлетворять цепочке равенств:

$$\frac{\delta'_1}{\delta''_1} = \frac{\delta'_2}{\delta''_2} = \dots = \frac{\delta'_{m-1}}{\delta''_{m-1}} = \frac{1 - \theta}{\theta}. \quad (2.25)$$

Величины  $\theta$  и срезы парциальных потоков в соответствии с (2.5), (2.22), (2.23) и (2.24) равны

$$\theta = \frac{g_k \left[ 1 + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{jk} c_j \right]}{1 + g_k}, \quad (2.26)$$

$$\varphi_i = \frac{g_k q_{ik}}{1 + q_{ik}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.27)$$

Если коэффициенты разделения  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$  не зависят от концентрации, то в соответствии с (2.27) парциальные срезы не будут зависеть от концентрации. Однако при этом согласно формуле (2.26) срез  $\theta$  должен зависеть от концентрации. Из этой формулы следует, что если срез  $\theta$  не зависит от концентрации то  $g_k$ ,  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$  должны зависеть от концентрации.

Назовем симметричной относительно пары компонентов с номерами  $n$  и  $k$  ступень (элемент), в которой коэффициенты разделения этой пары  $\alpha_{nk}$  и  $\beta_{nk}$  одинаковы:  $\alpha_{nk} = \beta_{nk} = \sqrt{q_{nk}}$ , так что в соответствии с (2.20) параметр  $g_k$  равен

$$g_k = \frac{1}{\beta_{nk}} = \frac{1}{\sqrt{q_{nk}}}. \quad (2.28)$$

Остальные коэффициенты ( $i \neq k$ ), срез  $\theta$  и срезы парциальных потоков  $\varphi_i$  в такой ступени (элементе) имеют вид:

$$\alpha_{ik} = \frac{q_{ik}(1 + \sqrt{q_{nk}})}{q_{ik} + \sqrt{q_{nk}}}, \quad (2.29)$$

$$\beta_{ik} = \frac{q_{ik} + \sqrt{q_{nk}}}{1 + \sqrt{q_{nk}}}, \quad (2.30)$$

$$\theta = \frac{1 + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{jk} c_j}{1 + \sqrt{q_{nk}}}, \quad (2.31)$$

$$\varphi_i = \frac{\alpha_{ik}}{1 + \sqrt{q_{nk}}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.32)$$

При «слабом обогащении» на ступени (элементе), когда коэффициенты разделения  $q_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$  и  $\beta_{ik}$  мало отличаются от единицы, можно считать

$$\varepsilon_{ik} \approx \ln q_{ik}, \quad \varepsilon'_{ik} \approx \ln \alpha_{ik}, \quad \varepsilon''_{ik} \approx \ln \beta_{ik}, \quad (2.33)$$

и, следовательно, в соответствии с (2.33) и (2.13)

$$\varepsilon_{ij} = -\varepsilon_{ji}, \quad \varepsilon'_{ij} = -\varepsilon'_{ji}, \quad \varepsilon''_{ij} = -\varepsilon''_{ji}, \quad (2.34)$$

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ik} + \varepsilon_{kj}, \quad \varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ik} + \varepsilon'_{kj}, \quad \varepsilon''_{ij} = \varepsilon''_{ik} + \varepsilon''_{kj}, \quad (2.35)$$

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon'_{ik} + \varepsilon''_{ik}. \quad (2.36)$$

Из (2.34) – (2.36) следует, что в случае «слабого» обогащения относительные коэффициенты обогащения обладают свойствами антисимметричности и аддитивности. Кроме того, можно считать,

что для однофазных методов разделения выполняется соотношение  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0(M_K - M_i)$ , где  $\varepsilon_0$  – коэффициент обогащения единичной разности массовых чисел,  $M_k$  и  $M_i$  массовые числа  $k$ -го и  $i$ -го компонентов, соответственно [3, 4].

В этом случае согласно (2.26)

$$\theta = \frac{g_k}{1 + g_k} \quad (2.37)$$

и, соответственно, 
$$g_k = \frac{\varepsilon''_{ik}}{\varepsilon'_{ik}} = \frac{\theta}{1 - \theta}. \quad (2.38)$$

Тогда с учетом (2.36) и (2.38) коэффициенты  $\varepsilon'_{ik}$  и  $\varepsilon''_{ik}$  могут быть записаны в виде

$$\varepsilon'_{ik} = (1 - \theta)\varepsilon_{ik}, \quad \varepsilon''_{ik} = \theta\varepsilon_{ik}. \quad (2.39)$$

С учетом (2.1) и (2.35) соотношения (2.22) в рассматриваемом случае преобразуются следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta'_i &= c_i \left[ \varepsilon'_{ik} - \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{jk} c_j \right] = c_i \left[ \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{ik} c_j - \sum_{j=1}^m \varepsilon_{jk} c_j \right] = \\ &= c_i \left[ \sum_{j=1}^m (\varepsilon'_{ik} c_j - \varepsilon'_{jk} c_j) \right] = c_i \left[ \sum_{j=1}^m (\varepsilon'_{ik} - \varepsilon'_{jk}) c_j \right] = \\ &= c_i \left[ \sum_{j=1}^m (\varepsilon'_{ik} + \varepsilon'_{kj}) \right] = c_i \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{ij} c_j. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Аналогично получаем:

$$\delta''_i = c_i \sum_{j=1}^m \varepsilon''_{ij} c_j, \quad (2.41)$$

$$\delta_i = c_i \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j. \quad (2.42)$$

## 2.2. Основные уравнения противоточного симметричного разделительного каскада

Рассмотрим противоточный симметричный каскад с одним входящим потоком питания  $F$  и двумя выходящими – отбора  $P$ , обогащенного самым легким компонентом, и отвала  $W$ , обогащенного самым тяжелым компонентом (рис. 2.2). Потоки  $F$ ,  $P$ ,  $W$  и их концентрации  $c_{iF}$ ,  $c_{iP}$ ,  $c_{iW}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) являются внешними параметрами каскада.

Если потери вещества в ступенях каскада отсутствуют, то внешние параметры каскада должны удовлетворять уравнениям материального баланса

$$\begin{aligned} F &= P + W \\ Fc_{iF} &= Pc_{iP} = Wc_{iW}, i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.43)$$

Ступени каскада пронумерованы последовательно от  $s = 1$  на отвальном конце каскада до  $s = N$  на отборном конце каскада; считаем, что поток питания  $F$  подают на вход ступени с номером  $f$ . Внутренние параметры каждой ступени  $L_s$ ,  $L'_s$ ,  $L''_s$ ,  $G_{i,s} = L_s c_{i,s}$ ,  $G'_{i,s} = L'_s c'_{i,s}$ ,  $G''_{i,s} = L''_s c''_{i,s}$  в стационарном состоянии каскада связаны уравнениями баланса вещества и каждого компонента

$$\begin{aligned} L_s &= L'_s + L''_s, \quad s = 1, \dots, N \\ G_{i,s} &= G'_{i,s} + G''_{i,s} \quad \text{или} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$L_s c_{i,s} = L'_s c'_{i,s} + L''_s c''_{i,s}, \quad s = 1, 2, \dots, N \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.45)$$

где индекс  $i$  означает номер компонента, а индекс  $s$  – номер ступени.

Уравнения коммутации потоков при симметричном соединении ступеней имеют вид:

$$\begin{aligned} L_s &= L'_{s-1} + L''_{s+1} \quad \text{или} \\ L_s &= \theta_{s-1} L_{s-1} + (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}, \quad s = 1, 2, \dots, f-1, f+1, \dots, N, \\ G_{i,s} &= G'_{i,s-1} + G''_{i,s+1} \quad \text{или} \end{aligned} \quad (2.46)$$

$$L_s c_{i,s} = \theta_{s-1} L_{s-1} c'_{i,s-1} + (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_{i,s+1}, \quad (2.47)$$

$$s = 1, 2, \dots, f-1, f+1, \dots, N, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

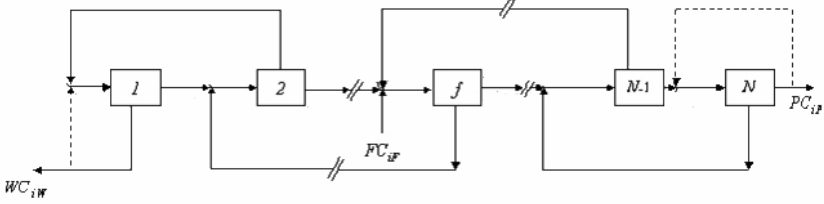


Рис. 2.2. Схема противоточного разделительного каскада

Для ступени питания  $s = f$  уравнения коммутации потоков можно записать как

$$L_f = L'_{f-1} + L''_{f+1} + F \quad \text{или}$$

$$L_f = \theta_{f-1} L_{f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} + F, \quad (2.48)$$

$$G_{i,f} = G'_{i,f-1} + G''_{i,f+1} + F c_{i,f} \quad \text{или}$$

$$L_{i,f} = \theta_{f-1} L_{s-1} c'_{i,f-1} + (1 - \theta_{f+1}) L_{f+1} c''_{i,f+1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.49)$$

Концентрации  $c_{i,s}$ ,  $c'_{i,s}$ ,  $c''_{i,s}$  на каждой ступени связаны соотношениями (2.14) – (2.15). Внешние и внутренние параметры каскада связаны граничными условиями

$$L_0 = L'_0 = L''_0 = L_{N+1} = L'_{N+1} = L''_{N+1} = 0, \quad (2.50)$$

$$L'_N = \theta_N L_N = P, \quad (2.51)$$

$$L''_1 = (1 - \theta_1) L_1 = W, \quad (2.52)$$

$$c'_N = c_{iP}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.53)$$

$$c''_1 = c_{iW}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.54)$$

$$G'_{i,N} = P c_{iP}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.55)$$

$$G''_{i,1} = W c_{iW}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.56)$$

Соотношения (2.43) – (2.56) представляют простейшую математическую модель противоточного симметричного каскада, предна-

значенного для разделения многокомпонентной смеси. При решении некоторых разделительных задач вместо уравнений (2.46) – (2.47) удобнее пользоваться разностными уравнениями, отражающими баланс потоков в сечениях между ступенями:

для отборной части каскада

$$\begin{aligned} L'_s - L''_{s+1} &= P \text{ или} \\ \theta_s L_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} &= P, \\ G'_{i,s} - G''_{i,s+1} &= P c_{iP} \text{ или} \end{aligned} \quad (2.57)$$

$$\theta_s L_s c'_{i,s} - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_{i,s+1} = P c_{iP} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.58)$$

для отвалной части каскада

$$\begin{aligned} L'_s - L''_{s+1} &= -W \text{ или} \\ \theta_s L_s - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} &= -W, \\ G'_{i,s} - G''_{i,s+1} &= -W c_{iW} \text{ или} \end{aligned} \quad (2.59)$$

$$\theta_s L_s c'_{i,s} - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_{i,s+1} = -W c_{iW} \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.60)$$

В свою очередь, система (2.57) – (2.58) может быть легко преобразована к виду

$$\begin{aligned} c_{i,s+1} - c_{i,s} &= \frac{\theta_s L_s}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}} \delta'_{i,s} + \delta''_{i,s+1} - \frac{P(c_{iP} - c_{i,s})}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}}, \\ i &= 1, 2, \dots, m; \quad s = f, \dots, N. \end{aligned} \quad (2.61)$$

где  $\delta'_{i,s} = c'_{i,s} - c_{i,s}$  – функция, определяемая соотношением (2.22) и представляющая изменение концентрации  $i$ -го компонента на  $s$ -й ступени, а  $\delta'_{i,s}$  и  $\delta''_{i,s}$  связаны уравнением баланса  $\delta''_{i,s} = \frac{\theta}{1 - \theta} \delta'_{i,s}$ .

Соответственно, система (2.59) – (2.60) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} c_{i,s+1} - c_{i,s} &= \frac{\theta_s L_s}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}} \delta'_{i,s} + \delta''_{i,s+1} - \frac{W(c_{i,s} - c_{iW})}{(1 - \theta_{s+1}) L_{s+1}} \\ i &= 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, f - 1. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Нетрудно видеть, что системы (2.46) – (2.49), (2.57) – (2.60) и (2.61) – (2.62) эквивалентны. Каждая из них представляет систему

нелинейных разностных уравнений относительно функций  $c_{i,s}$ . Более того, в эти уравнения (или в их граничные условия) входят значения концентраций, которые должны определяться из решения этих же уравнений. Аналитическое решение подобных систем возможно лишь в отдельных частных случаях. При произвольном распределении  $L_s$  возможно лишь численное решение этих систем на ЭВМ.

Вопрос о расчете каскада с использованием систем (2.46) - (2.49), (2.57) - (2.60) и (2.61) - (2.62) включает две задачи:

- расчет каскада заданного профиля (поверочный расчет);
- проектировочный расчет каскада.

Под расчетом каскада заданного профиля, как правило, прямоугольного или прямоугольно-секционированного, подразумевают: при заданных числах ступеней и потоков в секциях, потоке питания  $F$  с концентрациями компонентов  $c_{iF}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), одного из выходящих из каскада потоков  $-P$  или  $W$ , относительных коэффициентов разделения  $q_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$  определение концентраций компонентов в потоках отбора  $c_{iP}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), отвала  $c_{iW}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ), распределение среза  $\theta_s$  и концентраций компонентов  $c_{i,s}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) по ступеням каскада. Такой поверочный расчет необходим при исследовании оптимального управления процессом разделения, при изменении режимов работы и отдельных параметров разделительного каскада, а также при многоцелевом использовании каскада, например, для разделения изотопов различных элементов. Основные трудности поверочного расчета связаны с тем, что неизвестные концентрации  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) входят в основные уравнения. Невозможность аналитического решения этих уравнений вызывает необходимость разработки численных методов, малочувствительных к заданию начальных приближений  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ). Под проектировочным расчетом обычно понимают определение параметров прямоугольного или прямоугольно-секционированного каскада по заданным значениям концентрации одного из компонентов (целе-



вого или ключевого) в потоках отбора и отвала и величине потока отбора. При этом подразумевается, что искомые параметры каскада должны наилучшим образом удовлетворять условиям его оптимальности.

## 2.3. Каскад в случае слабого разделения

### 2.3.1. Основные уравнения [2-4]

Важное практическое значение имеют каскады, состоящие из разделительных ступеней (элементов) слабого обогащения, когда полные относительные коэффициенты обогащения  $\varepsilon_{ik} = (\varepsilon'_{ik} + \varepsilon''_{ik}) \ll 1$ . При тех же предположениях, что и в бинарном случае ( $N \gg 1$ ,  $\theta \approx \frac{1}{2}$  и т.д.), переходя от разностных уравнений (2.61), (2.62) с учетом (2.39) - (2.42), получаем

$$\frac{dc_i}{ds} = c_i \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j - \frac{2P}{L(s)} (c_{iP} - c_i), \quad (2.63)$$

$$0 \leq s \leq S_p \quad (S_p + 1 = N - f), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad \sum_{j=1}^m c_j = 1;$$

$$\frac{dc_i}{ds} = c_i \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j + \frac{2W}{L(s)} (c_{iW} - c_i), \quad (2.64)$$

$$0 \leq s \leq S_w \quad (S_w = f), \quad i = 1, 2, \dots, m-1, \quad \sum_{j=1}^m c_j = 1,$$

где  $S_p$  и  $S_w$  – числа ступеней в отборной и отвальной частях каскада,  $s$  – текущий номер ступени в отборной и отвальной частях каскада. Нумерация ступеней в отвальной части ведется от конечной ступени к ступени, на вход которой подают поток питания, а в отборной части – от ступени ввода питания к отборному концу каскада.

Анализ (2.63), (2.64) позволяет сделать следующие замечания о свойствах уравнений каскада:

1. В случае безотборного режима ( $P = W = F = 0$ ) система (2.63), (2.64) легко интегрируется, и ее решение имеет вид:

$$c_i(s) = \frac{c_i(0)}{\sum_{j=1}^m c_j(0) \exp(-\varepsilon_{ij}s)}, \quad (2.65)$$

где  $c_i(0)$  – концентрация  $i$ -ого компонента на входе в ступень, номер которой  $s = 0$  принят за начало отсчета. Из соотношения (2.65) видно, что распределения концентраций по ступеням каскада в безотборном режиме не зависят от распределения потока  $L(s)$ . Анализ (2.65) показывает также, что если каскад достаточно длинный, то концентрации всех промежуточных компонентов имеют максимум внутри каскада и только концентрации крайних компонентов непрерывно возрастают к концам каскада. Явление локализации компонентов в разных местах каскада имеет простое физическое объяснение. Разделительный каскад можно описать при помощи силового поля постоянной напряженности. В результате конкуренции в этом поле наиболее активные компоненты вытесняют менее активные с концов каскада, а те, в свою очередь, аналогичным образом действуют на еще менее активные.

2. Из анализа системы (2.63) – (2.64) (а также систем (2.46) – (2.49), (2.57) – (2.60), (2.61) – (2.62)) непосредственно следует, что невозможно построить многокомпонентный каскад, в котором выполнялись бы условия несмещения на входах в ступени одновременно по всем концентрациям. Это связано с тем, что перенос всех компонентов в каскаде описывается системой  $m$ -уравнений, а параметр, с помощью которого можно обеспечить условие несмещения, всего один –  $L(s)$ .

3. В связи с тем, что при любом числе компонентов обога-

щение в ступени самого легкого компонента смеси  $\delta_1 = c_1 \sum_{j=1}^m \varepsilon_{1j} c_j$

всегда строго положительно, а самого тяжелого  $\delta_m = c_m \sum_{j=1}^m \varepsilon_{mj} c_j$ ,

наоборот, всегда меньше нуля, выделение их не представляет про-

блемы. В отличие от этого знаки обогащения промежуточных компонентов зависят от состава смеси. Поэтому на некотором удалении от точки питания их концентрации перестают возрастать, т.е. в каскаде удастся добиться лишь ограниченного обогащения промежуточных компонентов в отборе.

Задача выделения промежуточного компонента сводится, очевидно, к выбору такого профиля  $L(s)$ , при котором концентрация ключевого (целевого) компонента в потоке отбора (или отвала) имеет максимальное значение. В работе [5] показано, что в каскаде с одним потоком отбора и одним потоком отвала предельную концентрацию произвольного  $n$ -го компонента в потоке отбора можно оценить по формуле

$$C_{nP}^{\max} = \frac{C_{nF}}{\sum_{j=1}^n C_{jF}}. \quad (2.66)$$

На практике часто требуется получить концентрацию промежуточного компонента по величине большую, чем дает формула (2.66), для чего целесообразно либо включение дополнительного отбора в месте локализации ключевого (целевого) компонента, либо использование более сложных каскадных схем (двойной каскад и др.).

### **2.3.2. Исследование каскадов заданного профиля методом ортогональной коллокации (МОК) [6]**

Как было указано выше, сложность расчета каскада заданного профиля обусловлена, во-первых, нелинейностью уравнений каскада (2.63), (2.64), во-вторых, трудностью определения начальных приближений для концентраций на концах каскада, которые, являясь граничными условиями уравнений каскада, сами явно входят в эти уравнения.

Метод поступенного расчета каскада с итерационным определением конечных концентраций путем решения уравнений для невязок имеет существенные недостатки. Во-первых, он требует значительных затрат машинного времени из-за необходимости проведения громоздких вычислений на каждом итерационном шаге, уточняющих концентрации. Во-вторых, при его реализации сложно за-

дать начальные приближения для концентраций компонентов на концах каскада. Наконец, при большом числе ступеней в каскаде этот метод обладает невысокой точностью расчета концентраций в результате накопления погрешностей вычислений.

С точки зрения вычислительных характеристик наиболее эффективными являются методы, предложенные в работах [6-7]. Изложим кратко метод расчета из [6], который, обладая высокой устойчивостью к заданию начальных приближений для конечных концентраций, обеспечивает высокую скорость сходимости итерационного процесса.

Суть метода заключается в аппроксимации решений дифференциальных уравнений (2.63), (2.64), интерполяционным многочленом Лагранжа. Для простоты рассмотрим прямоугольный каскад, имеющий потоки питания  $F$ , отбора  $P$  и отвала  $W$  с концентрациями  $C_{iF}$ ,  $C_{iP}$  и  $C_{iW}$  соответственно. Перенос компонентов вдоль каскада описывает система (2.63), (2.64) совместно с уравнениями общего и покомпонентного баланса (2.43), причем поток  $L$  по длине каскада величина постоянная.

Нумерация ступеней в обеднительной (отвальной) части каскада ведется от конечной ступени каскада к ступени, на вход которой подают поток питания, а в обогатительной части – от ступени ввода питания к отборному концу каскада. При расчете уравнения (2.63), (2.64), (2.43) должны быть дополнены граничными условиями

$$c_i^I(0) = c_{iW}, \quad c_i^{II}(S_P) = c_{iP}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.67)$$

и условием непрерывности концентраций в сечении подачи питания

$$c_i^I(S_W) = c_i^{II}(0) = c_{i,f}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.68)$$

где  $c_{i,f}$  – концентрация  $i$ -го компонента в сечении ввода питания, а верхние индексы  $I$  и  $II$  относятся к обеднительной (отвальной) и обогатительной (отборной) частям каскада. Уравнения (2.63), (2.64) совместно с условиями (2.67), (2.68) и (2.43) образуют полную систему уравнений для определения неизвестных концентраций на концах каскада  $C_{iP}$  и  $C_{iW}$ .

Как известно, при использовании метода ортогональной коллокации решение дифференциального уравнения ищется в виде полинома или ряда. В качестве аппроксимирующего оператора можно использовать интерполяционный многочлен Лагранжа [8], который для отборной части каскада может быть записан следующим образом

$$c_i^{\text{II}}(s) = \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{\text{II}} Z_k^{\text{II}}(s), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.69)$$

где:  $Z_k^{\text{II}}(s) = \frac{P_n(s)}{P_n^{(1)}(s)}$  – многочлен Лагранжа степени  $(n - 1)$ ;

$P_n(s) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$  – узловой полином степени  $n$ ;

$P_n^{(1)}(s)$  – производная узлового полинома степени  $n$ ;

$s_k (0 \leq s \leq s_P, k = 1, 2, \dots, n)$  – точка коллокации;

$c_{i,k}^{\text{II}} = c_i^{\text{II}}(s_k), i = 1, 2, \dots, m$  – соответствующая ордината точки коллокации.

Если без ограничения общности принять, что числа точек коллокации  $n$ , выбранные для отборной и отвальной части каскада одинаковы, то тогда для отвальной части многочлен Лагранжа, определяющий  $c_i^{\text{I}}(s)$ , имеет вид

$$c_i^{\text{I}}(s) = \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{\text{I}} Z_k^{\text{I}}(s), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.70)$$

В качестве точек коллокации для достижения наибольшей точности расчетов целесообразно использовать действительные нули ортогональных многочленов, а необходимые  $n$  точек коллокации определять следующим образом: если  $k = 1$ , то  $s_k = 0$ ; если

$k = 2, \dots, n - 1$ , то  $s_k = \frac{s^v(X_k + 1)}{2}$ ; если  $k = n$ , то  $s_k = s$ , где  $s^v$

– число ступеней в соответствующей части (секции) каскада,

$X_k = \cos \left\{ \frac{[2(n-k)-1]\pi}{2(n-2)} \right\}$  – нули ортогонального многочлена

Чебышева степени  $(n-2)$ .

Условия (2.67) и (2.68) применительно к методу ортогональной коллокации можно записать в виде

$$\begin{aligned} s_1^{\text{II}} = 0, c_{i,1}^{\text{I}}(s_1^{\text{II}}) = c_{i,f}; \quad s_n^{\text{II}} = s_P, c_{i,n}^{\text{II}}(s_n) = c_{iP}; \\ s_1^{\text{I}} = 0, c_{i,1}^{\text{I}}(s_1^{\text{I}}) = c_{iW}; \quad s_n^{\text{I}} = s_W, c_{i,n}^{\text{I}}(s_n) = c_{i,f}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Учитывая, что  $Z_k(s_j) = 0$  при  $k \neq j$ ,  $Z_k(s_j) = 1$  при  $k = j$ , и подставляя формулу (2.69) в систему (2.63) для произвольной точки коллокации  $s_r$ , получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{\text{II}} [Z_k^{\text{II}}(s_r)]^{(1)} = c_{i,r}^{\text{II}} \left[ \frac{2P}{L} + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_{j,r}^{\text{II}} \right] + \frac{2P}{L} c_{i,n}^{\text{II}}, \quad (2.72) \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad r = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}$$

где  $[Z_k^{\text{II}}(s_r)]^{(1)} = \frac{P_n^{(2)}(s_r)}{2P_n^{(1)}(s_r)}$  – производная многочлена Лагранжа в точке  $s_r$ .

Аналогично для отвальной части каскада:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n c_{i,k}^{\text{I}} [Z_k^{\text{I}}(s_r)]^{(1)} = c_{i,r}^{\text{I}} \left[ -\frac{2W}{L} + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_{j,r}^{\text{I}} \right] + \frac{2P}{L} c_{i,n}^{\text{I}}, \quad (2.73) \\ i = 1, 2, \dots, m; \quad r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Из уравнений материального баланса (2.43) и условий выбора точек коллокации (2.71) следуют выражения, объединяющие системы (2.72) и (2.73) в одну

$$F c_{iF} = P c_{i,n}^{\text{II}} + W c_{i,1}^{\text{I}}, \quad c_{i,n}^{\text{I}} = c_{i,1}^{\text{II}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.74)$$

Таким образом, система дифференциальных уравнений (2.63), (2.64) сведена к системе нелинейных алгебраических уравнений с  $(2n-1)$  неизвестными для определения концентраций компонентов разделяемой смеси в точках коллокации, следовательно, и в потоках отбора и отвала каскада. С использованием квазилинеаризации, предложенной в работе [9], эта нелинейная система сводится

к системам линейных уравнений: вместо одной нелинейной системы с  $(2n - 1)m$  неизвестными решают  $m$  линейных систем с  $(2n - 1)$  неизвестными, постоянно уточняя искомую концентрацию в итерационной процедуре.

При расчете прямоугольно-секционированных каскадов к выражениям (2.72), (2.73) необходимо добавить одну или несколько таких же нелинейных систем (по числу секций) и условия сшивки на границах секций, аналогичные условиям в сечении ввода потока питания. Анализ вычислительных свойств МОК показывает, что данный метод малочувствителен к заданию начальных приближений\* и по сравнению с традиционными методами позволяет сократить время расчета ПК и ПСК (примерно в 5 раз).

### 2.3.3. Метод квазилинеаризации [7, 10, 11]

Суть данного метода состоит в следующем. Для симметричного каскада с внешними потоками  $F$ ,  $P$  и  $W$  с соответствующими концентрациями  $c_{iF}$ ,  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$  в случае «сквозного» расчета числа ступеней от точки отвала ( $s = 0$ ) до точки отбора ( $S = S_W + S_P$ ) уравнения (2.63), (2.64) могут быть записаны в виде:

для отборной части каскада ( $S_W \leq s \leq S_W + S_P$ ):

$$\frac{dc_i(s)}{ds} = -\frac{2P}{L}(c_{iP} - c_i(s)) + c_i(s) \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j, \quad (2.75)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

для отвальной части каскада ( $0 \leq s \leq S_W$ ):

$$\frac{dc_i(s)}{ds} = \frac{2W}{L}(c_{iW} - c_i(s)) + c_i(s) \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j, \quad (2.76)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

с граничными условиями

---

\* При реализации МОК удобно использовать в качестве начальных приближений концентрации компонентов в потоке питания каскада.

$$c_i(S_W + S_P) = c_{iP}, \quad c_i(0) = c_{iW}. \quad (2.77)$$

Замыкают систему (2.75) - (2.76) уравнения баланса внешних потоков по каскаду (2.43).

При расчете ПСК условия перехода от секции к секции выражаются в виде непрерывности концентраций компонентов на стыке двух соседних секций. Метод квазилинеаризации состоит в сведении системы (2.75), (2.76) к линейной системе путем вычисления

члена  $c_i \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j$  с использованием значений концентраций, полученных на предыдущей итерации. Кроме того, при решении квазилинеаризованной системы в качестве неизвестных целесообразно

принять отношения  $\frac{c_i}{c_{iP}}$  для обогатительной (отборной) части кас-

када и  $\frac{c_i}{c_{iW}}$  для обеднительной (отвальной) части каскада. Это по-

зволяет исключить неизвестные граничные условия из уравнений каскада. Указанные выше подстановки приводят уравнения (2.75),

(2.76) к квазилинеаризованной форме, в которой отношения  $\frac{c_i}{c_{iP}}$  и

$\frac{c_i}{c_{iW}}$  на концах каскада (т.е. новые граничные условия) равны еди-

нице:

для отборной части каскада:

$$\frac{dc_i^v(s)}{ds} = -\frac{2P}{L}(c_{iP}^v - c_i^v(s)) + c_i^v(s) \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j^{v-1}(s), \quad (2.78)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

для отвальной части каскада:

$$\frac{dc_i^v(s)}{ds} = \frac{2W}{L}(c_{iW}^v - c_i^v(s)) + c_i^v(s) \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j^{v-1}(s), \quad (2.79)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

с граничными условиями



$$\frac{c_i^v(0)}{c_{iW}^v} = 1, \quad \frac{c_i^v(s_W + s_P)}{c_{iP}^v} = 1. \quad (2.80)$$

В уравнениях (2.78), (2.79) верхний индекс  $v$  означает номер текущей итерации.

Дальнейший расчет состоит в вычислениях этих отношений по ступеням каскада, например, от концов каскада к точке подачи потока питания. Для системы (2.78), (2.79) отношения  $c_i(s)/c_{i,P}$  и

$c_i(s)/c_{i,W}$  определяются по следующим формулам:

для отборной части каскада:

$$\left( \frac{c_i(s)}{c_{iP}} \right)^v = \frac{1 + \int_s^{s_P} \frac{2P}{L} M_i^v(t) dt}{M_i^v(s)}, \quad (2.81)$$

$$M_i^v(s) = \exp \left[ \int_s^{s_P} \left( \frac{2P}{L} + \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j^{v-1}(t) \right) dt \right], \quad (2.82)$$

для отвальной части каскада:

$$\left( \frac{c_i(s)}{c_{iW}} \right)^v = \frac{1 + \int_s^{s_P} \frac{2W}{L} M_i^v(t) dt}{M_i^v(s)}, \quad (2.83)$$

$$M_i^v(s) = \exp \left[ \int_s^{s_P} \left( \frac{2W}{L} - \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j^{v-1}(t) \right) dt \right], \quad (2.84)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Расчет интегралов в формулах (2.81) и (2.83) целесообразно проводить с помощью локальных сплайнов пятого или седьмого порядка [16].

После нахождения этих отношений для определения концентраций в потоках отбора и отвала каскада и распределения концентраций по ступеням каскада следует использовать условие непрерыв-

ности концентраций в точке подачи питания и уравнения покомпонентного баланса.

В работе [7] в качестве иллюстрации применения метода приведен расчет каскада для обогащения изотопа  $^{18}\text{O}$  методом низкотемпературной ректификации оксида азота в предположении отсутствия внутрифазного изотопного обмена.

Схема 3-секционного каскада и значения параметров для каждой его секции приведена на рис. 2.3. За отборный конец каскада в данном примере принят «тяжелый» конец каскада.

Исходные данные и результаты расчета концентраций на концах каскада приведены в табл. 2.1.

Результаты тестирования данного метода показывают равномерную сходимость итерационного процесса и нечувствительность к начальным приближениям независимо от концентраций в потоке питания, величин потоков и других параметров каскада. При сравнении методов расчета каскадов наиболее корректным критерием являются затраты времени на расчет при заданной точности.

Результаты сравнения рассмотренных выше методов (МОК и метода квазилинеаризации – МК) представлены на рис. 2.4 и 2.5. как отношение времени расчета ПСК, изображенного на рис. 2.3, методом ортогональной коллокации  $T_{\text{МОК}}$  к времени расчета того же каскада методом квазилинеаризации  $T_{\text{МК}}$  от числа ступеней в каскаде и относительной погрешности соответственно.

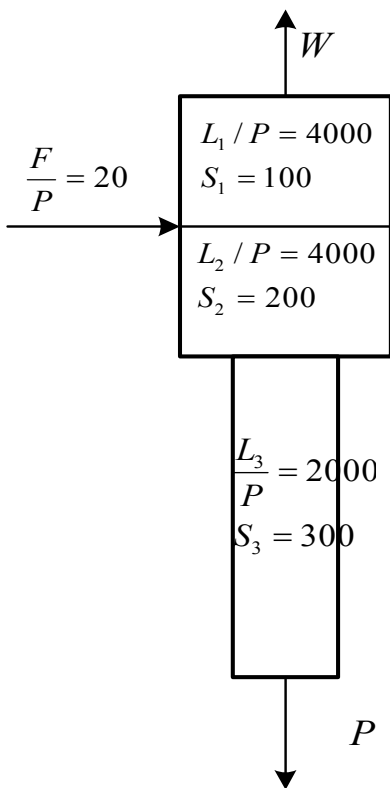


Рис. 2.3. Схема ректификационного ПСК

Таблица 2.1

Концентрации компонентов  
на концах ректификационного ПСК [7]

| Компонент          | $^{14}N^{16}O$ | $^{14}N^{17}O$         | $^{15}N^{16}O$         | $^{14}N^{18}O$         | $^{15}N^{17}O$         | $^{15}N^{18}O$         |
|--------------------|----------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| $i$                | 1              | 2                      | 3                      | 4                      | 5                      | 6                      |
| $\varepsilon_{ij}$ | 0,0            | 0,017                  | 0,025                  | 0,034                  | 0,042                  | 0,059                  |
| $C_{iF}$           | 0,9939488      | $3,6865 \cdot 10^{-4}$ | $3,6412 \cdot 10^{-3}$ | $2,0325 \cdot 10^{-3}$ | $1,35 \cdot 10^{-6}$   | $7,45 \cdot 10^{-6}$   |
| $C_{iP}$           | 0,8940         | $5,1524 \cdot 10^{-3}$ | $6,2380 \cdot 10^{-3}$ | $3,8293 \cdot 10^{-2}$ | $2,6326 \cdot 10^{-5}$ | $3,4841 \cdot 10^{-4}$ |
| $C_{iW}$           | 0,99921        | $3,1688 \cdot 10^{-4}$ | $3,4968 \cdot 10^{-4}$ | $1,2412 \cdot 10^{-4}$ | $3,548 \cdot 10^{-8}$  | $3,1114 \cdot 10^{-8}$ |

Из рис. 2.4 следует, что с увеличением числа ступеней в каскаде отношение  $T_{МОК}/T_{МК}$  быстро возрастает. Это может быть объяснено увеличением числа точек коллокации в МОК, необходимого для достижения заданной точности, что приводит к быстрому росту времени расчета. Последнее обстоятельство вызвано кубической пропорциональностью времени расчета одной итерации от числа точек коллокации, в то время как в МК оно пропорционально числу ступеней. Из другой зависимости, представленной на рис. 2.5, можно заключить, что порядок аппроксимации целесообразно выбирать в соответствии с требуемой точностью. Так, при точности  $\sim 10^{-5}$  наиболее эффективно использовать аппроксимацию пятого порядка, при большей – седьмого порядка. Практически использование аппроксимации более высокого порядка не имеет смысла, поскольку точность расчета выше  $10^{-6} \div 10^{-7}$  находится за пределами математической модели переноса многокомпонентной смеси в каскаде. На-

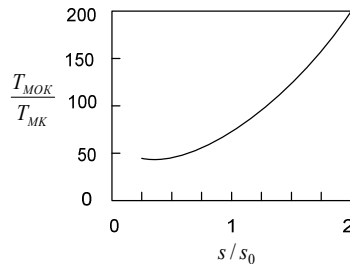


Рис. 2.4. Зависимость отношения  $\frac{T_{МОК}}{T_{МК}}$  от длины каскада при точности  $10^{-5}$  [7]

личие максимумов на представленных зависимостях объясняется

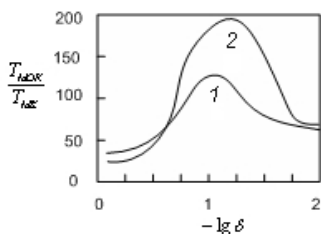


Рис. 2.5. Зависимость отношения  $\frac{T_{МОК}}{T_{МК}}$  от относительной погрешности  $\delta$ : для аппроксимации 5-ого и 7-ого порядков (соответственно кривые 1 и 2) [7]

тем фактом, что время расчета МОК -  $T_{МОК}$  пропорционально  $(-\lg \delta)^3$ , а для метода квазилинеаризации  $T_{МК} \sim \exp(-\lg(\delta) / p)$ , где  $p$  - порядок аппроксимации.

Метод квазилинеаризации привлекателен независимостью от задания начального приближения для концентраций компонентов, быстрой и устойчивой сходимостью итерационной процедуры, слабой зависимостью времени расчета от числа компо-

нентов, числа ступеней и требуемой точности определения концентраций компонентов по сравнению с другими методами.

### 2.3.4. Модельные каскады.

#### Анализ прямоугольно-секционированного каскада на основе модельных каскадов

##### 2.3.4.1. Q-каскады («свободные» каскады) и их свойства [2, 3, 12]

Расчет каскада (ПСК или ПК) по заданной величине отбора и ограничениям диапазона концентраций ключевого (целевого) компонента в потоке отбора и отвала заключается в определении следующих его параметров: число, длина и потоки секций, потоки питания  $F$  и отвала  $W$ . При этом параметры каскада должны быть такими, чтобы они соответствовали оптимальному значению того или иного критерия эффективности. Как и в случае разделения бинарных смесей, при решении данной задачи целесообразно использовать в качестве предварительной модели такие каскады непрерывного профиля (КНП), теория которых позволяет аналитически определить длины обогатительной (отборной) и обеднительной (отвальной) частей каскада, распределение потока  $L(s)$  и концен-

траций компонентов  $c_i(s)$  по длине каскада при заданных значениях потока отбора  $P$  и концентраций ключевого (целевого) компонента в потоках отбора и отвала. Дальнейший расчет каскада сводится к аппроксимации полученного модельного каскада прямоугольно-секционированным или прямоугольным и его оптимизации.

Общий метод расчета модельных каскадов, основан на использовании соотношений, полученных В.Бирюковым [3], Р.Кучеровым и В.Миненко [2] путем замены переменных в уравнениях (2.63), (2.64). Суть перехода на примере отборной части каскада непрерывного профиля состоит в следующем. Из уравнения для компонента  $i$  последовательно вычтем уравнения для остальных компонентов, в результате чего получим  $(m - 1)$  – уравнение типа

$$\frac{d \ln c_i(s)}{ds} - \frac{d \ln c_k(s)}{ds} = \varepsilon_{ik} - \frac{2Pc_{iP}}{L(s)c_i(s)} + \frac{2Pc_{kP}}{L(s)c_k(s)}. \quad (2.85)$$

Уравнение (2.85) вместе с тождеством (2.1) образует полную систему для определения концентраций компонентов. Легко показать, что системы дифференциальных уравнений (2.63) и (2.85) при условии (2.1) эквивалентны. Если воспользоваться соотношениями (2.5), (2.8) и произвести замену  $s = S_p - l$ , где  $l$  – новая переменная, то уравнения (2.85) можно переписать в виде

$$\frac{d \ln G_i}{dl} - \frac{d \ln G_k}{dl} = -\varepsilon_{ik} + \frac{2Pc_{iP}}{G_i} - \frac{2Pc_{kP}}{G_k}. \quad (2.86)$$

Заменяя

$$\frac{d \ln G_i}{dl} - \frac{2Pc_{iP}}{G_i} = \frac{d \ln \bar{G}_i}{dl}, \quad (2.87)$$

приводим уравнения (2.86) к виду

$$\frac{d}{dl} \ln \frac{\bar{G}_i}{\bar{G}_k} = -\varepsilon_{ik}. \quad (2.88)$$

В результате получаем

$$\frac{\bar{G}_i(l)}{\bar{G}_i(0)} = \frac{\bar{G}_k(l)}{\bar{G}_k(0)} \exp(-\varepsilon_{ik} l). \quad (2.89)$$

Решение линейного дифференциального уравнения (2.87) при граничном условии  $G_i(0) = G_{i0}$  имеет вид

$$G_i(l) = \frac{\bar{G}_i(l)}{\bar{G}_i(0)} \left\{ G_{i0} + 2Pc_{iP} \int_0^l \frac{\bar{G}_i(0)}{\bar{G}_i(t)} dt \right\}. \quad (2.90)$$

Введем обозначение

$$\varphi_i(l) = \frac{\bar{G}_i(0)}{\bar{G}_i(l)}, \quad (2.91)$$

с помощью которого запишем уравнения (2.90) и (2.89) соответственно

$$G_i(l) \cdot \varphi_i(l) = G_{i0} + 2Pc_{iP} \int_0^l \varphi_i(t) dt, \quad (2.92)$$

$$\varphi_i(l) = \varphi_k(l) \exp(\varepsilon_{ik} l). \quad (2.93)$$

Суммируя в (2.92) по  $i$  с учетом (2.89) и (2.93), находим

$$\begin{aligned} G_i(l) \varphi_i(l) &= G_{i0} + \sum_{j=1}^m \frac{2Pc_{iP}}{L(l)} \int_0^l \varphi_i(t) \exp[\varepsilon_{ij}(t-l)] dt = \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{c_i(0)L(0)}{L(l)} \exp(-\varepsilon_{ij} l), \end{aligned} \quad (2.94)$$

где  $L(0)$  и  $c_i(0) = c_{iP}$  — поток и концентрации на отборном конце каскада при  $l = 0$ .

Таким образом, суть перехода состоит в том, что концентрации  $c_i(l)$  заменяются функциями  $\varphi_i(l)$ , а система уравнений (2.63) при непрерывной функции  $L(l)$  приводится к интегральному уравнению Вольтерра с вырожденным ядром [16] и  $(m-1)$  алгебраическому соотношению для функций  $\varphi_i(l)$ . В соответствии с (2.92) функции  $\varphi_i(l)$  связаны с концентрациями и потоком в каскаде соотношением

$$G_i(l) = L(l)c_i(l) = \frac{L(0)c_{iP} + 2Pc_{iP} \int_0^l \varphi_i(t) dt}{\varphi_i(l)}. \quad (2.95)$$

Следует отметить, что соотношение (2.94) несложно обобщить на случай каскада кусочно-непрерывного профиля, а также наличия нескольких потоков отбора и питания.

При заданном распределении  $L(l)$  уравнение (2.94) имеет единственное решение, которое может быть построено, например, по методу последовательных приближений. Затем по формуле (2.95) можно найти распределение  $G_i(l)$ , далее, используя соотношение

$$c_i(l) = \frac{G_i(l)}{\sum_{j=1}^m G_j(l)}$$

си.

С практической точки зрения интерес представляет возможность использования (2.95) для нахождения такого распределения  $L(l)$ , которое позволяет решить задачу заданного обогащения целевого компонента. Распределения  $L(l)$  и  $c_i(l)$  по длине каскада однозначно определяются заданием одной из характеристических функций  $\varphi_n(l)$  (остальные  $(m-1)$  функций определяются по соотношению (2.93)). Если вид характеристической функции позволяет вычислить интеграл в (2.95), то распределение потока  $L(l)$  и концентрации  $c_i(L)$  можно получить в аналитическом виде.

Простую и удобную математическую модель, с помощью которой может быть решен широкий круг разделительных задач, можно получить, если задать характеристические функции в виде экспонент

$$\varphi_i(l) = \exp(Q_i l) \tag{2.96}$$

где  $Q_i$  -некоторые постоянные, которые согласно (2.93), должны быть связаны условием

$$Q_i - Q_j = \varepsilon_{ij} \tag{2.97}$$

Соответственно только одна из величин  $Q_i$  может быть выбрана произвольно.

Модельные каскады, удовлетворяющие условию (2.96), называют  $Q$ -каскадами. В стремлении минимизировать суммарный поток каскада естественно принять

$$L(0) = 0. \quad (2.98)$$

Подставляя (2.96) в соотношения (2.95), учитывая (2.98), а также, что  $L(l) = \sum_{j=1}^m G_j(l)$ ,  $c_i(l) = \frac{G_i(l)}{\sum_{j=1}^m G_j(l)}$ , получаем

$$G_i(l) = \frac{2Pc_{iP}}{Q_i} [1 - \exp(-Q_i l)], \quad (2.99)$$

$$L(l) = 2P \sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{Q_j} [1 - \exp(-Q_j l)], \quad (2.100)$$

$$c_i(l) = \frac{\frac{c_{iP}}{Q_i} [1 - \exp(-Q_i l)]}{\sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{Q_j} [1 - \exp(-Q_j l)]}. \quad (2.101)$$

Уравнения (2.99) – (2.101) дают распределение концентраций и потока в отборной части  $Q$ -каскада.

Аналогичные уравнения можно записать и для отвалной части каскада:

$$G_i(l) = \frac{2Wc_{iW}}{Q_i} [\exp(Q_i l) - 1], \quad (2.102)$$

$$L(l) = 2W \sum_{j=1}^m \frac{c_{jW}}{Q_j} [\exp(Q_j l) - 1], \quad (2.103)$$

$$c_i(l) = \frac{\frac{c_{iW}}{Q_i} [\exp(Q_i l) - 1]}{\sum_{j=1}^m \frac{c_{jW}}{Q_j} [\exp(Q_j l) - 1]}, \quad (2.104)$$

$$l = S_W - s.$$



С помощью полученных соотношений (2.99) – (2.100), (2.102) – (2.103) и выражения  $c_i(l) = \frac{G_i(l)}{\sum_{j=1}^m G_j(l)}$  можно выразить концентра-

ции в отборе  $c_{iP}$  и в отвале  $c_{iW}$  через концентрации в точке подачи питания  $c_{iF}$  :

$$c_{iP} = \frac{Q_i c_{i,f}}{1 - \exp(-Q_i S_P)} \bigg/ \sum_{j=1}^m \frac{Q_j c_{j,f}}{1 - \exp(-Q_j S_P)} \quad (2.105)$$

$$c_{iW} = \frac{Q_i c_{i,f}}{\exp(Q_i S_W) - 1} \bigg/ \sum_{j=1}^m \frac{Q_j c_{j,f}}{\exp(Q_j S_W) - 1}. \quad (2.106)$$

Следует подчеркнуть, что концентрации в точке подачи питания каскада  $c_{if}$  в общем случае не равны концентрациям в потоке питания  $c_{iF}$ . Используя уравнения материальных балансов (2.43), можно из уравнений (2.105) и (2.106) исключить  $c_{if}$  и выразить  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$  через концентрации в потоке питания

$$c_{iP} = \frac{1 - \exp(Q_i S_W)}{\exp(-Q_i S_P) - \exp(Q_i S_W)} c_{iF} \times \left( \sum_{j=1}^m \frac{1 - \exp(Q_j S_W)}{\exp(-Q_j S_P) - \exp(Q_j S_W)} c_{jF} \right)^{-1}; \quad (2.107)$$

$$c_{iW} = \frac{\exp(-Q_i S_P) - 1}{\exp(-Q_i S_P) - \exp(Q_i S_W)} c_{iF} \times \left( \sum_{j=1}^m \frac{\exp(-Q_j S_P) - 1}{\exp(-Q_j S_P) - \exp(Q_j S_W)} c_{jF} \right)^{-1}. \quad (2.108)$$

В свою очередь, используя формулы (2.100), (2.103), а также уравнения баланса (2.43) и очевидное соотношение  $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ , легко получить следующее выражение:

$$\frac{W}{P} = \sum_{j=1}^m \frac{1 - \exp(-Q_j S_P)}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_P)} c_{jF}. \quad (2.109)$$

$$\frac{F}{P} = \sum_{j=1}^m \frac{\exp(Q_j S_W) - 1}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_P)} c_{jF}. \quad (2.110)$$

Полученные формулы (2.107) и (2.108) показывают, что  $Q$ -каскады позволяют проанализировать процесс концентрирования изотопов в определенной части изотопного спектра при соответствующем выборе величины  $Q_i$ . Это вытекает из следующих рассуждений. Предположим для определенности, что для  $i$ -го изотопа параметр  $Q_i > 0$ . Кроме того, естественно принять, что мы имеем дело с длинными каскадами, у которых  $S_P$  и  $S_W$  велики. При оценке эффекта разделения наблюдается различие в поведении компонентов, для которых  $Q_n$  больше или меньше нуля.

Для случая  $Q_i > 0$  из выражения (2.107) в предположении, что знаменатели в этих формулах одинаковы. Нетрудно получить оценочные соотношения:

$$\frac{c_{iP}}{c_{jP}} \approx \frac{c_{iF}}{c_{jF}} \quad (2.111)$$

аналогично, если  $Q_i < 0$ , то на основании выражения (2.107) запишем

$$\frac{c_{iP}}{c_{jP}} \gg \frac{c_{iF}}{c_{jF}}. \quad (2.112)$$

Для отвалной части каскада аналогичные оценки получаются при  $Q_i < 0$ . В соответствии с условием (2.97) и учитывая, что выражение для коэффициента  $\varepsilon_{ik}$  можно представить в виде  $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0(M_k - M_i)$ , постоянную  $Q_i$  для любого компонента  $i = \overline{1, m}$  можно записать как

$$Q_i = \varepsilon_0(M - M_i) \quad (2.113)$$

где  $M$  – параметр, задание которого позволяет определить одновременно постоянную  $Q$  для всех компонентов смеси,  $\varepsilon_0$  – коэффициент обогащения, приходящийся на единичную разность массовых чисел,  $M_i$  – массовое число  $i$ -го компонента смеси. Тогда согласно выражению (2.113) все концентрации компонентов с массовыми числами  $M_i < M$  будут возрастать, концентрации компонентов с массовыми числами  $M_i > M$  – падать на отборном конце каскада. Следовательно,  $Q$ -каскады позволяют разделять все изотопы данного элемента на две группы, причем в первой группе концентрации всех компонентов одновременно растут, а во второй группе падают.

Из полученных результатов непосредственно следует, что в одном  $Q$ -каскаде нельзя неограниченно увеличивать концентрацию промежуточного компонента в отборе, поскольку сумма концентрации обогащаемых изотопов не должна превышать единицу.

С использованием (2.107) можно записать формулу для отношения концентраций любых  $i$ - и  $n$ -го компонентов в отборе  $Q$ -каскада:

$$\frac{c_{iP}}{c_{nP}} = \frac{\exp(Q_i S_W) - 1}{\exp(Q_n S_W) - 1} \cdot \frac{\exp(Q_n S_P) - \exp(-Q_n S_P)}{\exp(Q_i S_P) - \exp(-Q_i S_P)} \cdot \frac{c_{iF}}{c_{nF}}. \quad (2.114)$$

Если  $n$  – номер целевого компонента и компоненты пронумерованы в порядке возрастания массовых чисел,  $Q_i$  выбирается так, чтобы все значения при  $i \geq n$  были меньше 0. Тогда для каскадов с достаточно длинной обогатительной секцией, т.е. при любом  $i$ ,  $\exp|Q_i|S_P \gg 1$  (см. формулу (2.114)), получим предельное значение целевого изотопа при выбранном числе ступеней в обеднительной части каскада  $S_W$ :

$$c_{nP} \approx \frac{c_{nF}}{\sum_{i=1}^n \gamma_i c_{iF}}, \quad (2.115)$$

где

$$\gamma_i = \frac{1 - \exp(-Q_i S_W)}{1 - \exp(-Q_n S_W)}. \quad (2.116)$$

При этом число ступеней  $S_W$  и концентрация целевого компонента  $c_{nW}$  в потоке отвала связаны соотношением

$$c_{nW} \approx \frac{c_{nF} \cdot \exp(-Q_n S_W)}{\sum_{j=1}^n c_{jF} \cdot \exp(-Q_n S_W) + \sum_{i=n+1}^m c_{iF}}. \quad (2.117)$$

В предельном случае при  $S_W \rightarrow \infty$  формула (2.115) получает вид (2.66), а при  $S_W \rightarrow 0$

$$c_{iP} \approx \frac{c_{nF}}{\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{Q_n} c_{iF}}, \quad (2.118)$$

причем  $Q_i/Q_n \geq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Таким образом, максимально допустимое значение концентрации  $c_{iP}$  при наличии обеднительной части определяется соотношением

$$\frac{c_{nF}}{\sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{Q_n} c_{iF}} < c_{nP} < \frac{c_{nF}}{\sum_{i=1}^n c_{iF}}. \quad (2.119)$$

Таблица 2.2

Природная распространенность изотопов вольфрама

|                            |      |       |       |       |       |
|----------------------------|------|-------|-------|-------|-------|
| Номер компонента, $i$      | 1    | 2     | 3     | 4     | 5     |
| Массовое число изотопа     | 180  | 182   | 183   | 185   | 186   |
| Концентрация, $c_{iF}$ , % | 0,13 | 26,30 | 14,30 | 30,67 | 28,60 |

В случае если целевой компонент обогащается в противоположенной части каскада с компонентами, номера которых

$i = n + 1, \dots, m$  (т.е. в потоке  $W$ ), то соотношение (2.119) переписывается в виде

$$\frac{c_{nF}}{\sum_{i=n}^m \frac{Q_i}{Q_n} c_{iF}} < c_{nW} < \frac{c_{nF}}{\sum_{i=n}^m c_{iF}}. \quad (2.120)$$

Предельные значения промежуточных компонентов на концах  $Q$ -каскада существенно зависят от исходного состава. Так, для изотопной смеси изотопов вольфрама природного состава (табл. 2.2) предельные значения концентрации изотопа  $W-183$  ( $i = 3$ ) составляют  $c_{3P} \approx 35,11\%$ ,  $c_{3W} = 19,43\%$ , а предельные значения концентраций изотопа  $W-185$  ( $i = 4$ ):  $c_{4P} \approx 42,95\%$ ,  $c_{4W} = 51,75\%$ .

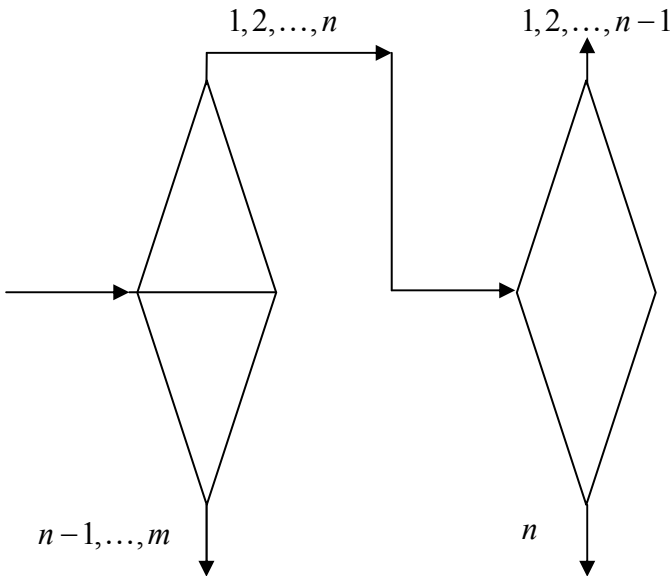


Рис. 2.6. Схема выделения в двух последовательно соединенных каскадах промежуточного компонента

Для получения значений концентраций целевых промежуточных изотопов больших, чем предельные значения этих концентраций на концах каскада, имеются две возможности.

1. Подключение дополнительного отбора на том участке каскада, где целевой компонент локализуется. Анализ показывает, что в данном случае концентрация целевого компонента ненамного превосходит величину, определяемую соотношением (2.119).

Задача о получении любого практически чистого промежуточного компонента решается с помощью двух последовательно соединенных  $Q$ -каскадов (рис. 2.6).

Важной интегральной характеристикой разделительного каскада является суммарный поток. Умножив (2.101) и (2.103) на  $dl$  и проинтегрировав (2.101) и (2.103) соответственно по длине обогащительной (отборной) и обеднительной (отвальной) части, получим формулу для суммарного потока:

$$\sum L = 2 \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{Pc_{iP} [\exp(-Q_i S_p) - 1] + Wc_{iW} [\exp(Q_i S_w) - 1]}{Q_i^2} + \frac{Pc_{iP} S_p - Wc_{iW} S_w}{Q_i} \right\}. \quad (2.121)$$

Для расчета  $Q$ -каскада на заданные величины  $c_{nP}$ ,  $c_{nW}$  и  $P$  ( $n$  – номер целевого компонента; все величины  $\varepsilon_{ij}$  и  $c_{iF}$  считаем известными) можно рекомендовать следующую последовательность расчета:

1. Для целевого компонента задаем величину  $Q_n$  (точнее, в соответствии с (2.113) величину  $M$ ).
2. По соотношению (2.113) определяем все остальные  $Q_i$ .
3. Решая совместно (2.107) – (2.108) для  $i = n$ , находим  $S_p$  и  $S_w$ .
4. Далее по (2.107) – (2.108) находим все остальные  $c_{iP}$  ( $i \neq n$ ) и  $c_{iW}$  ( $i \neq n$ ), а по (2.109) и (110) потоки отвала и питания.

5. По формулам (2.100) и (2.103) определяем распределения потоков в отборной и отвальной частях каскада, а соотношение (2.121) позволяет вычислить суммарный поток каскада.

6. Оптимальную величину  $M$  следует определять из условия  $\sum L = \min$ .

На рис. 2.7 представлена зависимость относительного суммарного потока  $\varepsilon_0^2 \sum L / 2P$  Q-каскада, разделяющего природную смесь изотопов криптона (см. табл. 2.3), от величины параметра  $M$  при фиксированном значении концентрации ключевого компонента  $^{78}\text{Kr}$  в потоке отвала  $c_{1W}=0,12$  для трех значений концентраций этого компонента в потоке отбора:  $c_{1P}=20\%$  (кривая 1),  $c_{1P}=30\%$  (кривая 2) и  $c_{1P}=50\%$  (кривая 3).

Все кривые имеют минимум. Отметим, что в каждом случае оптимальная величина параметра  $M$ , соответствующая минимуму суммарного потока, равна полусумме величин массовых чисел ключевого компонента и одного из соседних компонентов. Для кривой 1  $M_{\text{опт}}=81=(M_1+M_3)/2=(78+84)/2$ , для кривой 2  $M_{\text{опт}}=80,51=(M_1+M_4)/2=(78+834)/2$ , а для кривой 3  $M_{\text{опт}}=80=(M_1+M_3)/2=(78+82)/2$ .

Таблица 2.3

Природный состав изотопов криптона

|                            |                  |                  |                  |                  |                  |                  |
|----------------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|
| Номер компонента           | 1                | 2                | 3                | 4                | 5                | 6                |
| Изотоп                     | $^{78}\text{Kr}$ | $^{80}\text{Kr}$ | $^{82}\text{Kr}$ | $^{83}\text{Kr}$ | $^{84}\text{Kr}$ | $^{86}\text{Kr}$ |
| Концентрация, $c_{iF}$ , % | 0,35             | 2,27             | 11,56            | 11,52            | 56,90            | 17,40            |

Из информации, приведенной в разделе 2.3.4.2, станет ясно, что в рассмотренных примерах оптимальные условия разделения соответствуют Q-каскадам, на входах в ступени которых имеет место несмешение по относительным концентрациям  $R_{nk} = c_n / c_k$ , где  $n$  – номер ключевого (целевого) компонента,  $k$  – номер опорного компонента, выбор которого для каждого примера обеспечивает условие  $\sum L = \min$ .

Отметим, что для получения формул (2.101), (2.102), может быть использован подход, предложенный Б.В. Жигаловским [3]. В нем автор постулирует, что срезы парциальных потоков в каскаде могут быть представлены в виде

$$\phi_i = \frac{1}{2}(1 + \varepsilon_i), \quad 1 = 1, 2, \dots, m, \quad (2.122)$$

где  $\varepsilon_i$  – константы, не меняющиеся по величине при переходе от ступени к ступени.

Нумеруя, как и раньше, ступени отборной части каскада от отборного конца к точке подачи питания, обозначим поток  $i$ -го компонента, проходящий через сечение между  $(l+1)$ -й и  $l$ -й ступенями через  $J_i = P_{C_{iP}}$ .

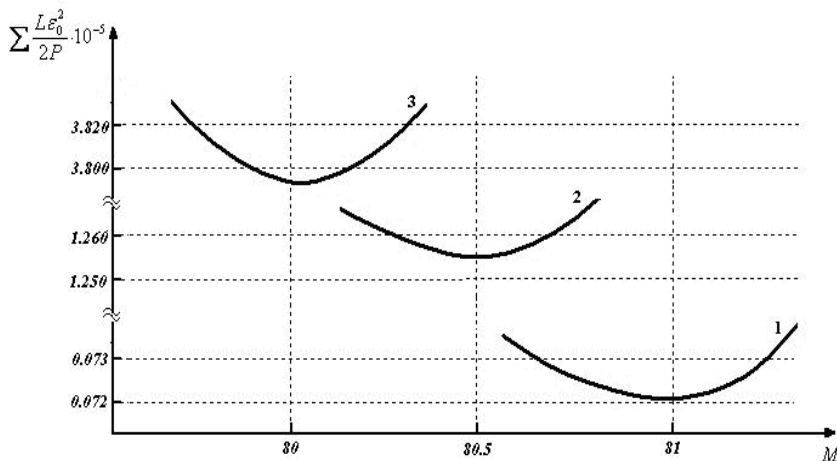


Рис. 2.7. Зависимость относительного суммарного потока в  $Q$ -каскаде при обогащении  $^{78}\text{Kг}$  от величины параметра  $M$ . Кривая 1 для  $C_{1P} = 20\%$ ,

2 для  $C_{1P} = 30\%$  и 3 для  $-C_{1P} = 50\%$

Тогда в отсутствие потерь на ступенях балансовые уравнения можно записать в виде

$$G'_i(l+1) - G''_i(l) = J_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.123)$$

или



$$\varphi_i G_i(l+1) - (1 - \varphi_i) G_i(l) = J_i. \quad (2.124)$$

С учетом (2.122) уравнения (2.124) преобразуются к виду

$$G_i(l+1) - G_i(l) = 2 \frac{\varepsilon_i}{1 + \varepsilon_i} G_i(l) + \frac{2J_i}{1 + \varepsilon_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.125)$$

Для случая, когда  $\varepsilon_i \ll 1$ , уравнение (2.125) можно переписать в виде

$$\frac{dG_i}{dl} = -2\varepsilon_i G_i + 2J_i, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.126)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию  $G_i(0) = 2Pc_{iP} / \varphi_i$  при  $\varepsilon_i \ll 1$ , есть

$$G_i(l) = \frac{Pc_{iP}}{\varepsilon_i} (1 - \exp(-2\varepsilon_i l)), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.127)$$

Полный поток через ступень определяется выражением

$$L(l) = P \sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{\varepsilon_j} [1 - \exp(-2\varepsilon_j l)]. \quad (2.128)$$

Для концентрации  $i$ -го компонента получаем выражение:

$$c_i(l) = \frac{G_i(l)}{\sum_{j=1}^m G_j(l)} = \frac{\frac{c_{iP}}{\varepsilon_i} [1 - \exp(-2\varepsilon_i l)]}{\sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{\varepsilon_j} [1 - \exp(-2\varepsilon_j l)]}. \quad (2.129)$$

Каскад, производительность ступени которого определяется формулой (2.128), в работе [3] назван «свободным» каскадом. Сравнение (2.99) и (2.127), (2.100) и (2.128), (2.101) и (2.129) показывает, что при условии  $Q_i \equiv 2\varepsilon_i$  введенные выше понятия  $Q$  – каскада и «свободного» каскада идентичны.

На примере диффузионной ступени в работе [3] выявлен физический смысл констант  $\varepsilon_i$  (или  $Q_i$ ).

$$\varepsilon_i - \varepsilon_k = \varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik} / 2, \quad (2.130)$$

то есть  $2\varepsilon_i \equiv Q_i$ ,  $2\varepsilon_k \equiv Q_k$ .

Определение «свободный» каскад согласно [3] означает, что суммарный (по всем компонентам смеси) поток  $L(l)$  от ступени к ступени изменяется в соответствии с изменением величины потока каждого из компонентов при прохождении через разделительную ступень. При этом перенос каждого компонента не зависит от переноса других компонентов.

### 2.3.4.2. R-каскады и их свойства

В случае многокомпонентной смеси создать каскад, в котором не происходит смешения потоков с разными концентрациями всех компонентов или нескольких (больше 2) компонентов невозможно, строго говоря, вследствие различия в величинах  $Q_i$  (или  $\varepsilon_i$ ), определяющих изменения количества  $i$ -ого компонента при движении по каскаду. Однако, как показывает анализ соотношений (2.100)-(2.108) и (2.113), можно, оставаясь в рамках  $Q$ -каскадов («свободных» каскадов) построить такие каскады, в которых не происходит смешения по парам концентраций  $c_n$  и  $c_k$  (точнее по относительным концентрациям  $R_{nk} = c_n / c_k$ ). Очевидно, должно существовать  $\frac{m(m-1)}{2}$  каскадов для  $m$ -компонентов смеси, каждый из которых для пары произвольных компонентов ( $c_n, c_k$ ) является «идеальным».

Покажем, что случай

$$M \equiv M^* = \frac{M_n + M_k}{2} \left( \text{или } Q_n = \frac{1}{2} \varepsilon_{nk} \right) \quad (2.131)$$

соответствует каскаду, на входах в ступени которого смешиваются потоки с одинаковым отношением концентраций  $n$ -го и  $k$ -го компонентов  $R_{nk} = c_n / c_k$ . Такой каскад, детально изученный для 3-компонентной изотопной смеси в классической работе [13] был назван  $R$ -каскадом. Если параметр  $M$  задан в виде (2.131), то выражение (2.113) может быть переписано в виде

$$Q_i = \varepsilon_0 \left( \frac{M_n + M_k}{2} - M_i \right) \quad (2.132)$$

и в частности,

$$Q_k = -Q_n \quad (2.133)$$

При задании  $Q_i$  в виде (2.132) из (2.107) и (2.108) с учетом уравнений баланса (2.43) можно непосредственно получить

$$R_{nk}^P \equiv \frac{c_{nP}}{c_{kP}} \bigg/ \frac{c_{nF}}{c_{kF}} = \exp(Q_n S_P) \quad (2.134)$$

$$R_{nk}^W \equiv \frac{c_{nW}}{c_{kW}} \bigg/ \frac{c_{nF}}{c_{kF}} = \exp(-Q_n S_W) \quad (2.135)$$

где индексы  $P$  и  $W$  показывают, что значения относительных концентраций  $R_{nk}$  взяты для потоков отбора и отвала соответственно.

Уравнения (2.134) и (2.135) означают, что в выбранном каскаде относительные концентрации  $R_{nk} = \frac{c_n}{c_k}$  на входах в разделитель-

ную ступень одинаковы, то есть выполняется условие несмешивания относительных концентраций  $R_{nk}$ .

Из соотношений (2.134) и (2.135) следует, что задание относительных концентраций  $R_{nk}$  в потоках отбора и отвала позволяет однозначно определить количество ступеней  $S_P$  и  $S_W$ , и следовательно, в соответствии с формулами (2.99) – (2.104), (2.107) – (2.110) полностью рассчитать каскад.

Одновременно при задании  $Q_i$  в виде (2.132) выражение для суммарного потока (2.121) существенно упрощается. Действительно, из (2.107) и (2.108) с учетом условия (2.133) имеем

$$Pc_{iP}(\exp(-Q_i S_P) - 1) = -Pc_{kP} \frac{c_{i,f}}{c_{k,f}} \cdot \frac{Q_i}{Q_n} (\exp(Q_n S_P) - 1) \quad (2.136)$$

$$Pc_{iW}(\exp(Q_i S_W) - 1) = -Pc_{kW} \frac{c_{i,f}}{c_{k,f}} \cdot \frac{Q_i}{Q_n} (\exp(Q_n S_W) - 1) \quad (2.137)$$

Суммируя (2.136) и (2.137) с учетом (2.43), (2.134) и (2.135), можно получить равенство

$$Pc_{iP}(\exp(-Q_i S_P) - 1) + Wc_{iW}(\exp(Q_i S_W) - 1) = 0, \quad (2.138)$$

справедливое для любого  $i$ . Кроме того, непосредственно из соотношений (2.134), (2.135) с учетом уравнений баланса (2.43) следует:

$$\frac{Pc_{iP}S_P - Wc_{iW}S_W}{Q_i} = \frac{Pc_{iP} \ln R_{nk}^P + Wc_{iW} \ln R_{nk}^W - Fc_{iF} \ln R_{nk}^F}{Q_i Q_n}, \quad (2.139)$$

$$\text{где } R_{nk}^P = \frac{c_{nP}}{c_{kP}}, \quad R_{nk}^W = \frac{c_{nW}}{c_{kW}}, \quad R_{nk}^F = \frac{c_{nF}}{c_{kF}}.$$

Подставив соотношения (2.138) и (2.139) в выражение для суммарного потока (2.121) и заменив  $Q_n$  и  $Q_i$  по формулам (2.131), (2.132), получим

$$\sum L = \frac{2}{\varepsilon_0^2} \sum_{j=1}^m \frac{Pc_{jP} \ln R_{nk}^P + Wc_{jW} \ln R_{nk}^W - Fc_{jF} \ln R_{nk}^F}{(M_k - M_n) \left( \frac{M_k + M_n}{2} - M_j \right)}. \quad (2.140)$$

Уравнение (2.130) с учетом (2.134), (2.135) и (2.43) легко преобразуется к виду

$$Pc_{iP} \left( R_{nk}^P \right)^{-d_i} + Wc_{iW} \left( R_{nk}^W \right)^{-d_i} - Fc_{iF} \left( R_{nk}^F \right)^{-d_i} = 0; \quad (2.141)$$

$$d_i = \frac{Q_i}{Q_n}, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq n, k.$$

Уравнения (2.141), связывающие внешние потоки R-каскада и концентрации компонентов в этих потоках, носят названия Н-баланса [13]. Следует иметь в виду, что уравнения (2.141) содержат  $m - 2$  независимых соотношений, так как при  $i = n$  и  $i = k$  они трансформируются в уравнения покомпонентного баланса для  $n$ -го и  $k$ -го компонента. Уравнения (2.141), совместно с уравнениями покомпонентного баланса (2.43) ( $m$  уравнений) и очевидными

соотношениями  $\sum_{j=1}^m c_{jP} = 1$  и  $\sum_{j=1}^m c_{jW} = 1$  образуют систему

$m - 2 + m + 2 = 2m$  независимых алгебраических уравнений, содержащую  $2m + 3$  неизвестных параметра ( $2m$  выходных концентраций:  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$ , потоки  $P, W$  и  $F$ ). Таким образом, проекторочный расчет R-каскада предполагает задание  $(2m + 3) - 2m = 3$

параметров (например,  $c_{iP}$ ,  $c_{iW}$  и  $P$ ), остальные параметры определяются из решения указанной алгебраической системы.

В разделительной практике могут встречаться варианты расчета каскада из заданного числа разделительных элементов, т.е. каскадов с известным суммарным потоком. В этом случае система алгебраических уравнений должна быть дополнена уравнением (2.140), после чего для её решения достаточно задать лишь два параметра (например,  $c_{nP}$  и  $P$ ).

Заметим, что при  $k = n + 1$  получается R-каскад, позволяющий выделять в потоке отбора целевой ( $n$ -й) компонент вместе с компонентами 1-ым, 2-ым, ..., ( $n-1$ )-м и препятствовать появлению в этом потоке компонентов с номерами  $n+1$ ,  $n+2$ , ...,  $m$ .

Рассмотренный частный случай  $Q$ -каскада (R-каскад) при переходе к двухкомпонентной смеси позволяет получить формулы для идеального каскада без смешения концентраций на входах в ступень. Это непосредственно следует из формул (2.134), (2.135). Легко показать, что в этом случае формула для суммарного потока (2.140) также превращается в известную формулу для идеального каскада.

#### 2.3.4.3. Решение системы уравнений каскада с несмешением по относительной концентрации для выбранной пары компонентов методом Б.В.Жигаловского [3]

Рассмотрим некоторую пару компонентов с номерами  $n$  и  $k$  как опорную. Отсчет ступеней будем вести от отборного конца каскада. Для  $k$ -го компонента уравнение обогащения может быть записано в виде

$$\frac{dc_k}{dl} = -c_k \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j + \frac{2P(c_{kP} - c_k)}{L}, \quad (2.142)$$

где  $l = S_p - s$ ,  $S_p$  – число ступеней в отборной секции каскада.

Уравнение (2.142) перепишем в виде

$$\frac{1}{c_k} \frac{dc_k}{dl} = - \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j + \frac{2Pc_{kP}}{Lc_k} - \frac{2P}{L}. \quad (2.143)$$

Аналогично для  $n$ -го компонента имеем

$$\frac{1}{c_n} \frac{dc_n}{dl} = -\sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j + \frac{2Pc_{nP}}{Lc_n} - \frac{2P}{L}. \quad (2.144)$$

Вычитая (2.142) из (2.143) и учитывая, что

$$-\sum_{j=1}^m (\varepsilon_{nj} - \varepsilon_{kj}) c_j = -\sum_{j=1}^m (\varepsilon_{nj} - \varepsilon_{jk}) c_j = \sum_{j=1}^m \varepsilon_{nk} c_j = -\varepsilon_{nk} \sum_{j=1}^m c_j = -\varepsilon_{nk}, \quad (2.145)$$

получим

$$\frac{1}{c_n} \frac{dc_n}{dl} - \frac{1}{c_k} \frac{dc_k}{dl} = -\varepsilon_{nk} + \frac{2P}{L} \left( \frac{c_{nP}}{c_n} - \frac{c_{kP}}{c_k} \right). \quad (2.146)$$

Примем, что величина потока  $L$  равна

$$L = \frac{4P}{\varepsilon_{nk}} \left( \frac{c_{nP}}{c_n} - \frac{c_{kP}}{c_k} \right). \quad (2.147)$$

Подставляя выражение (2.147) в (2.146), получаем

$$\frac{d}{dl} \ln \frac{c_n}{c_k} = -\frac{\varepsilon_{nk}}{2}, \quad (2.148)$$

откуда, учитывая, что  $c_n(0) = c_{nP}$  и  $c_k(0) = c_{kP}$ , следует соотношение

$$\frac{c_n}{c_k} = \frac{c_{nP}}{c_{kP}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_{nk}}{2} l\right) \quad (2.149)$$

или

$$R_{nk} = R_{nk}^P \exp\left(\frac{\varepsilon_{nk}}{2} l\right), \quad (2.150)$$

где  $R_{nk} = \frac{c_n}{c_k}$ ,  $R_{nk}^P = \frac{c_{nP}}{c_{kP}}$ .

Решения (2.149) и (2.150) соответствуют аналогичному решению для двухкомпонентной смеси, разделяемой идеальным каскадом:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_{1P}}{c_{2P}} \exp\left(\frac{\varepsilon_{12}}{2} l\right), \quad (2.151)$$

а соотношение (2.147) является обобщением соотношения для распределения потока в идеальном каскаде:

$$L = \frac{4P}{\varepsilon_{12}} \frac{c_{1P} - c_1}{c_1(1 - c_1)} \quad \text{или} \quad L = \frac{4P}{\varepsilon_{12}} \left( \frac{c_{1P}}{c_1} - \frac{c_{2P}}{c_2} \right), \quad (2.152)$$

где  $c_2 = 1 - c_1$ ,  $c_{2P} = 1 - c_{1P}$ .

Найдем решение уравнения

$$\frac{dc_i}{dl} = -c_i \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j + \frac{2P(c_{iP} - c_i)}{L(c_n, c_k)} \quad (2.153)$$

где  $L(c_n, \tilde{n}_k)$  определяется соотношением (2.146) для прочих компонентов в каскаде с несмещением по  $R_{nk} = \frac{c_n}{c_k}$  ( $i \neq n, k$ ).

Умножая (2.153) на  $c_n$ , а уравнение для  $n$ -го компонента

$$\frac{dc_n}{dl} = -c_n \sum_{j=1}^m \varepsilon_{nj} c_j + \frac{2P(c_{nP} - c_n)}{L(c_n, c_k)} \quad (2.154)$$

на  $c_i$  и вычитая (2.153) из (2.154) с учетом того, что поток  $L(c_n, c_k)$  определяется соотношением (2.147), получаем

$$\frac{d}{dl} \left( \frac{c_i}{c_n} \right) = \varepsilon_{ni} \left( \frac{c_i}{c_n} \right) - \frac{\varepsilon_{nk}}{2} \left( \frac{c_k}{c_n} \right) \frac{c_{iP} / c_{nP} - c_i / c_n}{c_{kP} / c_{nP} - c_k / c_n}. \quad (2.155)$$

Из соотношения (2.149), логарифмируя и дифференцируя, находим

$$dl = \frac{2}{\varepsilon_{nk}} \frac{1}{c_k / c_n} d \left( \frac{c_k}{c_n} \right). \quad (2.156)$$

Используя выражение (2.156), преобразуем уравнение (2.155) к виду

$$\frac{d \left( \frac{c_i c_{nP}}{c_n c_{iP}} \right)}{d \left( \frac{c_k c_{nP}}{c_n c_{kP}} \right)} = 2 \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} \frac{c_i c_{nP} / c_n c_{iP}}{c_k c_{nP} / c_n c_{kP}} - \frac{1 - c_i c_{nP} / c_n c_{iP}}{1 - c_k c_{nP} / c_n c_{kP}}. \quad (2.157)$$

Обозначим отношения

$$c_k c_{nP} / c_n c_{kP} \equiv \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}} = X, \quad c_i c_{nP} / c_n c_{iP} = Y \quad \text{и} \quad 2 \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} = \alpha_i. \quad (2.158)$$

Тогда уравнение (2.157) будет выглядеть следующим образом

$$\frac{dY}{dX} = \left( \frac{\alpha_i}{X} + \frac{1}{1-X} \right) Y - \frac{1}{1-X}. \quad (2.159)$$

Решение уравнения (2.159) с граничным условием  $\lim Y = 1$  при  $X \rightarrow 1$  и  $\alpha_i \neq 1$  имеет вид

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{\alpha_i - 1} \frac{1 - X^{\alpha_i - 1}}{1 - X} \quad (2.160)$$

или

$$R_{ik} = R_{ik}^P \frac{1}{\alpha_i - 1} \cdot \frac{1 - \left( R_{nk}^P / R_{nk} \right)^{\alpha_i - 1}}{1 - R_{nk}^P / R_{nk}}, \quad (2.161)$$

где  $R_{ik} = \frac{c_i}{c_k}$ ,  $R_{ik}^P = \frac{c_{iP}}{c_{kP}}$

Перепишем решение (2.161) в виде

$$\frac{c_i}{c_{iP}} = \frac{c_k}{c_{kP}} \cdot \frac{1}{\alpha_i - 1} \cdot \frac{1 - \left( R_{nk}^P / R_{nk} \right)^{\alpha_i - 1}}{1 - R_{nk}^P / R_{nk}}. \quad (2.162)$$

Поскольку  $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ , то с учетом полученного решения (2.161)

имеем

$$\frac{c_k}{c_{kP}} \cdot \frac{1}{1 - R_{nk}^P / R_{nk}} \sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{\alpha_j - 1} \left[ 1 - \left( R_{nk}^P / R_{nk} \right)^{\alpha_j - 1} \right] = 1. \quad (2.163)$$

Поделив (2.162) на (2.163), получаем

$$c_i = \frac{c_{iP}}{\alpha_i - 1} \left[ 1 - \left( R_{nk}^P / R_{nk} \right)^{\alpha_i - 1} \right] / \sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{\alpha_j - 1} \left[ 1 - \left( R_{nk}^P / R_{nk} \right)^{\alpha_j - 1} \right]. \quad (2.164)$$



Концентрация  $i$ -го компонента  $c_{i,f}$  в сечении каскада, куда подают поток питания, связана с концентрацией этого же компонента в потоке отбора в соответствии с (2.164) следующим соотношением

$$c_{i,f} = \frac{c_{iP}}{\alpha_i - 1} \left[ 1 - \left( \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^f} \right)^{\alpha_i - 1} \right] / \sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{\alpha_j - 1} \left[ 1 - \left( \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^f} \right)^{\alpha_j - 1} \right]. \quad (2.165)$$

Поскольку рассматривается каскад с несмещением по  $R_{nk} = \frac{c_n}{c_k}$

то  $R_{nk}^f = R_{nk}^F$ , где  $R_{nk}^F = \frac{c_n}{c_{kF}}$ , то с учетом (2.150) выражение (2.165)

можно переписать в виде

$$c_{i,f} = \frac{c_{iP}}{\alpha_i - 1} \left[ 1 - \exp \left( \frac{\varepsilon_{nk} (\alpha_i - 1) S_P}{2} \right)^{\alpha_i - 1} \right] / \sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{\alpha_j - 1} \times \left[ 1 - \exp \left( \frac{\varepsilon_{nk} (\alpha_j - 1) S_P}{2} \right)^{\alpha_j - 1} \right]. \quad (2.166)$$

Учтем, что

$$\begin{aligned} \alpha_i - 1 &= 2 \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} - 1 = \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} + \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} - 1 = \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} + \frac{\varepsilon_{ni} - \varepsilon_{nk}}{\varepsilon_{nk}} = \\ &= \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} - \frac{\varepsilon_{in} + \varepsilon_{nk}}{\varepsilon_{nk}} = \frac{\varepsilon_{ni}}{\varepsilon_{nk}} - \frac{\varepsilon_{ik}}{\varepsilon_{nk}} = \frac{\varepsilon_{ni} + \varepsilon_{ki}}{\varepsilon_{nk}} \end{aligned}$$

и введем обозначение

$$Q_i = \frac{\varepsilon_{in} + \varepsilon_{ik}}{2} \equiv - \frac{(\alpha_i - 1) \varepsilon_{nk}}{2}, \quad (2.167)$$

откуда следует, что  $\alpha_i - 1 = - \frac{2Q_i}{\varepsilon_{nk}}$ .

Тогда из выражения (2.166) следует, что при  $i=n$   $Q_n = \frac{\varepsilon_{nk}}{2}$ , а при  $i=k$   $Q_k = -\frac{\varepsilon_{nk}}{2}$ . С учетом обозначений (2.167) уравнение (2.166) запишется

$$c_{i,f} = \frac{c_{iP}}{Q_i} [1 - \exp(-Q_i S_p)] / \sum_{j=1}^m \frac{c_{jP}}{Q_j} [1 - \exp(-Q_j S_p)]. \quad (2.168)$$

Решая (2.168) относительно  $c_{iP}$  и учитывая, что  $\sum_{j=1}^m c_{jP} = 1$ , получаем

$$c_{iP} = \frac{Q_i c_{i,f}}{1 - \exp(-Q_i S_p)} / \sum_{j=1}^m \frac{Q_j c_{j,f}}{1 - \exp(-Q_j S_p)}. \quad (2.169)$$

Выражения (2.161), (2.167) и (2.169) справедливы для той части каскада, которая считается отборной для самого легкого компонента.

Для отвальной секции каскада могут быть получены аналогичные выражения, которые будут иметь следующий вид

$$\frac{c_i}{c_{iW}} = \frac{c_k}{c_{kW}} \cdot \frac{1}{\alpha_i - 1} \cdot \frac{1 - \left( \frac{R_{nk}^W}{R_{nk}} \right)^{\alpha_i - 1}}{1 - \frac{R_{nk}^W}{R_{nk}}}, \quad (2.170)$$

$$c_{i,f} = \frac{c_{iW}}{Q_i} [\exp(Q_i S_W) - 1] / \sum_{j=1}^m \frac{c_{jW}}{Q_j} [\exp(Q_j S_p) - 1], \quad (2.171)$$

$$c_{iW} = \frac{Q_i c_{i,f}}{\exp(Q_i S_W) - 1} / \sum_{j=1}^m \frac{Q_j c_{j,f}}{\exp(Q_j S_W) - 1}, \quad (2.172)$$

где  $S_W$  – число ступеней в отвальной части каскада.

Выражения, связывающие концентрации компонентов в потоках отбора и отвала с концентрациями компонентов в потоке питания  $c_{iF}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) можно найти, если воспользоваться условиями неразрывности концентраций компонентов в точке подачи питания.

Считая, что  $c_{i,f}^+ = c_{i,f}^-$ , где индексы + и - означают, что соответствующие величины взяты из решений для отборной и отвальной частей каскада, и, раскрывая это равенство с помощью соотношений (2.162) и (2.170), получим

$$\frac{c_{iP} \frac{c_{k,f}}{c_{kP}} \cdot 1 - \left( \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^f} \right)^{\alpha_i - 1}}{\alpha_i - 1} = \frac{c_{iW} \frac{c_{k,f}}{c_{kW}} \cdot 1 - \left( \frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^f} \right)^{\alpha_i - 1}}{\alpha_i - 1}, \quad (2.173)$$

где  $R_{nk}^f = \frac{c_{n,f}}{c_{k,f}}$ .

Выражение (2.173) легко приводится к виду

$$\frac{4Pc_{iP} \left[ 1 - \left( \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^f} \right)^{\alpha_i - 1} \right]}{\frac{4P}{\varepsilon_{nk}} \left( \frac{c_{nP}}{c_{n,f}} - \frac{c_{kP}}{c_{k,f}} \right)} = - \frac{4Wc_{iW} \left[ 1 - \left( \frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^f} \right)^{\alpha_i - 1} \right]}{\frac{4W}{\varepsilon_{nk}} \left( \frac{c_{nW}}{c_{n,f}} - \frac{c_{kW}}{c_{k,f}} \right)}. \quad (2.174)$$

Нетрудно убедиться, что в знаменателях (2.174) стоят выражения для «головного» потока каскада  $L_f$ , то есть

$$L_f = \frac{4P}{\varepsilon_{nk}} \left( \frac{c_{nP}}{c_{n,f}} - \frac{c_{kP}}{c_{k,f}} \right) = \frac{4W}{\varepsilon_{nk}} \left( \frac{c_{nW}}{c_{n,f}} - \frac{c_{kW}}{c_{k,f}} \right). \quad (2.175)$$

Учитывая выражение (2.175) и условие несмещения по относительной концентрации  $R_{nk}$  в точке подачи питания ( $R_{nk}^f = R_{nk}^F$ ), из (2.174) имеем

$$Pc_{iP} \left[ 1 - \left( \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F} \right)^{\alpha_i - 1} \right] = Wc_{iW} \left[ \left( \frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F} \right)^{\alpha_i - 1} - 1 \right]. \quad (2.176)$$

Воспользовавшись условием покомпонентного баланса  $Pc_{iP} + Wc_{iW} = Fc_{iF}$ , находим

$$Pc_{iP} = Fc_{iF} \frac{1 - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1}}{\left(\frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1} - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1}}. \quad (2.177)$$

Поскольку  $\sum_{j=1}^m Pc_j = P$ , то

$$c_{iP} = c_{iF} \frac{1 - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1}}{\left(\frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1} - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1}} \bigg/ \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_j - 1}}{\left(\frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_j - 1} - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_j - 1}} \quad (2.178)$$

Аналогично для концентраций в отвале имеем

$$c_{iW} = c_{iF} \frac{1 - \left(\frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1}}{\left(\frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1} - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_i - 1}} \bigg/ \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - \left(\frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_j - 1}}{\left(\frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_j - 1} - \left(\frac{R_{nk}^W}{R_{nk}^F}\right)^{\alpha_j - 1}}. \quad (2.179)$$

Учитывая,

что

$$R_{nk}^P / R_{nk}^F = \exp\left(\frac{\varepsilon_{nk} S_P}{2}\right), \quad R_{nk}^W / R_{nk}^F = \exp\left(-\frac{\varepsilon_{nk} S_W}{2}\right),$$

а также используя обозначения (2.167), выражения (2.178) и (2.179) можно представить в виде

$$c_{iP} = c_{iF} \frac{\exp(Q_i S_W) - 1}{\exp(Q_i S_W) - \exp(-Q_i S_W)} \bigg/ \sum_{j=1}^m c_{jF} \times \frac{\exp(Q_j S_W) - 1}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_W)}, \quad (2.180)$$

$$c_{iW} = c_{iF} \frac{1 - \exp(Q_i S_P)}{\exp(Q_i S_W) - \exp(-Q_i S_P)} / \sum_{j=1}^m c_{jF} \times$$

$$\times \frac{\exp(Q_j S_P) - 1}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_P)} \quad (2.181)$$

Выражения (2.180), (2.181) совпадают с соответствующими формулами (2.107), (2.108), полученными для  $Q$ -каскада [12]. Действительно, каскад с несмещением по относительной концентрации

$R_{nk} = \frac{c_n}{c_k}$  для выбранной пары компонентов  $n$  и  $k$  является частным случаем «свободного» каскада, когда константы  $Q_i$  задаются в виде (2.132).

В отдельных случаях может оказаться, что в каскаде с несмещением по относительной концентрации  $R_{nk}$  для одного из компонентов, например, с номером  $t$  оказывается, что  $\alpha_t = 1$ , то есть  $2\varepsilon_{nt} = \varepsilon_{nk}$  и, соответственно,  $Q_t = 0$ .

В этом случае предельный переход приводит к следующим результатам

$$\lim_{Q_t \rightarrow 0} \frac{\exp(Q_t S_W) - 1}{\exp(Q_t S_W) - \exp(-Q_t S_P)} = \frac{S_W}{S_P + S_W},$$

$$\lim_{Q_t \rightarrow 0} \frac{1 - \exp(-Q_t S_P)}{\exp(Q_t S_W) - \exp(-Q_t S_P)} = \frac{S_P}{S_P + S_W}$$

и, следовательно, соотношения (2.180), (2.181) могут быть переписаны в виде

для  $i \neq t$ :

$$c_{iP} = c_{iF} \frac{\exp(Q_i S_W) - 1}{\exp(Q_i S_W) - \exp(-Q_i S_P)} / \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m c_{jF} \times$$

$$\times \frac{\exp(Q_j S_W) - 1}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_P)} + c_{iF} \frac{S_W}{S_P + S_W},$$
(2.183)

$$c_{iW} = c_{iF} \frac{1 - \exp(-Q_i S_P)}{\exp(Q_i S_W) - \exp(-Q_i S_P)} / \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m c_{jF} \times$$

$$\times \frac{1 - \exp(-Q_j S_P)}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_P)} + c_{iF} \frac{S_P}{S_P + S_W},$$
(2.184)

для  $i = t$  :

$$c_{tP} = c_{tF} \frac{S_W}{S_P + S_W} / \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{\exp(Q_j S_W) - 1}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_P)} +$$

$$+ c_{tF} \frac{S_W}{S_P + S_W},$$
(2.185)

$$c_{tW} = c_{tF} \frac{S_P}{S_P + S_W} / \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - \exp(-Q_j S_P)}{\exp(Q_j S_W) - \exp(-Q_j S_P)} +$$

$$+ c_{tF} \frac{S_P}{S_P + S_W}.$$
(2.186)

Рассмотрим теперь решение системы (2.141), когда компоненты с номерами  $n$  и  $k$  являются основными, а остальные примесными (минорными) [3, 14], т.е.  $c_n + c_k \approx 1$ ,  $c_i \ll c_n, c_k$  при  $i \neq n, k$ . Обозначив  $c_n = c$ ,  $c_k = 1 - c$ , для концентрации  $c$  получим уравнение

$$\frac{dc}{dl} = -\varepsilon_{nk} c(1-c) - c \sum_{j \neq n, k} \varepsilon_{nj} c_j + \frac{2P(c_P - c)}{L}. \quad (2.187)$$

Так как  $c_i \ll c_n, c_k$  и  $\varepsilon_{nj}$  порядка  $\varepsilon_{nk}$ , уравнение (2.187) можно переписать, опуская члены второго порядка малости,

$$\frac{dc}{dl} = -\varepsilon_{nk}c(1-c) + \frac{2P(c_p - c)}{L}. \quad (2.188)$$

Уравнение (2.188) является обычным уравнением разделения 2-компонентой смеси. Для примесных (минорных) компонентов, учитывая условие  $c_n + c_k \approx 1$ , можно записать

$$\frac{dc_i}{dl} = -c_i\varepsilon_{in}c - c_i\varepsilon_{ik}(1-c) + \frac{2P(c_{ip} - c_i)}{L}. \quad (2.189)$$

Рассмотрим каскад с несмещением по относительной концентрации  $R_{nk} = \frac{c_n}{c_k} = \frac{c}{1-c}$ . В этом случае

$$L = \frac{4P(c_p - c)}{\varepsilon_{nk}c(1-c)} \quad (2.190)$$

и

$$\frac{dc_i}{dl} = -\frac{\varepsilon_{nk}}{2}c(1-c). \quad (2.191)$$

В уравнении (2.189) перейдем от независимой переменной  $l$  к переменной  $c$ , полагая

$$\frac{dc_i}{dl} = \frac{dc_i}{dc} \frac{dc}{dl}. \quad (2.192)$$

Учитывая (2.190) и (2.191), из (2.192) и (2.189) получаем

$$\frac{dc_i}{dc} - \frac{2c_{i,p}}{\varepsilon_{nk}} \left[ \frac{\varepsilon_{in}}{1-c} + \frac{\varepsilon_{ik}}{c} + \frac{\varepsilon_{nk}}{2(c_p - c)} \right] = -\frac{c_{i,p}}{c_p - c}. \quad (2.193)$$

Решение линейного уравнения (2.193) с очевидным граничным условием  $c_i(c) \Big|_{c=c_p} = c_{i,p}$  имеет вид

$$c_i = c_{i,p} \frac{c(1-c)}{\lambda_i(c_p - c)} \left[ R^{-d_i} - R_p^{-d_i} \right], \quad (2.194)$$

$$\text{где } R = \frac{c}{1-c}, \quad R_P = \frac{c_P}{1-c_P}, \quad Q_i = \frac{\varepsilon_{in} + \varepsilon_{ik}}{2}, \quad Q_n = \frac{\varepsilon_{nk}}{2}.$$

Уравнения для отвальной части каскада имеют тот же вид, что и уравнения (2.189), (2.193), но вместо концентраций  $c_{iP}$  в них входит концентрация примесных (минорных) изотопов в потоке отвала  $c_{iW}$ , а вместо потока отбора  $P$  – поток отвала  $W$ . При этом решение уравнения для отвальной части каскада с граничным условием  $c_i(c)|_{c=c_W} = c_{iW}$  имеет вид

$$c_i = c_{iW} \frac{c(1-c)}{\lambda_i(c-c_W)} \left[ R_W^{-d_i} - R^{-d_i} \right], \quad (2.195)$$

$$\text{где } R = \frac{c_W}{1-c_W}.$$

При сделанных предположениях можно считать, что в точке подачи питания  $c = c_F$ . Пользуясь условием неразрывности концентраций в точке подачи питания  $c_i(c)|_{c=c_F}^{\text{отбора}} = c_i(c)|_{c=c_F}^{\text{отвала}}$ , подставляя в (2.194) и (2.195) вместо  $c$  концентрацию  $c_F$  и разделив (2.194) на (2.195), получим

$$1 = \frac{c_{iP}}{c_{iW}} \frac{c_F - c_W}{c_P - c_F} \cdot \frac{R_F^{-d_i} - R_P^{-d_i}}{R_W^{-d_i} - R_F^{-d_i}}, \quad (2.196)$$

$$\text{где } R_F = \frac{c_F}{1-c_F}.$$

Из соотношения (2.196) получаем выражение, связывающее концентрации минорных изотопов в потоке отвала и отбора

$$c_{iW} = c_{iP} \frac{c_F - c_W}{c_P - c_F} \frac{R_F^{-d_i} - R_P^{-d_i}}{R_W^{-d_i} - R_F^{-d_i}}. \quad (2.197)$$

Подставляя соотношение (2.196) в уравнение баланса

$$c_{iF} = \frac{c_P - c_F}{c_F - c_W} c_{i,P} + \frac{c_P - c_W}{c_F - c_W} c_{iW}, \quad (2.198)$$

где  $c_{iF}$ ,  $i \neq n, k$  – концентрация  $i$ -го примесного изотопа в потоке питания, можно получить выражения для расчета концентрации



примесных изотопов в потоках отбора и отвала в зависимости от их содержания в потоке питания и концентрации основных компонентов в потоках отбора, отвала и питания

$$c_{iP} = c_{iF} \frac{c_P - c_W}{c_F - c_W} \frac{R_W^{-d_i} - R_F^{-d_i}}{R_W^{-d_i} - R_P^{-d_i}},$$

$$c_{iW} = c_{iF} \frac{c_P - c_W}{c_P - c_F} \frac{R_F^{-d_i} - R_P^{-d_i}}{R_W^{-d_i} - R_F^{-d_i}}.$$
(2.199)

Формула (2.199) могут быть использованы для предварительной оценки содержания примесных изотопов в отбираемых из каскада потоках, исходя из заданных величин внешних потоков (подаваемых и отбираемых) и содержания в них основного (целевого) компонента, например, изотопа  $^{235}\text{U}$  при обогащении урана, а также содержания примесных изотопов в подаваемом потоке.

#### 2.3.4.4. Расчет R-каскада с дополнительным потоком отбора [3, 15]

Задачи разделения многокомпонентных смесей в R-каскадах, как правило, связаны с определенными практическими соображениями. Так, например, практическая польза от результатов расчета каскада для разделения многокомпонентных изотопных смесей с несколькими отборами связана с тем обстоятельством, что распределения концентраций компонентов с промежуточными массами имеют максимальные значения внутри каскада и, следовательно, существует возможность получить в дополнительном отборе концентрацию промежуточного компонента, большую, чем в потоке основного отбора на концах каскада.

Рассмотрим для определенности каскад произвольного профиля. В некоторых точках каскада производится отбор смеси или подача питания. Будем считать, что каскад состоит из конечного числа участков непрерывного профиля. В точках разрыва профиля, а также в точках отбора смеси и подачи питания происходит разрыв параметров каскада. Назовем часть каскада, заключенную между двумя соседними точками разрыва параметров, секцией. Обозначим  $B$  полное число секций в каскаде и  $b$  – порядковый номер сек-

ции. Каждая секция состоит из  $S_b$  последовательно соединенных разделительных ступеней.

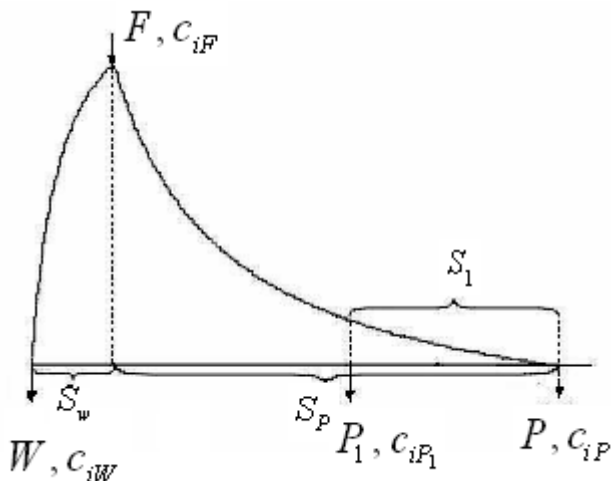


Рис. 2.8. Принципиальная схема  $R$ -каскада с дополнительным отбором

Нумерацию секций и ступеней в секции ( $0 \leq s \leq S_b$ ) будем вести в направлении от «легкого» конца каскада (основного отбора) к «тяжелому» концу (отвалу). Обобщая для рассматриваемого случая соотношение (2.95), можно написать:

$$L^b(s)C_i(s) = \frac{L^b(0)C_i^b(0) + 2 \sum_{r=1}^b [P_r C_i^r(0) - F_r \bar{C}_i^r(0)] \int_0^s \phi_i(t) dt}{\phi_i(s)}, \quad (2.200)$$

$$i = 1, \dots, m,$$

где  $P_r$  и  $F_r$  – потоки отбора и питания соответственно в начале секции  $r$ ;  $C_i^r(0)$  – концентрация  $i$ -го компонента в соответствующей точке отбора;  $\bar{C}_i^r(0)$  – концентрация  $i$ -го компонента в соответствующей точке питания.

Конкретизируем систему (2.200) для частного случая каскада с двумя точками отбора и характеристической функцией  $\varphi_i = \exp(Q_i s)$  (рис. 2.8).

Считая, что поток  $L(s)$  непрерывен по каскаду, а на его концах обращается в нуль, и используя (2.200), получаем:

$$L_{P_1} C_{iP_1} = 2PC_{iP} \frac{1 - \exp(-Q_i S_1)}{Q_i}, \quad (2.201)$$

$$L_f C_{i,f} = 2PC_{iP} \frac{1 - \exp(-Q_i S_1)}{Q_i} + 2P_1 C_{iP_1} \frac{1 - \exp[-Q_i (S_P - S_1)]}{Q_i}, \quad (2.202)$$

$$L_f C_{i,f} = 2WC_{iW} \frac{\exp(Q_i S_W) - 1}{Q_i}, \quad (2.203)$$

где  $P, W, P_1$  – потоки основного отбора, отвала и дополнительного отбора, соответственно;  $C_{iP}, C_{iW}, C_{iP_1}$  – концентрации  $i$ -го компонента в этих потоках;  $L_f, C_{i,f}$  – поток и концентрации  $i$ -го компонента в сечении ввода питания;  $S_P, S_W$  – числа ступеней в отборной и отвальной частях каскада;  $S_1$  – число ступеней между точками дополнительного и основного отборов.

Пусть в каскаде имеет место несмещение относительных концентраций  $R_{n,n+1} = \frac{C_n}{C_{n+1}}$ , т.е. каскад «идеальный» по компонентам с номерами  $n$  и  $n+1$ .

Тогда

$$\frac{R_{n,n+1}^P}{R_{n,n+1}^{P_1}} = \exp(Q_n S_1), \quad (2.204)$$

$$\frac{R_{n,n+1}^P}{R_{n,n+1}^F} = \exp(Q_n S_P), \quad (2.205)$$

$$\frac{R_{n,n+1}^W}{R_{n,n+1}^F} = \exp(-Q_n S_W). \quad (2.206)$$

Комбинируя соотношения (2.202), (2.203) с учетом (2.206) и уравнений баланса

$$\frac{F}{P} = \frac{P_1}{P} + \frac{W}{P} + 1, \quad (2.207)$$

$$\frac{F}{P} C_{iF} = \frac{P_1}{P} C_{iP_1} + \frac{W}{P} C_{iW} + C_{iP}, \quad (2.208)$$

$$i = 1, \dots, m,$$

получим

$$\begin{aligned} & C_{iP} (R_{n,n+1}^P)^{-d_i} + \frac{P_1}{P} C_{iP_1} (R_{n,n+1}^{P_1})^{-d_i} + \\ & + \frac{W}{P} C_{iW} (R_{n,n+1}^W)^{-d_i} - \frac{F}{P} C_{iF} (R_{n,n+1}^F)^{-d_i}, \end{aligned} \quad (2.209)$$

$$i \neq n, n+1.$$

Величины внешних потоков с помощью уравнений (2.207), (2.208) могут быть выражены через концентрации целевого компонента в них и отношение  $\frac{P_1}{P}$ :

$$\frac{F}{P} = \frac{c_{nP} - c_{nW}}{c_{nF} - c_{nW}} - \frac{c_{nP_1} - c_{nW}}{c_{nF} - c_{nW}} \cdot \frac{P_1}{P}, \quad (2.210)$$

$$\frac{W}{P} = \frac{F}{P} - \frac{P_1}{P} - 1. \quad (2.211)$$

Решая систему уравнений (2.208) – (2.209) относительно концентраций  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$  с учетом уравнений (2.210) и (2.211) и условия

$$\sum_{j=1}^m c_j = 1, \text{ находим}$$

$$\begin{aligned}
& c_{iF} \left[ \left( R_{n,n+1}^W \right)^{-d_i} - \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_i} \right] / \left\{ \left[ \left( R_{n,n+1}^W \right)^{-d_i} - \left( R_{n,n+1}^P \right)^{-d_i} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{P_1 c_{iP_1}}{P c_{iP}} \left[ \left( R_{n,n+1}^W \right)^{-d_i} - \left( R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{-d_i} \right] \right\} \\
c_{iP} = & \frac{\sum_{j=1}^m c_{jF} \left[ \left( R_{n,n+1}^W \right)^{-d_j} - \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_j} \right] / \left\{ \left[ \left( R_{n,n+1}^W \right)^{-d_j} - \left( R_{n,n+1}^P \right)^{-d_j} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{P_1 c_{jP_1}}{P c_{jP}} \left[ \left( R_{n,n+1}^W \right)^{-d_j} - \left( R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{-d_j} \right] \right\}}
\end{aligned} \tag{2.212}$$

$$\begin{aligned}
& c_{iF} \left\{ \left[ \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_i} - \left( R_{n,n+1}^P \right)^{-d_i} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{P_1 c_{iP_1}}{P c_{iP}} \left[ \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_i} - \left( R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{-d_i} \right] \right\} / \{ \dots \} \\
c_{iW} = & \frac{\left\{ \left[ \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_i} - \left( R_{n,n+1}^P \right)^{-d_i} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{P_1 c_{iP_1}}{P c_{iP}} \left[ \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_i} - \left( R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{-d_i} \right] \right\} / \{ \dots \}}{\sum_{j=1}^m c_{jF} \left\{ \left[ \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_j} - \left( R_{n,n+1}^P \right)^{-d_j} \right] + \right. \\
& \left. + \frac{P_1 c_{jP_1}}{P c_{jP}} \left[ \left( R_{n,n+1}^F \right)^{-d_j} - \left( R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{-d_j} \right] \right\} / \{ \dots \}}
\end{aligned} \tag{2.213}$$

где выражения в фигурных скобках  $\{ \dots \}$  те же, что и в формуле (2.212).

Из уравнения (2.201) с использованием соотношений (2.204) нетрудно получить

$$\frac{C_{iP_1}}{C_{iP}} = \frac{C_{nP_1}}{C_{nP}} \frac{Q_n}{Q_i} \frac{\left( R_{n,n+1}^P \right)^{d_i} - \left( R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{d_i}}{R_{n,n+1}^P - R_{n,n+1}^{P_1}} \left( R_{n,n+1}^P \right)^{1-d_i}. \tag{2.214}$$

Кроме того, суммируя уравнение (2.201) по всем компонентам и разделив (2.201) почленно на результат суммирования, с учетом (2.204) находим

$$c_{iP_1} = c_{iP} \frac{1 - \left( R_{n,n+1}^P / R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{-d_i}}{Q_i} / \sum_{j=1}^m c_{jP} \frac{1 - \left( R_{n,n+1}^P / R_{n,n+1}^{P_1} \right)^{-d_j}}{Q_i} \tag{2.215}$$

Таким образом, задавая значения концентраций целевого компонента в основном  $c_{nP}$  и дополнительном потоках отбора  $c_{nP1}$ , в потоке отвала  $c_{nW}$  (концентрации  $c_{iF}$  считаем заданными), а также отношение потоков  $P_1/P$  и, решая систему уравнений (2.212), (2.213), (2.215) для  $i=n$ , находим величины относительных концентраций  $R_{n,n+1}^P$ ,  $R_{n,n+1}^{P1}$ ,  $R_{n,n+1}^W$ , рассматривая их как параметры задачи. После определения этих параметров по соотношениям (2.212) – (2.215) рассчитывают концентрации остальных компонентов в отводимых из каскада потоках, а по соотношениям (2.206) длины отборной  $S_P$  и отвальной  $S_W$  секций каскада, а также длину участка каскада между двумя потоками отбора  $s_1$ .

Алгоритм расчета каскада на заданные концентрации ключевого компонента  $c_{nP}$ ,  $c_{nP1}$  и  $c_{nW}$  с использованием уравнений (2.212) – (2.214) выглядит следующим образом.

1. Задают значения концентраций ключевого компонента в отводимых из каскада потоках  $c_{nP}$ ,  $c_{nP1}$  и  $c_{nW}$ , а также отношение потоков отбора  $P_1/P$ .

2. Задают начальные приближения для относительных концентраций  $R_{n,n+1}^P$ ,  $R_{n,n+1}^{P1}$ ,  $R_{n,n+1}^W$ .

3. С использованием уравнений (2.212) – (2.215) рассчитывают текущие значения концентраций  $c_{nP(\text{расч.})}$ ,  $c_{nP1(\text{расч.})}$  и  $c_{nW(\text{расч.})}$ .

4. Определяют величины невязок концентраций

$$\delta_P = c_{nP} - c_{nP(\text{расч.})}; \quad \delta_{P1} = c_{nP1} - c_{nP1(\text{расч.})}; \quad \delta_W = c_{nW} - c_{nW(\text{расч.})}.$$

Расчет заканчивается по достижению заданной точности по величине невязок. В противном случае относительным концентрациям по тому или иному алгоритму дают приращения и повторяют расчет по пунктам 3 и 4.

В качестве примера приведем результаты расчета каскада с дополнительным отбором для разделения пятикомпонентной смеси изотопов вольфрама природного состава, приведенного в табл. 2.4.

Ключевым компонентом выбран изотоп вольфрама с промежуточной атомной массой  $^{183}\text{W}$ . Нумерация компонентов проведена от «легкого» к «тяжелому» концу спектра масс изотопов, так что це-

левым является изотоп с номером  $n=3$  ( $c_{nF} = 14,3\%$ ). Решение системы уравнений выполнено методом Ньютона [16]. При решении системы (2.212) – (2.215) в качестве начальных приближений для относительных концентраций  $R_{n,n+1}^P$ ,  $R_{n,n+1}^{P1}$ ,  $R_{n,n+1}^W$  взяты их значения, полученные из расчета каскада без дополнительного потока отбора ( $P_1=0$ ), причем значение  $R_{n,n+1}^{P1}$  было выбрано в области максимума ключевого компонента.

Таблица 2.4

Природный состав изотопов вольфрама

| Номер компонента           | 1         | 2         | 3         | 4         | 5         |
|----------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Изотоп                     | $^{180}W$ | $^{182}W$ | $^{183}W$ | $^{184}W$ | $^{186}W$ |
| Концентрация, $c_{iF}$ , % | 0,13      | 26,30     | 14,27     | 30,70     | 28,60     |

При расчете каскада с дополнительным отбором на получение заданных концентраций  $c_{3P} = 32\%$ ,  $c_{3P_1} = 43\%$  параметром задачи являлось отношение потоков отбора  $P_1/P$ , которое варьировалось в диапазоне от 0 до 1.

Результаты расчета в виде зависимостей  $W/P$ ,  $\epsilon_0 S_P$ ,  $\epsilon_0 S_1$  и  $\epsilon_0 S_W$  ( $\epsilon_0$  – коэффициент обогащения, приходящийся на единицу разности массовых чисел) от величины параметра  $P_1/P$  представлены в табл. 2.5.

Результаты расчета показывают возможность включением дополнительного отбора получить изотопный продукт с большим обогащением по ключевому компоненту, чем в конечном отборе каскада. Величина дополнительного отбора зависит от концентрации в нем ключевого изотопа, а также от состава исходной разделяемой смеси и концентрации ключевого компонента в основном отборе  $P$ . В рассмотренном случае величина дополнительного отбора достигала  $\sim 20\%$  величины основного отбора при относительном увеличении величины концентрации целевого изотопа в нем по сравнению  $c_{3P}$  более чем на  $30\%$ .

Таблица 2.5

Параметры  $R$ -каскада с дополнительным потоком отбора для разделения изотопов вольфрама  $c_{3P} = 32\%$ ,  $c_{3P_1} = 43\%$ ,  $c_{3W} = 1,2\%$

|                     |       |       |       |       |       |       |        |        |        |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|--------|--------|
| $P_1/P$             | 0,042 | 0,060 | 0,080 | 0,100 | 0,120 | 0,160 | 0,200  | 0,204  | 0,208  |
| $W/P$               | 1,449 | 1,487 | 1,531 | 1,575 | 1,619 | 1,707 | 1,795  | 1,805  | 1,814  |
| $\varepsilon_0 S_P$ | 5,764 | 6,008 | 6,368 | 6,776 | 7,251 | 8,590 | 12,332 | 13,654 | 22,879 |
| $\varepsilon_0 S_W$ | 2,331 | 1,732 | 1,551 | 1,439 | 1,358 | 1,246 | 1,168  | 1,162  | 1,155  |
| $\varepsilon_0 s_1$ | 5,912 | 5,917 | 5,925 | 5,933 | 5,941 | 5,955 | 5,967  | 5,971  | 5,973  |

Анализ результатов показывает также, что увеличение относительного отбора приводит к увеличению числа ступеней в каскаде и суммарного потока. Важно отметить, что отношение  $P/P_1$  ограничено сверху. Существование предельной величины  $P/P_1$  объясняется тем, заданная концентрация ключевого компонента не может быть достигнута ни в одном сечении каскада.

#### 2.3.4.5. Аппроксимация каскадов непрерывного профиля прямоугольно-секционированным каскадом

Проектировочный расчет прямоугольно-секционированного каскада по заданному отбору и ограничениям диапазона концентраций целевого изотопа в потоках отбора и отвала заключается в определении следующих его параметров: число, длина и потоки секций, отношение потоков отвала и отбора  $W/P$ . При этом, как правило, значения параметров должны соответствовать значениям, оптимальным по тому или иному критерию. Использование методов непосредственного расчета целевых каскадов для концентрирования заданного компонента представляется неэффективным, поскольку концентрации компонентов в отборе многокомпонентного каскада существенно зависят от распределения потоков, вследствие чего профиль целевого каскада предугадать невозможно.



но. Поэтому проектировочные расчеты целесообразно проводить на основе модельного каскада непрерывного профиля.

До настоящего времени вопрос о модельном каскаде, обеспечивающем в случае «слабого» разделения условие  $\sum L = \min$ , остается открытым. На практике в качестве модельного каскада непрерывного профиля удобно использовать рассмотренный ранее  $Q$ -каскад («свободный» каскад), с помощью которого сравнительно просто решается вопрос о концентрировании промежуточных компонентов.

Принципиальная возможность замены  $Q$ -каскада каскадом из секций постоянной ширины впервые была продемонстрирована в работе [12]. В [17] предлагается один из возможных критериев аппроксимации и разрабатывается методика расчета ПСК, распределение концентраций в котором наиболее близко к распределению концентраций в модельном  $Q$ -каскаде. Задача о замене участка  $Q$ -каскада, работающего в диапазоне концентраций от  $c_{i,\text{нач}}$  до  $c_{i,\text{кон}}$  ( $i = 1, \dots, m$  где  $m$  – число компонентов смеси), секцией постоянной ширины сформулирована следующим образом [17]: найти такие значения потока  $L$  и числа ступеней  $S$  в секции, при которых отклонения полученных в результате расчета концентраций в конце прямоугольной секции  $c_i$  от заданных значений  $c_{i,\text{кон}}$  минимальны. При этом предполагается, что концентрации в начале секции и в отборе каскада  $c_{iP}$  совпадают с соответствующими концентрациями  $Q$ -каскада. В качестве критерия аппроксимации удобно использовать сумму относительных отклонений концентраций компонентов в конце секции

$$\phi = \sum_{i=1}^m \left| \frac{c_{i,\text{кон}} - c_i}{c_{i,\text{кон}}} \right| \quad (2.216)$$

Расчет отдельных секций наиболее целесообразно проводить методом непосредственного интегрирования системы (2.63) – (2.64). Если считать, что концентрации в начале секции заданы

$$c_i(0) = c_{i,\text{нач}}, \quad i = 1, \dots, m-1 \quad (2.217)$$

то расчет секции сводится к решению уравнений (2.63)-(2.64), т.е. с начальными условиями (2.217), т.е. к обычной задаче Коши. Поскольку значения концентраций в каждой точке секции при известных концентрациях в потоке отбора  $c_{iP}$  и отвала  $c_{iW}$  зависят от координаты  $s$ , отсчитываемой от начала секции, и потока секции  $L$ , задача сводится к поиску таких значений  $s$  и  $L$ , при которых функция (2.216) минимальна. На рис. 2.9 представлены зависимости относительных отношений концентраций  $\frac{c_{i,кон} - c_{i,нач}}{c_{i,кон}}$  и

функции (2.216) от приведенного потока  $\varepsilon_0 L / 2P$  в каскаде постоянной ширины, аппроксимирующего  $Q$ -каскад, для шестикомпонентной смеси изотопов криптона. Из рисунка видно, что в точке, соответствующей минимуму функции (2.216), относительные отношения концентрации малы и не превышают 3%.

Таким образом, критерий (2.216) позволяет с определенной точностью рассчитать ПСК, в котором распределения концентраций компонентов близки к их распределению  $Q$ -каскаде. Однако этот ПСК в общем случае не оптимален по значению суммарного потока, являющегося одним из основных критериев оценки эффективности каскада, несмотря на то, что в критерии (2.216) использованы концентрации в соответствующих сечениях оптимального  $Q$ -каскада.

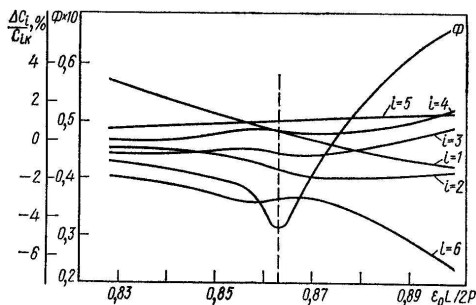


Рис. 2.9. Зависимость относительных отклонений концентраций и функции невязки (2.216) от приведенного потока  $\varepsilon_0 L / P$  [17]

На рис. 2.10 представлены профили потока и распределения концентраций компонентов для двух прямоугольных каскадов, заменяющих  $Q$ -каскад, оптимальный в отношении суммарного потока. Оптимизация  $Q$ -каскада сводится к нахождению параметра  $M$  (формула (2.113)), соответствующего минимальному значению суммарного потока в каскаде. Параметры одного из каскадов выбраны в соответствии с минимумом функции (2.216), а второго – в результате оптимизации суммарного потока. Расчеты проведены для случая разделения трехкомпонентной модельной смеси с концентрациями в потоке питания  $c_{1F} = 0,2$ ;  $c_{2F} = 0,3$ ;  $c_{3F} = 0,5$ . Задача оптимизации имеет следующую формулировку: определить параметры каскада с заданным отбором и концентрациями целевого компонента в потоке отбора из области допустимых значений (формулы (2.115) – (2.120)), соответствующих минимуму суммарного потока.

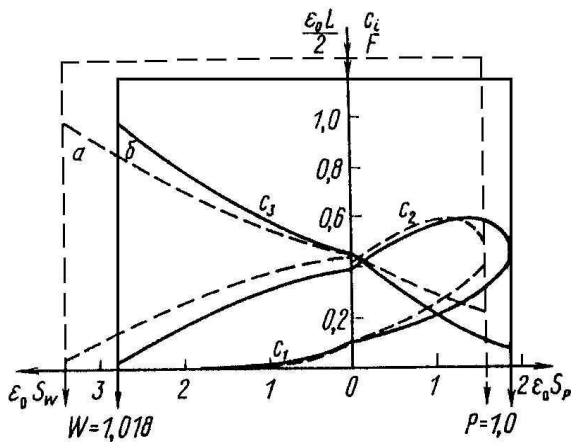


Рис. 2.10. Распределение концентраций компонентов модельной трехкомпонентной смеси в каскаде прямоугольного профиля: а) – получено в результате аппроксимации  $Q$ -каскада по критерию (2.216); б) – оптимальное [18]

Из зависимостей, приведенных на рис. 2.10, следует, что аппроксимация по критерию (2.216) не решает основной задачи – получить оптимальный ПСК на основе оптимального  $Q$ -каскада, так как суммарный поток, профиль и распределения концентраций в ПСК, полученных при аппроксимации, не совпадают с оптимальными. Так, в данном случае отклонение суммарного потока от его минимального значения составляет  $\sim 10\%$ , а для смесей другого состава оно может быть и больше.

В работе [18] предложена методика аппроксимационного расчета ПСК и одновременной его оптимизации по какому-либо критерию. Методика основана на использовании целевой функции оптимизации, учитывающей как критерий оптимальности, так и сумму отклонений компонентов на стыке обогатительной (отборной) и обеднительной (отвальной) частей. В случае, когда в качестве критерия оптимальности выбран суммарный поток, целевая функция имеет вид

$$\phi = K_1 \sum |c_{if}^P - c_{if}^W| + K_2 \frac{\sum L_{\text{ПСК}}}{\sum L_Q} \quad (2.218)$$

где  $c_{i,f}^P$ ,  $c_{i,f}^W$  ( $i = 1, \dots, m$ ) – концентрации в точке подачи питания, полученные в результате интегрирования системы (2.63)–(2.64) по длине обогатительной (отборной) и обеднительной (отвальной) частей по направлению от концов каскада к точке подачи питания.  $\sum L_{\text{ПСК}}$ ,  $\sum L_Q$  – суммарные потоки аппроксимирующего ПСК и  $Q$ -каскада соответственно. Целевую аппроксимацию осуществляют в процессе оптимизационного поиска параметров каскада, при которых значение функции  $\phi$  минимально. На каждом этапе оптимизации проводят только интегрирование системы (2.63) – (2.64) с граничными условиями

$$c_{iP} = c_{iP}^O, \quad c_{iW} = c_{iW}^O, \quad i = 1, \dots, m, \quad (2.219)$$

где  $c_{iP}^O$ ,  $c_{iW}^O$  – концентрации на концах аппроксимируемого  $Q$ -каскада.

Первый член функции (2.218) определяет точность расчета ПСК, соответствующего оптимальному  $Q$ -каскаду и имеющего те

же концентрации компонентов на концах. Второй член характеризует степень приближения ПСК к оптимальному по суммарному потоку  $Q$ -каскаду и является величиной обратной КПД\* формы  $\eta_\phi$ . Следует отметить, что вместо КПД формы можно использовать отношение длин ПСК и  $Q$ -каскада или какой-либо другой критерий.

Для повышения точности расчета необходимо, чтобы члены функции (2.218) были одного порядка. С этой целью введены нормирующие коэффициенты  $K_1$  и  $K_2$ . Их соотношения зависят от числа компонентов, состава исходной смеси, значения ключевого компонента в исходной смеси и значения его обогащения. Для определения диапазона изменения отношения  $K_2/K_1$  в работе [18] исследовали зависимости концентраций компонентов в потоках отбора и отвала и значения  $1/\eta_\phi$  для изотопных смесей различного состава. В результате было определено, что для смесей различного состава с числом компонентов от 3 до 6 отношение  $K_1/K_2$  изменится в пределах от 10 до 30.

На рис. 2.11 приведены зависимости концентраций целевого компонента  $c_2$  рассмотренной трехкомпонентной смеси в потоках отбора и отвала и значения обратного КПД формы от отношения коэффициентов  $K_1/K_2$ . Видно, что для исследованной смеси в указанном диапазоне изменения  $K_1/K_2$  полученный в результате аппроксимации каскад имеет близкие к оптимальным КПД формы и концентрации целевого компонента в потоке отбора и отвала. При больших  $K_1/K_2$  вторым слагаемым в (2.218) по сравнению с первым можно пренебречь, и результатом аппроксимации является ПСК близкий к рассчитанному по критерию (2.216) с КПД равным  $\eta_{\phi_1}$ . При малых  $K_1/K_2$  может нарушаться условие непрерывно-

---

\* Под КПД формы условно понимают в данном случае отношение

$$\eta_\phi = \frac{\sum L_Q}{\sum L_{\text{ПСК}}}.$$

сти концентраций компонентов в точке подачи питания. В этом случае для уточнения расчета необходимо решить систему

$$Pc_{iP} + Wc_{iW} = Fc_{iF}, \quad i = 1, \dots, m \left. \vphantom{Pc_{iP} + Wc_{iW} = Fc_{iF}} \right\}, \quad (2.220)$$

где  $c_{i,f}^P$ ,  $c_{i,f}^W$  - концентрации  $i$ -го компонента в точке подачи питания, полученные из расчета от концов каскада, отборного и отвального, соответственно.

Полученные в результате этого решения значения концентраций целевого компонента в потоках отбора и отвала могут существенно отличаться от заданных (см. рис. 2.9). Таким образом, схема расчета оптимального ПСК по данной методике имеет следующий вид: расчет и оптимизация  $Q$ -каскада; одновременный расчет и оптимизация ПСК, аппроксимирующего этот  $Q$ -каскад; уточнение концентрации целевого компонента в потоках отбора и отвала полученного каскада. Целесообразно оптимизацию  $Q$ -каскада и ПСК проводить по одному критерию. Изложенный подход может быть использован и при расчете каскадов, имеющих несколько потоков отбора и отвала.

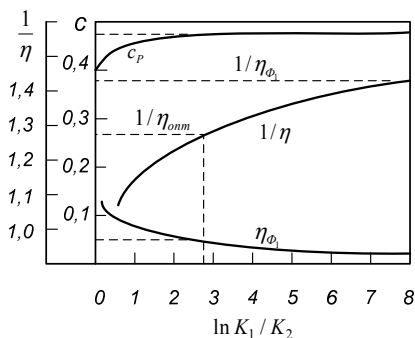


Рис. 2.11. Зависимость  $1/\eta_\phi$  и концентрации целевого компонента модельной трехкомпонентной смеси в потоке отбора  $c_{2P}$  и в потоке отвала  $c_{2W}$  каскада прямоугольного профиля [18]

## 2.3.5. Нестационарные процессы в каскаде [19-26]

### 2.3.5.1. Уравнение нестационарного переноса в каскаде

Математическую модель нестационарного разделительного процесса в приближении «слабого обогащения» (наличие большого числа разделительных ступеней, малость и независимость от текущих концентраций коэффициентов обогащения) по аналогии со случаем разделения бинарных смесей можно представить в виде следующей системы дифференциальных уравнений в частных производных [19-26]

$$\left. \begin{aligned} H(s) \frac{\partial c_i(s, t)}{\partial t} &= -\frac{\partial}{\partial s} J_i(s, t), \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{j=1}^m c_j &= 1, \end{aligned} \right\}, \quad (2.221)$$

где

$$J_i = -\frac{L(s)}{2} \left[ c_i(s, t) \sum_{j=1}^m \varepsilon_{ij} c_j(s, t) - \frac{\partial c_i(s, t)}{\partial s} \right] + T c_i(s, t) \quad (2.222)$$

перенос  $i$ -го компонента в направлении ступени с возрастающими номерами;  $t$  – время;  $s$  – координата, определяющая местоположение ступени в каскаде;  $H$ ,  $T$  и  $L(s)$  – задержка разделяемой смеси, перенос смеси и поток на входе  $s$ -ую ступень;  $\varepsilon_{ij}$  – относительные коэффициенты обогащения пары компонентов с номерами  $i$  и  $j$ . Если считать, что компоненты пронумерованы в порядке возрастания массовых чисел, и принять, что направление возрастания координаты  $s$  совпадает с направлением обогащения легких компонентов, то для молекулярно-кинетических методов разделения величина  $\varepsilon_{ij}$  может быть представлена в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 (M_j - M_i), \quad (2.223)$$

где  $\varepsilon_0$  – коэффициент обогащения, приходящийся на единичную разность массовых чисел.

Обычно считают, что в системе уравнений (2.221) значения  $H$ ,  $T$  и  $L(s)$  не зависят от времени. Если использовать новые переменные  $y = \varepsilon_0 s$ ,  $\tau = \frac{\varepsilon_0^2 t}{h}$ ,  $\omega = \frac{H(s)}{L(s)} = \text{const}$ , то система (2.221)

приобретает вид, не зависящий от конкретного метода разделения

$$\begin{aligned} \frac{\partial c_i}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} - \frac{\partial c_i}{\partial y} \sum_{j=1}^m (M_j - M_i) c_j - \\ - c_i \sum_{j=1}^m (M_j - M_i) \frac{\partial c_j}{\partial y} - \frac{2T}{\varepsilon_0 L} \frac{\partial c_i}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.224)$$

Для определенности рассмотрим прямоугольный каскад, имеющий в промежуточной точке поток питания  $F$ , а на концах каскада отводимые потоки –  $W$  (на «тяжелом» конце; условно – поток отвала) и  $P$  (на «легком» конце; условно – поток отбора). В этом случае перенос  $T$  определен как  $T = -W$  в отвальной секции каскада и  $T = P$  в отборной. Из условия сохранения переноса каждого компонента можно получить граничные условия для решения уравнений (2.224) в виде

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{c_i}{c_j} \right|_{y=0} = (M_j - M_i), \quad (2.225)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{c_i}{c_j} \right|_{y=y_P} = (M_j - M_i), \quad (2.226)$$

$$\left. \frac{\partial c_i^-}{\partial y} - \frac{\partial c_i^+}{\partial y} = \frac{2F}{\varepsilon_0 L} (c_{iF} - c_i)(c_{iF} - c_i) \right|_{y=y_F}, \quad 0 < y_F < y_P \quad (2.227)$$

Здесь  $c_{iF}$  – концентрация  $i$ -го компонента в потоке питания;  $y_P$  – длина каскада (координата точки отбора);  $y_F$  – координата точки подачи потока питания; знаки +, - обозначают производные справа и слева от рассматриваемой точки.

Для решения полученной краевой задачи необходимо задание начального распределения концентраций всех компонентов по кас-



каду, которые в простейшем случае первоначального заполнения каскада однородной питающей смесью с концентрациями  $c_{iF}$  можно записать как

$$c_i(y, 0) = c_{iF} \quad (2.228)$$

Таким образом,  $(m - 1)$  уравнений вида (2.224) с краевыми условиями (2.225) – (2.227), начальным распределением (2.228) и тождеством  $\sum_{j=1}^m c_j(y, \tau) \equiv 1$  определяют полную систему для нахождения любой концентрации в каждой точке каскада в любой момент времени.

Приведенные выражения легко обобщить на случай каскадов любого профиля (с любым видом распределения потока  $L(s)$ ) и каскадов, имеющих несколько потоков питания и отбора. В случае расчетов каскадов, работа которых основана на использовании двухфазных (физико-химических) методов разделения в краевых условиях, необходимо проводить учет накопления изотопов в емкостях, где происходит обращение фаз [19, 20, 24].

Моделирование переходных процессов связано с известными математическими трудностями даже применительно к случаю разделения бинарных смесей изотопов, когда система (2.224) приводится всего к одному уравнению в частных производных (см. раздел 1.11.1.). Если же число компонентов больше двух, то, по видимому, единственно возможным является путь численного интегрирования, который в свою очередь предполагает разработку эффективных с точки зрения реализации на ЭВМ алгоритмов решения задачи.

Известные из литературы подходы к решению этой проблемы в основном сводятся к использованию сеточных конечно-разностных и дифференциально-разностных моделей уравнений нестационарных процессов.

Существенным недостатком первых является то, что для краевых задач подобного типа достаточно устойчивыми оказываются неявные схемы, которые приводят к тому, что на каждом просчитанном временном слое приходится решать большие системы нелинейных алгебраических уравнений. Применение же традицион-

ных явных методов, свободных от этого недостатка, ограничивается недопустимо малой величиной шага интегрирования по времени [19].

Второй подход обосновывается тем, что в настоящее время методы численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений развиты лучше, чем методы решения систем нелинейных алгебраических уравнений. Дифференциально-разностные модели («методы прямых») можно рассматривать как предельный случай сеточных моделей, когда одни из размеров сетки (шаг интегрирования по времени) стремится к нулю. В этом направлении можно выделить несколько работ. Например, в [20] краевая задача для каскадов с устройствами для обращения фаз путем асимптотических преобразований сведена к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволяет получить систему с хорошо обусловленными матрицами коэффициентов, что допускает использование для её решения простейших методов интегрирования, например, метода Эйлера. Однако, апробация этой модели на молекулярно-кинетических методах разделения не дала положительных результатов. В работе [23] переход к системам обыкновенных дифференциальных уравнений осуществляется с помощью замены пространственных производных симметричными конечно-разностными соотношениями. Решение системы производится методом типа Рунге-Кутты, который для своей устойчивости требует относительно малого шага интегрирования. В работах [24-25] разработан численный метод интегрирования системы (2.224) – (2.228), свободный от указанных недостатков. Ниже приводится краткое изложение сути этого метода.

Как известно [27], для решения линейных краевых задач параболического типа существует явный метод, который абсолютно устойчив, т.е. устойчив при любом законе стремления величин шагов интегрирования к нулю. Этот метод известен в литературе как метод Дюфорты-Франкеля (E.DuFort, S.Frankel). Его идея состоит в том, что в симметричных конечно-разностных соотношениях, аппроксимирующих дифференциальное уравнение в частных производных, проводится осреднение по двум соседним временным слоям центрального члена во второй пространственной производной. В работах [24-26] используется конечно-разностный сеточный метод, построенный по аналогии с методом Дюфорты-Франкеля. Для

перехода к конечным разностям вся область интегрирования покрывается равномерной ортогональной сеткой:  $y = k\Delta$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ),  $\tau = n\Delta\tau$  ( $n = 1, 2, \dots$ ), где  $\Delta$  – шаг интегрирования по пространственной переменной,  $\Delta\tau$  – шаг интегрирования по времени,  $n$  – номер временного слоя,  $k$  – номер пространственного узла на расчетной сетке.

Симметричные конечно-разностные соотношения, аппроксимирующие производные в узлах сетки, имеют вид

$$\frac{\partial c_i}{\partial y} = \frac{c_{i,k+1}^n - c_{i,k}^n}{2\Delta}, \quad (2.229)$$

$$\frac{\partial^2 c_i}{\partial y^2} = \frac{c_{i,k+1}^n - (c_{i,k}^{n+1} - c_{i,k}^{n-1}) + c_{i,k-1}^n}{\Delta^2}, \quad (2.230)$$

$$\frac{\partial c_i}{\partial \tau} = \frac{c_{i,k+1}^{n+1} - c_{i,k}^{n-1}}{2\Delta\tau}. \quad (2.231)$$

В точках разрыва потока  $L(s)$ , подачи потока питания и на концах каскада соотношения вида (2.229) неприменимы. Здесь надо использовать односторонние разложения с достаточно хорошим порядком точности. Практические расчеты показали, что удовлетворительные результаты дают следующие соотношения для односторонних производных:

$$\frac{\partial c_i^+}{\partial y} = \frac{2c_{i,k+3}^n - 9c_{i,k+2}^n + 18c_{i,k+1}^n - 11c_{i,k}^n}{6\Delta}, \quad (2.232)$$

$$\frac{\partial c_i^-}{\partial y} = \frac{-2c_{i,k-3}^n + 2c_{i,k-2}^n - 18c_{i,k-1}^n + 11c_{i,k}^n}{6\Delta}, \quad (2.233)$$

которые получаются из суперпозиций разложений функций  $c$  в ряды Тейлора в точках с индексами  $k-1$ ,  $k-2$ ,  $k-3$  и  $k+1$ ,  $k+2$ ,  $k+3$  соответственно.

Как следует из выражений (2.230) и (2.231), разностная схема расчета требует дополнительных вычислений значений функций на втором временном слое. Эти вычисления должны проводиться с большей точностью, чем требуется для решения в остальной области. Однако если в качестве начальных условий используются усло-

вия вида (2.227), то второй временной слой состоит из начальных данных, за исключением точки введения потока питания, точек разрыва потока  $L(s)$  и концов каскада. Численные эксперименты на примере прямоугольно-секционированных каскадов по выявлению области устойчивости метода показали, что на его устойчивость слабо влияют различные параметры каскада, т.е. метод пригоден и в достаточной мере эффективен в широком диапазоне исследуемых задач. Шаг интегрирования  $\Delta\tau$  достаточно велик и является величиной порядка  $\Delta$ . Если это сравнить с явным одношаговым методом, для которого  $\Delta\tau < (\Delta)^2$ , то ясно, что при  $\Delta \ll 1$  преимущество метода значительно.

Численные исследования показали, что процесс вычислений на основе описанного метода остается устойчивым в широком диапазоне изменения пространственных и временных шагов интегрирования.

### 2.3.5.2. Некоторые особенности нестационарных процессов

Описанный выше метод был применен для исследования основных закономерностей переходных процессов в каскадах для разделения многокомпонентных изотопных смесей (на примере прямоугольного каскада [25]).

Результаты исследований позволили выделить два основных этапа переходного процесса. На начальном этапе изменения концентраций компонентов смеси имеют независимый друг от друга характер и определяют глобальный характер дальнейшего изменения концентраций. На следующем за ним основном этапе проявляется нелинейное взаимное влияние компонентов, связанное с процессом накопления на ступенях каскада. Рассмотрим особенности этих этапов более подробно.

Можно предположить, что на начальном этапе динамика изменения концентрации подчинена системе уравнений (2.224), в которой нелинейный член может быть заменен на следующую линейную аппроксимацию

$$c_i \sum_{j=1}^m (M_j - M_i) c_j \approx b_i c_i, \quad (2.234)$$

$$\text{где } b_i = \bar{M} - M_i, \quad (2.235)$$

а  $\bar{M} = \sum_{j=1}^m M_j c_{jF}$  – среднее массовое число исходной смеси изотопов.

При этих условиях система уравнений (2.224) распадается на линейно-независимые уравнения, которые можно решить аналитически. В частности, для «закрытого» каскада ( $P = W = 0$ ) решения для концов каскада имеют вид:

$$c_{iW/P} = c_{iF} - \frac{4c_{iF}}{\sqrt{\pi}} x_i \left[ 1 - x_i \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x_i^{2k}}{k!(4k^2 - 1)} \right], \quad (2.236)$$

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad x_i^{2k} \ll 1, \quad k = 0, 1, \dots$$

здесь  $x_i = \pm b_i \sqrt{\tau} / 2$  знаки + и – относятся к «тяжелому» и «легкому» концу каскада. При  $k = 0$  имеется линейная зависимость концентрации от  $\sqrt{\tau}$ , экспериментально подтвержденная в работе [28].

Структура соотношений (2.236) такова, что знак начальных относительных изменений концентраций полностью определяется коэффициентами  $b_i$ , входящими в выражение (2.234).

С течением времени коэффициенты  $b_i$  изменяются за счет изменения среднего массового числа  $\bar{M}$ . В заданной точке каскада их изменение независимо от номера компонента  $i$  имеет одинаковые значения

$$\Delta b(\tau) = \bar{\bar{M}}(\tau) - \bar{M}, \quad (2.237)$$

$$\text{где } \bar{\bar{M}} = \sum_{j=1}^m M_j c_j(\tau).$$

Используя соотношения (2.236) при  $\tau < 1$  ( $\tau = 1$  – характерное время переходного процесса) в первом приближении находим

$$\Delta b(\tau) = 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \cdot \sigma, \quad (2.238)$$

где  $\sigma = \sum_{j=1}^m c_{jF} (\bar{M} - M_j)^2$  – начальная дисперсия изотопной сме-

си. Оценка (2.238) показывает, что решение (2.236), полученное с учетом линеаризации (2.234), оказывается обратно пропорциональным  $\sigma$ , а масштаб времени, в течение которого уравнения (2.234) справедливы, пропорционален  $\sigma^{-2}$ . Другими словами, при разделении смесей с малой дисперсией  $\sigma \ll 1$ , в которой среднее массовое число  $\bar{M}$  близко к массовому числу одного из компонентов, период независимого обогащения может быть гораздо больше, чем при разделении с высокой величиной  $\sigma$ . Для объяснения целесообразно обратиться к примеру разделения изотопов криптона, как смеси, содержащей большое число компонентов с широким спектром начальных концентраций (см. табл. 2.6).

Таблица 2.6

Параметры природной смеси изотопов криптона ( $\sigma = 1,75$ )

| Номер компонента, $i$ | Массовое число, $M_i$ | $c_{iF}$ | $b_i$ |
|-----------------------|-----------------------|----------|-------|
| 1                     | 78                    | 0,00354  | 5,89  |
| 2                     | 80                    | 0,0227   | 3,89  |
| 3                     | 82                    | 0,1156   | 1,89  |
| 4                     | 83                    | 0,1155   | 0,89  |
| 5                     | 84                    | 0,56896  | -0,11 |
| 6                     | 86                    | 0,1737   | -2,11 |

Соответствующие значения концентраций (2.236) в масштабе времени  $\sqrt{\tau}$ , а также результаты численного расчета для прямоугольного каскада длиной  $y_p = 5$  приведены на графиках рис. 2.12. Пример относится к обогащению «тяжелого» конца спектра массовых чисел, поэтому начальные активности изотопов  $^{78}\text{Kr}$ ,  $^{80}\text{Kr}$ ,  $^{82}\text{Kr}$ ,  $^{83}\text{Kr}$  положительны, и их концентрации убывают на «тяжелом» (отвальном) конце каскада. На рис. 2.12,г и 2.12,д сравнивается решение (2.236) с экспериментальными данными работы [28] и численным расчетом.

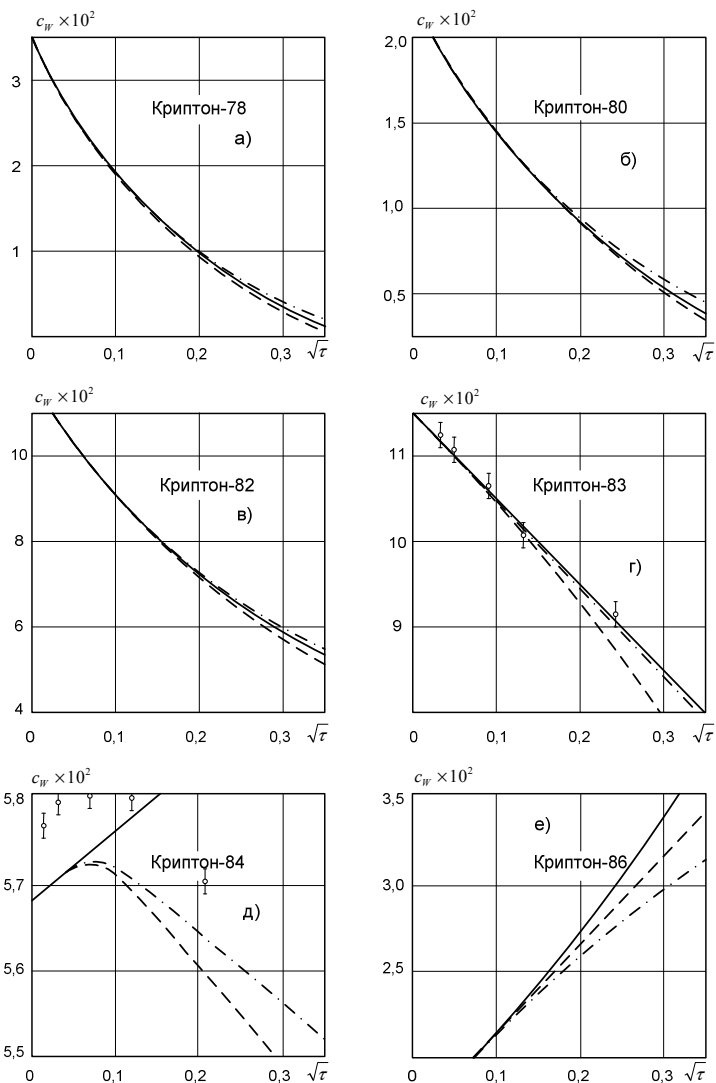


Рис. 2.12. Зависимости изменения концентраций изотопов криптона на «тяжелом» конце прямоугольного каскада как функция  $\sqrt{\tau}$  ( $y_P = 3,3$ ,  $y_F = 1,7$ ):

— решение (2.236);

---- численное решение для режима с выключенными потоками  $W$  и  $P$ ;

- · - · - численное решение для режима с постоянно включенным потоком  $W$  ( $2W/\varepsilon_0 L=1$ );

□ — экспериментальные результаты, полученные в работе [28]

Оценить продолжительность периода независимого обогащения  $\tau_n$  для произвольной многокомпонентной изотопной смеси можно, если известно значение этого периода для какой-нибудь одной смеси. Например, взяв за основу смесь изотопов криптона (см. табл. 2.6), будем иметь

$$\tau_n \cong (10^{-2} \div 10^{-1}) \cdot \sigma_{Kr}^2 \cdot \sigma^{-2} \quad (2.239)$$

Численные исследования по разделению смесей различного изотопного состава показывают, что в течение времени  $\tau_n$  решение (2.236) в большинстве случаев достаточно хорошо описывает изменение концентраций и в случаях поддержания процесса разделения с постоянно включенным потоком  $W$  (см. рис. 2.10). Для разделяемых смесей с большой дисперсией ( $\sigma > 1$ ) как это имеет место для смесей изотопов криптона ( $\sigma = 1,75$ ), вольфрама ( $\sigma = 3,1$ ) и ряда других при  $y_p \geq 1$ , значение  $\tau_n$  практически не зависит от  $y_p$ .

Для смесей с малой дисперсией проявляется квадратичная зависимость от  $y_p$ ; в частности при  $\sigma \rightarrow 0$  справедливо выражение

$$\tau_i = \frac{y_p^2}{4\pi} \quad (2.240)$$

Как показывают экспериментальные [28] и расчетные исследования, во многих изотопных смесях имеются компоненты, начальное изменение концентраций которых носит аномальный характер и не подчиняется решению (2.236). Концентрация таких компонентов на концах каскадов первоначально возрастает и в дальнейшем оказывается ниже своего начального значения  $c_{nF}$  (рис. 2.12,д). Подобные процессы могут иметь место независимо от начальной концентрации этого компонента и расчетного стационарного значения концентрации этого компонента, которое может быть выше  $c_{nF}$ . Такое существенно нелинейное («аномальное») изменение концентрации имеет место для компонентов смеси, у которых абсолютное значение коэффициента  $b_n$  – имеет наименьшее значение и близко к нулю. Причина «аномального» изменения концентрации



состоит в том, что в выражении (2.234) коэффициенты  $b_i$  лишь приближенно можно считать постоянными во времени величинами и для «аномальных» компонентов за сравнительно короткое время они могут поменять свой знак. Определить время формирования максимума концентрации для «аномального» компонента можно по формуле (2.238), положив в ней  $\Delta b = b_n$  ( $n$  – номер рассматриваемого компонента смеси):

$$\tau_{\max} \approx \frac{b_n^2 \pi}{4\sigma^2}. \quad (2.241)$$

Рассмотрим теперь особенности переходных процессов на основном этапе переходного периода ( $\tau > \tau_n$ ), когда исходная система (2.221) не может быть линеаризована. В данном случае следует основываться на анализе численных результатов. Численные исследования показали, что при обогащении крайнего по массовому числу компонента изменение во времени концентрации  $c_{mW}(\tau)$  имеет такой же вид, как и при разделении бинарных смесей. В начальный период времени, когда выполнено условие (2.234), имеет место монотонное возрастание, которое обуславливает малое время релаксации по сравнению с промежуточными компонентами смеси. Если оптимальное стационарное накопление рассматриваемого

компонента меньше нуля, т.е.  $\alpha = \frac{\tilde{M}_{m\infty} - \tilde{M}_{m0}}{\tilde{M}_{m0}} < 0$  ( $\tilde{M}_{m0}$  и  $\tilde{M}_{m\infty}$

содержание  $m$ -го компонента в объеме каскада при  $\tau = 0$  и  $\tau \rightarrow \infty$  соответственно) в зависимости  $c_{mW}(\tau)$  появляется максимум, превосходящий по величине стационарное значение концентраций.

Аналогичная ситуация имеет место при обогащении компонентов с промежуточными отрицательными значениями коэффициентов  $b_i$ . Однако положение резко меняется, если целевым оказывается компонент с наибольшим отрицательным  $b_i$ . Рассмотрим этот случай подробнее. Для целевого компонента с аномальным изменением концентрации при времени, соответствующим соотношению (2.241), в зависимости  $c_{nW}(\tau)$  появляется максимум, близкий

к  $c_{nF}$  (рис. 2.12,д). Затем концентрация убывает, проходит через минимум и приближается к стационарному значению (см. рис. 2.12,а, б, в, г)\*; параметры каскадов, использованные при расчетах содержатся в табл. 2.7.

Зависимости на рис. 2.13 свидетельствуют о том, что время достижения расчетной концентрации в отбираемых потоках у компонентов с аномальными свойствами превышает соответствующее время остальных обогащенных вместе с ним компонентов. Расчеты также показывают, что в момент достижения минимума концентраций компонентов с аномальными свойствами градиент суммарного переноса целевого и обогащаемых компонентов вблизи концов каскада близок к нулю. Время достижения такого состояния обычно велико, поскольку необходимо, чтобы накопление этих компонентов по количеству было близким или превышающим стационарное.

Таблица 2.7

Параметры прямоугольных каскадов, соответствующие переходным процессам, изображенным на рис. 2.13

| Химический элемент | $y_P$ | $y_F$ | $\frac{\varepsilon_0 L}{2W}$ | $\frac{\varepsilon_0 L}{2P}$ |
|--------------------|-------|-------|------------------------------|------------------------------|
| криптон            | 3,3   | 1,7   | 1,0                          | 0,65                         |
| вольфрам           | 9,0   | 4,5   | 1,4                          | 0,4                          |
| германий           | 9,0   | 4,5   | 1,0                          | 1,0                          |
| сера               | 10    | 7     | $5 \cdot 10^{-2}$            | 2,0                          |

При этом в момент времени  $\tau = \tau_{\min}$  кривая  $c_{mW}(\tau)$  ( $m$  – номер крайнего, самого «тяжелого» компонента) имеет максимум (рис. 2.13,а, 2.13,б), а для промежуточных компонентов с номерами  $n < i < m$  – либо максимум, либо перегиб (рис. 2.13,г)).

\* Все сказанное здесь и ниже имеет силу и для отборного («легкого») конца каскада относительно изменения концентраций компонентов с наименьшими положительными значениями  $b_i$  (поведение концентрации изотопа германий-72  $c_{nP}$  в отборе каскада от времени  $\tau$  -рис. 2.13,в)).

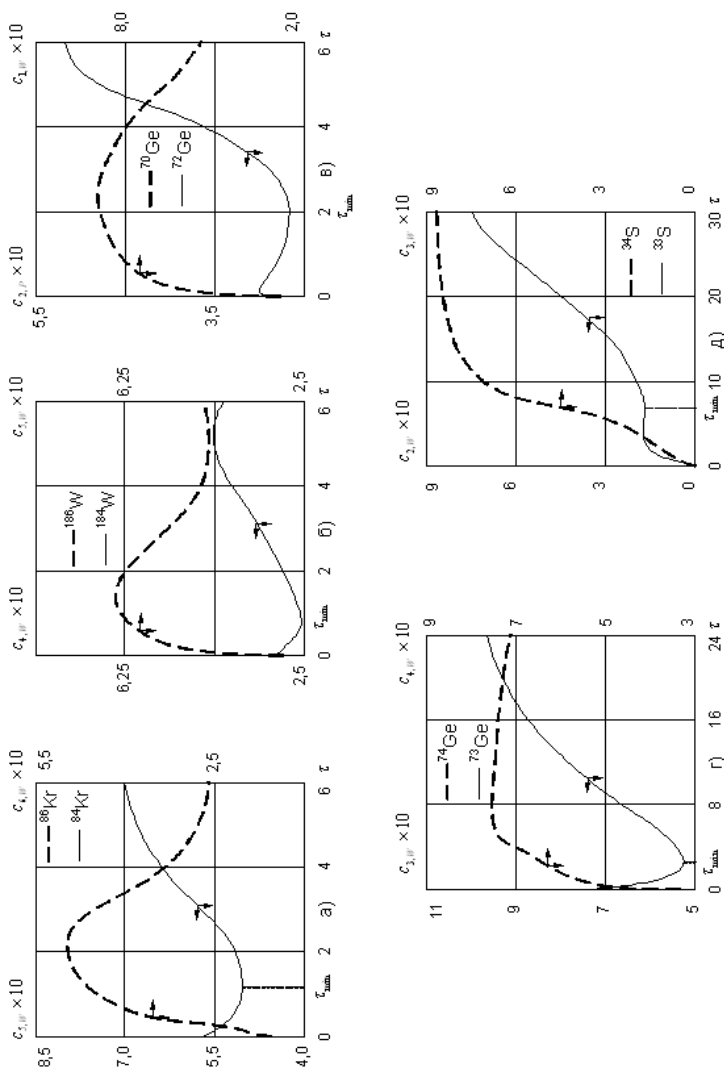


Рис. 2.13. Характерные зависимости от времени концентраций изотопов многокомпонентных смесей в потоках  $W$  (а, б, г и д) и  $P$  (в) прямоугольного каскада

Все сказанное относится и к противоположному концу каскада (рис. 2.13,в)). Указанные обстоятельства могут быть использованы на практике для получения небольшого количества высокообогащенных изотопов. Для целевых компонентов с наибольшим отрицательным значением  $b_n$ , но не относящихся к компонентам с аномальными свойствами, также возможно немонокотное возрастание концентрации. Исследования показали, что в этих случаях начальная дисперсия массовых чисел составляет  $\sigma \geq (5 \div 10)^{-2}$ . На рис. 2.13,д) приведены расчетные данные для концентраций изотопов серы. Видно, что продолжительность переходного периода для него заметно больше, чем для крайнего изотопа  $^{34}\text{S}$ .

Ряд численных исследований позволил установить, что при получении компонентов с аномальными свойствами одновременное увеличение потоков  $W$  и  $P$  при условии  $W/P = \text{const}$  в переходном периоде может привести к уменьшению времени достижения требуемого обогащения (рис. 2.14).

Объяснить этот факт можно тем, что с ростом переноса разделяемого вещества одновременно возрастают скорости переноса компонентов в направлении конца каскада. При этом компоненты, обогащенные совместно с целевым в каскаде, не накапливаются, а выносятся с отбираемым потоком.

Приведенные выше результаты можно обобщить и на двухфазные методы разделения изотопов (химический изотопный обмен и дистилляцию). При этом нелинейный член в (2.222) может быть определен как

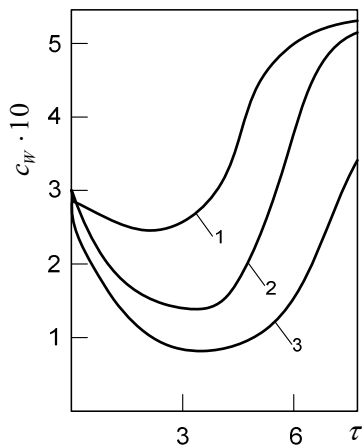


Рис.2.14. Концентрация промежуточного компонента  $^{184}\text{W}$  в потоке отвала  $W$  как функция времени и переноса вещества в прямоугольном каскаде:  
 $W/P=2,5$ ;  $y_P=9,0$ ;  $y_F=4,5$ ;  $2W/\epsilon_0L$ : 1—1,25; 2—0,75; 3—0,5 [25]

$$b_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{j=1}^m \varepsilon'_{ij} c_{jF}, \quad (2.242)$$

где  $\varepsilon_0$  — масштабная величина коэффициентов обогащения, определяемая как  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon'_{ij}$ , где  $\varepsilon'_{ij}$  имеют значения порядка единицы, а дисперсия

$$\sigma = \frac{1}{\varepsilon_0^2} \sum_{j=1}^m c_{jF} \left( \sum_{k=1}^m \varepsilon_{jk} c_{kF} \right)^2. \quad (2.243)$$

### 2.3.5.3. Переходные процессы в двойных каскадах

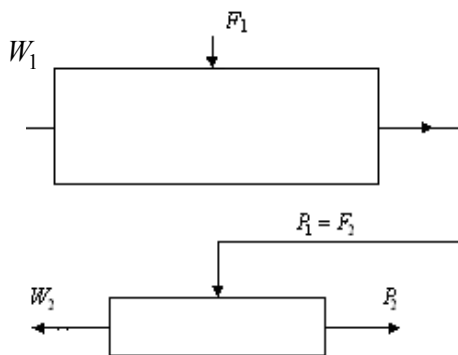


Рис. 2.15. Схема двойного каскада: потоки  $P_1$  и  $W_2$  обогащенные целевым компонентом, потоки  $W_1$  и  $P_2$ , обедненные этим изотопом

При разделении многокомпонентных изотопных смесей достижение концентраций промежуточных по массовым числам компонентов выше предельных требует, в частности, построения сложных каскадных схем. Одной из таких схем является схема двойного каскада (рис. 2.15). В работе [26] приведены результаты исследований, показывающие особенности нестационарного изменения

концентраций в двойном каскаде и некоторые рекомендации по организации эффективного режима разделения в переходном процессе. Рассмотрим двойной каскад, состоящий из двух прямоугольных каскадов: в первом каскаде целевой компонент обогащается вместе со спектром «легких» компонентов (поток  $P_1 = F_2$ ), а во втором он концентрируется на «тяжелом» конце каскада в потоке  $W_2$ . Наиболее характерные зависимости переходных процессов приведены на рис. 2.15 на примере получения  $^{82}\text{Kr}$  из природной смеси изотопов криптона. Как видно из рисунка, в начальной фазе

переходного процесса в течение продолжительного периода времени концентрация целевого изотопа ( $^{82}\text{Kr}$ ) в потоке  $W_2$  убывает. Продолжительность формирования минимума в зависимости  $c_{nW_2}(\tau)$  определяется содержанием на ступенях каскада компонентов с номерами  $j < n$  (можно назвать их примесными компонентами, поскольку в стационарном состоянии их содержание в объеме второго каскада должно быть минимальным), которые переносятся в направлении «тяжелого» конца второго каскада (поток  $W_2$ ) и препятствуют обогащению целевого компонента. Накопление целевого компонента, первоначально происходящее на промежуточных ступенях этого каскада, способствует вытеснению из каскада

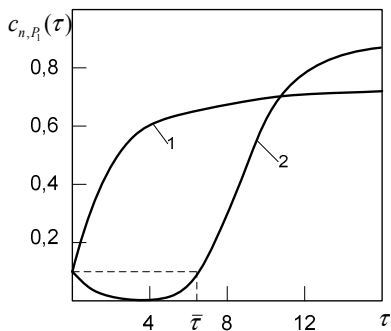


Рис. 2.16. Концентрация промежуточного целевого компонента ( $^{82}\text{Kr}$ ) в потоках  $P_1$  и  $W_2$  двойного каскада как функция безразмерного времени  $\tau$ : 1 —  $c_{n,P_1}$ ; 2 —  $c_{n,W_2}$

примесных компонентов в потоке  $W_2$ . По мере вытеснения примесных компонентов концентрация  $c_{nW_2}(\tau)$  начинает возрастать, причем условие  $c_{nW_2} \geq c_{nF}$ , как правило, достигается тогда, когда переходный процесс в первом каскаде уже практически завершен. Если известно первоначальное содержание примесных компонентов  $M_0$  в объеме второго каскада, то время достижения условия  $c_{nW_2} \geq c_{nF}$  можно оценить по формуле

$$\bar{\tau} \cong \frac{\varepsilon_0^2}{2\omega} \frac{M_0}{W_2 \tilde{c}_{nW_2}}, \quad (2.244)$$

где  $\tilde{c}_{nW}$  — средняя за время  $\bar{\tau}$  суммарная концентрация примесных компонентов в потоке  $W_2$ . Величину концентрации  $\tilde{c}_{nW}$  можно оценить как  $\tilde{c}_{nW} \cong 1 - c_{nF}$  (см. рис. 2.16) с учетом того, что

$M_0 = \omega L_2 s_2 \sum_{j=1}^{n-1} c_{jF}$ , где  $L_2$  и  $s_2$  – поток и число ступеней во втором

каскаде соответственно.

В результате нетрудно получить удобную для практических расчетов формулу:

$$\bar{\tau} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} c_{jF}}{1 - c_{nF}} \cdot \frac{\varepsilon_0^2 s_2 L_2}{2W_2}. \quad (2.245)$$

Выражение (2.245) позволяет оценить продолжительность переходного периода в двойном каскаде как  $(2 - 3)\bar{\tau}$  и показывает, что продолжительность переходного периода возрастает с увеличением суммы начальных концентраций примесных компонентов. Следует отметить, что в течение периода времени  $\bar{\tau}$  поток  $W_2$  может быть использован для получения сравнительно высокого обогащения примесных компонентов. В работе [26] рассмотрены вопросы, относящиеся к способам сокращения пускового периода в двойных каскадах. Под пусковым периодом подразумевается тот период времени от начала процесса разделения, по истечении которого в потоке  $W_2$  концентрация целевого компонента поддерживается не ниже расчетного стационарного значения. Поставленная цель может быть достигнута за счет управления накоплением целевого компонента в объеме второго каскада, которое можно проводить последовательно включая потоки  $W_2$  и  $P_2$ .

Пусть после запуска каскада не включен поток  $W_2$ , а поток  $P_2 = P_1$ . В этом случае примесные компоненты концентрируются у закрытого конца каскада, препятствуя росту концентрации целевого компонента  $c_{n,W_2}(\tau)$ , а его накопление

$$\Delta M_n = P_1 \int_0^{\tau} [c_{nP_1}(\xi) - c_{nP_2}(\xi)] d\xi \quad (2.246)$$

практически не изменяется во времени (рис. 2.17). Поэтому на начальном периоде переходного процесса режим с выключенным потоком  $W_2$  можно считать неэффективным.

В режиме с выключенным потоком  $P_2$  (при условии материального баланса  $W_2 = P_1$ ) концентрация  $c_{nW_2}(\tau)$  некоторое время уменьшается (см. рис. 2.16). Дальнейшее ее возрастание происходит со скоростью большей, чем в режиме с включенным потоком  $P_2$ . Нестационарное накопление

$$\Delta M_n = P_1 \int_0^{\tau} [c_{nP_1}(\xi) - c_{nW_2}(\xi)] d\xi \quad (2.247)$$

в это время также возрастает (рис.2.17). В результате с определенного момента времени  $\tau \geq \bar{\tau}$  в каскаде может быть получено обогащение, близкое к стационарному. Рост концентрации и накопление длится ограниченное время (см. рис. 2.12 и 2.13), что главным образом связано с постепенным заполнением объема второго каскада компонентами с номерами  $j > n$ .

Возникновение максимумов накопления и концентрации в режиме с выключенным потоком  $P_2$  можно использовать в целях сокращения пускового периода. Оптимальный режим ведения переходного процесса основан на последовательном чередовании состояний с выключенными потоками  $W_2$  и  $P_2$ . В подобных последовательностях состояние с выключенным потоком  $W_2$  оказывается эффективным в том смысле, что позволяет сравнительно быстро накопить целевой компонент на промежуточных ступенях второго каскада.

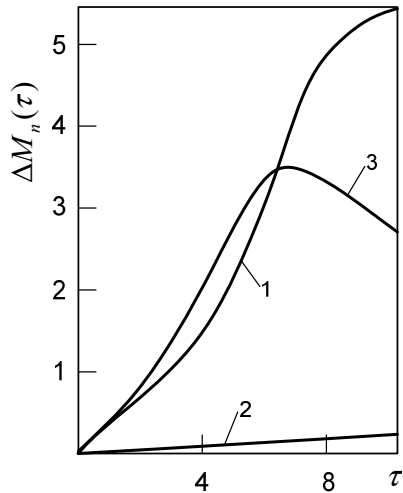


Рис. 2.17. Накопление целевого компонента ( $^{82}\text{Kr}$ ) в объеме второго каскада как функция безразмерного времени: 1 — потоки  $W_2$  и  $P_2$  постоянно включены; 2 — выключен поток  $W_2$ ; 3 — выключен поток  $P_2$  [26]



Конкретная оптимальная последовательность задания потоков  $W_2$  и  $P_2$  зависит от многих факторов, среди которых определяющим является соотношение между концентрациями смеси, первоначально заполняющей каскад. В частности, если выполнено условие

$$c_{nF} / \sum_{j=n+1}^m c_{jF} < 1,5, \quad (2.248)$$

эффективный режим должен основываться на последовательном включении и выключении потоков  $W_2$  и  $P_2$  по схеме

$$(0, W_2) \xrightarrow{\tau_1^*} (P_2, 0) \xrightarrow{\tau_2^*} (0, W_2) \xrightarrow{\tau_3^*} (P_2, 0) \rightarrow \dots \rightarrow (0, W_2) \xrightarrow{\tau_n^*} (P_2, W_2). \quad (2.249)$$

Здесь символами  $W_2$  и  $P_2$  обозначены состояния с включенными соответствующими потоками, а 0 – с выключенными;  $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^*$  – моменты перехода от одного состояния к другому ( $\tau_1^* < \tau_2^* < \dots < \tau_n^*$ ). При изменении режима по схеме, описываемой формулой (2.249), целевой компонент оказывается попеременно в положении вытесняемого от соответствующего закрытого конца каскада в направлении открытого, а концентрации  $c_{nW_2}$  и  $c_{nP_2}$  изменяются в противофазе. В результате в каскаде имеет место чередование режимов обогащения и накопления целевого компонента. Определив моменты времени  $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_n^*$  из условий

$$\left. \begin{aligned} c_{nW_2}(\tau_1^*) &= c_{nP_1}(\tau_1^*); \\ c_{nP_2}(\tau) &= c_{nP_1}(\tau), \quad \tau = \tau_2^*, \tau_4^*, \dots; \\ c_{nW_2}(\tau) &= \max\{c_{nW_2}(\tau)\}, \quad \tau = \tau_3^*, \tau_5^*, \dots, \end{aligned} \right\} \quad (2.250)$$

к моменту времени  $\tau_n^*$ , соответствующему достижению расчетной концентрации  $c_{nW_2}$ , в каскаде можно достичь стабильного высокого обогащения по целевому компоненту. Продолжительность пускового периода в большинстве случаев сокращается на 30-40 и более процентов. Для примера на рис. 2.18 приведены соответствующие

последовательности (2.249) изменения концентраций  $c_{nW_2}$ , относящиеся к получению изотопа  $^{29}\text{Si}$  из природной смеси. Если исходная концентрация целевого компонента достаточно велика

$$c_{nF} / \sum_{j=n+1}^n c_{jF} \geq 2,5,$$

последовательность существенно упрощается

$$(0, W_2) \xrightarrow{\tau_n^*} (P_2, W_2).$$

При этом потоки  $P_1$  и  $W_2$  с момента запуска каскада должны иметь номинальные значения. Образующийся избыток потока  $P_1$ , равный значению потока  $P_2$ , при выполнении условия  $c_{nP_1}(\tau) > c_{nF}$  должен быть возвращен в поток пита-

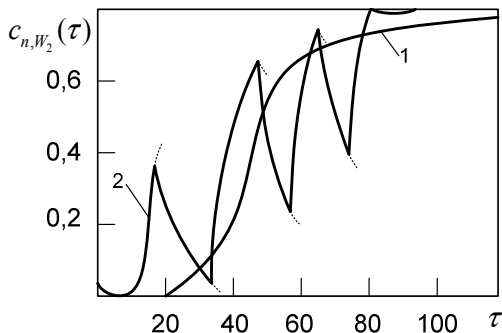


Рис. 2.18. Концентрация целевого компонента ( $^{29}\text{Si}$ ) на «тяжелом» конце второго каскада (в потоке  $W_2$ ) как функция безразмерного времени: 1 — потоки  $W_2$  и  $P_2$  постоянно включены; 2 — изменение режима работы каскада по схеме (2.249) [26]

ния первого каскада  $F_1$ . При выполнении условия  $c_{nW_2}(\tau) > c_{nF}$  аналогичную операцию необходимо проводить и с потоком  $W_2$ .

Следует иметь в виду, что если условие (2.251) не выполняется, применение второго способа крайне нежелательно, поскольку возврат потоков  $P_1$  и  $W_2$  в питание приводит к изменению состава питающей смеси в сторону увеличения концентраций компонентов с номерами  $j > n$ , что ведет к «запиранию» отборного («легкого») конца первого каскада для целевого компонента, и, следовательно, и к резкому снижению скорости его накопления в объеме второго каскада.

Таким образом, для двойных каскадов характерны значительно большие времена установления стационарного состояния по сравнению с обычными (ординарными) каскадами, что связано с существованием периода времени  $\bar{\tau}$ , в течение которого концентрация

целевого компонента на «тяжелом» конце каскада (в потоке  $W_2$ ) меньше, чем в исходной смеси. Однако, подбирая режим проведения переходного процесса в соответствии с уравнениями (2.249) – (2.252) на практике всегда можно достигнуть сокращения пускового периода.

### **2.3.6. Разделение многокомпонентной смеси изотопомодифицированных молекул в каскаде при наличии внутрифазного изотопного обмена**

Часто при разделении изотопов различных элементов рабочие (разделяемые) вещества представляют собой смесь неоднoатомных молекул с различным изотопным замещением. Например, аммиак содержит 18 изотопоразличных молекул ( $^{14}\text{NH}_3$ ,  $^{14}\text{NTD}_2$ ,  $^{14}\text{NT}_2\text{D}$ ,  $^{15}\text{NT}_3$  и т.д.). В данном случае в потоке природной многокомпонентной смеси, поступающем на вход разделительного каскада, изотопы, как правило, имеют равновесное распределение между компонентами (молекулами). Протекающий в ступенях каскада процесс разделения приводит к смещению распределения изотопов по молекулам от равновесного. Это приводит к возникновению процесса восстановления равновесия посредством внутрифазового (гомогенного) изотопного обмена, идущего спонтанно за счет физико-химических особенностей разделяемой смеси, либо протекающего вынужденно за счет каталитического воздействия на смесь извне. В зависимости от ряда факторов этот процесс может приводить как к увеличению, так и снижению концентрации целевого изотопа в потоке отбора из каскада.

Закономерности влияния изотопного обмена рассмотрим на простейшем примере – разделении вещества, состоящего из двухатомных молекул типа  $XY$ , где  $X$  и  $Y$  – различные элементы в трехпоточном каскаде с потоками питания, отбора и отвала в случае слабого обогащения. Пусть элемент  $X$  имеет  $m_1$  изотопов, а элемент  $Y$  –  $m_2$  изотопов. Компоненты разделяемой смеси могут быть представлены в виде  $X_iY_j$ , где  $i = 1, 2, \dots, m_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, m_2$ . Очевидно, что число компонентов смеси равно  $m_1 \times m_2$ . Обозначив мольные концентрации компонентов  $X_iY_j$  через  $c_{ij}$ , а concentra-

ции изотопов  $X_i$  и  $Y_j$  через  $x_i$  и  $y_j$ , соответственно, запишем очевидные соотношения

$$x_i = \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij}; \quad y_j = \sum_{i=1}^{m_1} c_{ij}; \quad \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij} = 1, \quad (2.253)$$

здесь и далее  $1 \leq i \leq m_1$ ,  $1 \leq j \leq m_2$ .

Рассмотрим каскад, разделительная ступень которого в общем случае может быть представлена в виде некоторого объема, в котором собственно происходит процесс разделения, основанный на том или ином физическом принципе и двух обменников на выходах «обогащенной» и «обедненной» фракций.

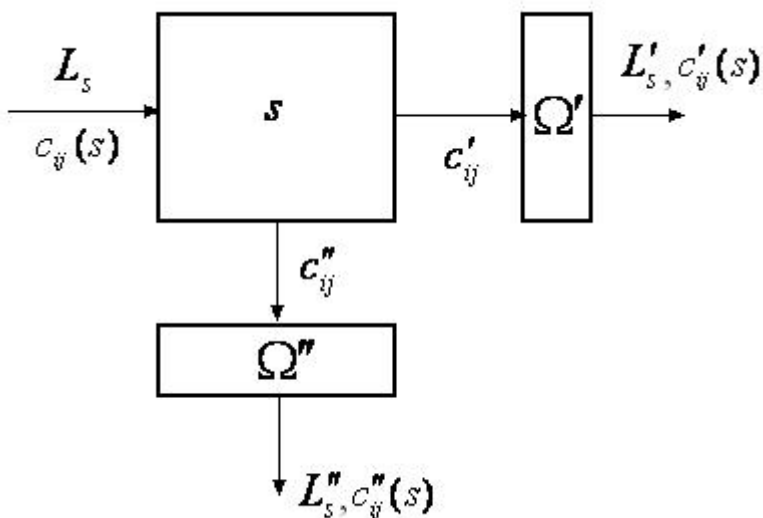


Рис. 2.19. Схема разделительной ступени с двумя обменниками

При равновесном распределении изотопов между компонентами концентрации компонентов (молекул)  $c_{ij}$  связаны с концентрациями изотопов  $x_i$  и  $y_j$  следующими соотношениями

$$c_{ij} = x_i y_j. \quad (2.254)$$

Пусть смесь молекул  $X_i Y_j$  заполняет в начальный момент времени обменник с задержкой  $\Omega$  и имеет при этом концентрации компонентов  $c_{ij}^0$ , которые отличаются от равновесных, то есть не удовлетворяют соотношению (2.254). Тогда изотопный обмен будет стремиться привести смесь к равновесию, причем в простейшем случае скорость перехода от одного состояния к другому может быть описана кинетическим уравнением первого порядка [21]

$$\frac{dc_{ij}}{dt} = -\gamma [c_{ij} - x_i y_j], \quad (2.255)$$

$$c_{ij}(0) = c_{ij}^0, \quad (2.256)$$

где  $\gamma$  – кинетический коэффициент, не зависящий от концентрации (коэффициент скорости изотопного обмена).

Решение уравнения (2.255) с начальным условием (2.256) имеет вид

$$c_{ij} = x_i y_j + [c_{ij}^0 - x_i y_j] \exp(-\gamma t). \quad (2.257)$$

Заметим, что уравнение (2.255) записано при допущении о равенстве скорости всех реакций, в которых принимает участие данный компонент, а также о равенстве скоростей прямой и обратной реакций.

Если обозначить через  $t_{об}$  время задержки смеси в обменнике, рассчитываемое как  $t_{об} = \frac{\Omega}{L_{об}}$ , где  $L_{об}$  – поток, проходящий через обменник, то для значения  $t = \tau$  формула (2.257) будет соответствовать

концентрации  $ij$  компонента на выходе из обменника  $c_{ij}^*$

$$c_{ij}^* = x_i y_j + [c_{ij}^0 - x_i y_j] \exp(-\gamma t_{об}). \quad (2.258)$$

При конечном значении времени задержки  $\tau$  можно выделить два предельных случая нулевой и бесконечно большой скорости обмена:

$$\gamma = 0 \quad c_{ij}^* = c_{ij}^0, \quad (2.259)$$

$$\gamma = \infty \quad c_{ij}^* = x_i y_j. \quad (2.260)$$

В этих случаях концентрации на выходе из обменного устройства определяются начальным содержанием смеси по формулам (2.259) и (2.260) соответственно. Для промежуточных значений константы  $\gamma$  следует пользоваться соотношением (2.258).

Запишем баланс потоков в разделительной ступени с двумя обменниками, изображенной на рис. 2.19

$$\begin{aligned} L_s c_{ij}(s) = L'_s c'_{ij}(s) + L''_s c''_{ij}(s) = \\ L'_s c_{ij}^*(s) + L''_s c_{ij}^{**}(s) + J_{ij}^{н.о.}(s), \end{aligned} \quad (2.261)$$

где  $1 \leq i \leq m_1$ ,  $1 \leq j \leq m_2$ ,  $s$  – номер разделительной ступени (в дальнейшем опустим его для краткости),  $L_s$  – поток рабочего вещества на входе в  $s$ -ую ступень,  $L'_s, L''_s$  – потоки «легкой» и «тяжелой» фракций соответственно,  $c_{ij}, c'_{ij}, c''_{ij}$  – концентрации  $ij$  компонента на входе и выходах из ступени (выходах в обменники) соответственно,  $c_{ij}^*, c_{ij}^{**}$  – концентрации  $ij$ -компонента на выходах из обменников,  $J_{ij}^{н.о.}(s)$  – скорость «наработки» молекул состава  $X_i Y_j$ , обусловленная изотопным обменом в обоих обменниках ступени.

Запишем выражение для члена  $J_{ij}^{н.о.}$  в уравнении (2.261)

$$J_{ij}^{э.п.} = -[L'(c_{ij}^* - c'_{ij}) + L''(c_{ij}^{**} - c''_{ij})]. \quad (2.262)$$

Выразим разности концентраций  $(c_{ij}^* - c'_{ij})$  и  $(c_{ij}^{**} - c''_{ij})$ , используя (2.259)

$$c_{ij}^* - c'_{ij} = x'_i y'_j + [c'_{ij} - x'_i y'_j] \exp(-\gamma t'_{об}) - c'_{ij}, \quad (2.263)$$

$$c_{ij}^{**} - c''_{ij} = x''_i y''_j + [c''_{ij} - x''_i y''_j] \exp(-\gamma t''_{об}) - c''_{ij}, \quad (2.264)$$

где  $t'_{об} = \Omega' / L'$ ,  $t''_{об} = \Omega'' / L''$  – времена задержки обменников.

Для простоты положим, что

$$\frac{\Omega'}{L'} = \frac{\Omega''}{L''} = \frac{\Omega}{L} = t_{об}. \quad (2.265)$$

В дальнейших преобразованиях воспользуемся связями, которые легко получить из уравнения симметричной ( $\theta = 1/2$ ) раздельной ступени в предположении слабого обогащения ( $\alpha_{ij}^{kl} - 1 = \varepsilon_{ij}^{kl} \ll 1$ , где  $\alpha_{ij}^{kl}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{kl}$  – коэффициенты разделения и обогащения  $ij$ -компонента относительно  $kl$ -компонента соответственно):

$$c'_{ij} - c_{ij} = \frac{1}{2} \delta c_{ij}, \quad (2.266)$$

$$c_{ij} - c''_{ij} = \frac{1}{2} \delta c_{ij}, \quad (2.267)$$

$$\delta c_{ij} = c_{ij} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_{ij}^{kl} c_{kl}, \quad (2.268)$$

$$x'_i - x_i = \frac{1}{2} \delta x_i, \quad (2.269)$$

$$x_i - x''_i = \frac{1}{2} \delta x_i, \quad (2.270)$$

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^{m_2} c_{ij} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_{ij}^{kl} c_{kl}, \quad (2.271)$$

$$y'_j - y_j = \frac{1}{2} \delta y_j \quad (2.272)$$

$$y_j - y''_j = \frac{1}{2} \delta y_j, \quad (2.273)$$

$$\delta y_j = \sum_{i=1}^{m_1} c_{ij} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_{ij}^{kl} c_{kl}. \quad (2.274)$$

С учетом (2.262) – (2.274) обозначая порядок величин  $\varepsilon_{ij}$  через  $\tilde{\varepsilon}$  ( $\tilde{\varepsilon} \ll 1$ ), после несложных преобразований в выражении (2.262) член, описывающий изотопный обмен, с точностью до членов порядка  $\tilde{\varepsilon}^2$  приводим к виду

$$J_{ij}^{n.o.} = L \left[ c_{ij} - x_i y_j \right] \left[ 1 - \exp(\gamma t_{об}) \right]. \quad (2.275)$$

Уравнение неразрывности для  $ij$ -компонента в сечении каскада между ступенями с номерами  $s$  и  $s+1$  запишется

$$\Omega(s) \frac{\partial c_{ij}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial s} J_{ij}(s, t) + J_{ij}^{н.о.}(s, t), \quad (2.276)$$

где  $\Omega(s)$  – количество разделяемого вещества в ступени с номером  $s$  (задержка), величина которого на каждой ступени не зависит от времени;  $J_{ij}$  – поток  $ij$ -компонента через рассматриваемое сечение каскада;  $J_{ij}^{н.о.}$  – источник «наработки» молекул  $ij$  сорта молекул, обусловленный изотопным обменом в рассматриваемом сечении каскада в момент времени  $t$ .

Перенос компонента  $ij$  для обогащительной части каскада можно записать в виде:

$$J_{ij} = \frac{L(s)}{2} \left[ c_{ij} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_{ij}^{kl} c_{kl} - \frac{\partial c_{ij}}{\partial t} \right] + P c_{ij}, \quad (2.277)$$

величина  $J_{ij}^{н.о.}$  определяется соотношением (2.275).

Систему уравнений каскада для стационарного случая и отдельной секции ПСК в обогащительной части каскада получают путем подстановки (2.275) и (2.277) в (2.276), приравнявая нулю частную производную по времени и считая, что выполняется условие  $L = \text{const}$ :

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \frac{d^2 c_{ij}}{ds^2} &= \frac{L}{2} \frac{dc_{ij}}{ds} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_{ij}^{kl} c_{kl} + c_{ij} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_{ij}^{kl} \frac{dc_{kl}}{ds} + \\ &+ P \frac{dc_{ij}}{ds} + L [c_{ij} - x_i y_i] [1 - \exp(-\gamma t_{об})]. \end{aligned} \quad (2.278)$$

В отсутствие изотопного обмена ( $\gamma=0$ ) система (2.278) легко преобразуется к виду

$$\frac{dc_{ij}}{ds} = c_{ij} \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{l=1}^{m_2} \varepsilon_{ij}^{kl} c_{kl} - \frac{2P(c_{ij}^P - c_{ij})}{L}, \quad (2.279)$$

где  $c_{ij}^P$  – концентрации  $ij$ -го компонента в потоке отбора.



Учитывая (2.269) – (2.271) и записывая закон сохранения вещества для изотопов элемента  $X$ , получаем

$$\frac{dx_k}{ds} = \sum_{r,i,j} \varepsilon_{ij}^{kr} c_{ij} - \frac{2P(x_k^P - x_k)}{L}, \quad (2.280)$$

где  $k = 1, \dots, m_1$ , а  $x_k^P$  – концентрация  $k$ -го изотопа элемента  $X$  в потоке отбора.

В предельном случае бесконечной скорости обмена ( $\gamma = \infty$ ) имеем

$$c_{kr} = x_k y_r. \quad (2.281)$$

Заменяя в (2.280)  $\varepsilon_{ij}^{kr} = \varepsilon_{kj}^{kr} + \varepsilon_{ij}^{kj}$  и используя условие (2.281) с

учетом тождества  $\sum_{r,i,j} \varepsilon_{kj}^{kr} c_{kr} c_{ij} = 0$ , находим

$$\frac{dx_k}{ds} = x_k \sum_{i,j} \varepsilon_{ij}^{kj} x_i y_j - \frac{2P(x_k^P - x_k)}{L}, \quad (2.282)$$

$$k = 1, \dots, m_1.$$

Аналогично записываются уравнения для изотопов элемента  $Y$ .

Таким образом, в случае бесконечно большой скорости обмена в смеси двухатомных молекул процесс разделения в каскаде описывается двумя подсистемами, имеющими такой же вид, как и в случае нулевой скорости изотопного обмена. Отличие заключается в том, что при нулевой скорости обмена система уравнений каскада (2.279) записывается относительно концентраций компонентов смеси (молекул), а при бесконечной скорости обмена – относительно концентраций изотопов (2.282). Отметим, что случай бесконечной скорости обмена интересен тем, что позволяет определить предельное влияние обменных процессов на эффект разделения.

Обозначим

$$z = \tilde{\varepsilon} s, \quad \chi = \tilde{\varepsilon} L / 2, \quad E_{ij}^{kr} = \frac{\varepsilon_{ij}^{kr}}{\tilde{\varepsilon}}, \quad \Psi = \frac{2}{\tilde{\varepsilon}^2} [1 - \exp(\gamma t_{o\delta})].$$

С учетом

введенных обозначений система (2.278) примет вид

$$\frac{d^2 c_{ij}}{dz^2} = \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{r=1}^{m_2} E_{ij}^{kr} \frac{dc_{kr}}{dz} + \frac{P}{\chi} \frac{dc_{ij}}{dz} + \Psi (c_{ij} - x_i y_j). \quad (2.283)$$

Первые два члена в правой части уравнения (2.283) описывают изменение концентраций компонентов под воздействием основного разделительного процесса, третий член обусловлен конвективным переносом, а четвертый – изменением концентраций вследствие изотопного обмена.

Система уравнений для секции ПСК, расположенной в обеднительной части каскада, имеет вид, аналогичный уравнению (2.283) с заменой  $P$  на  $-W$ :

$$\frac{d^2 c_{ij}}{dz^2} = \sum_{k=1}^{m_1} \sum_{r=1}^{m_2} E_{ij}^{kr} \frac{dc_{kr}}{dz} - \frac{W}{\chi} \frac{dc_{ij}}{dz} + \Psi(c_{ij} - x_i y_j). \quad (2.284)$$

Систему уравнений (2.283) – (2.284) целесообразно интегрировать от концов каскада к сечению подачи потока питания (слева –  $z^{f^-}$ , справа –  $z^{f^+}$ ) до выполнения с заданной точностью следующих условий:

$$\left. \frac{dc_{ij}}{dz} \right|_{z^{f^-}} - \left. \frac{dc_{ij}}{dz} \right|_{z^{f^+}} = \frac{2F}{\varepsilon_0 L_f} [c_{ij}^F - c_{ij}(z^f)], \quad (2.285)$$

где  $i = 1, \dots, m_1$ ,  $j = 1, \dots, m_2$ ,

$L_f$  – поток на входе в ступень питания (головной поток каскада),

$c_{ij}^F$  – концентрация  $ij$ -го компонента в потоке питания.

Для расчета распределения концентраций компонентов по длине ПСК для случаев  $\gamma=0$  и  $\gamma=\infty$  можно использовать методику, описанную в разделах 2.3.2-2.3.3. Для промежуточных значений  $\gamma$  применяют стандартные методики, использующие итерационные процедуры и численное интегрирование систем дифференциальных уравнений второго порядка. При этом в качестве начальных приближений для концентраций компонентов на концах каскада целесообразно использовать результат расчета для случая  $\gamma=0$ .

Влияние изотопного обмена на процесс обогащения изотопов  $^{18}\text{O}$  и  $^{15}\text{N}$  изучали в работах [29-31, 33] на примере низкотемпературной дистилляции оксида азота  $\text{NO}$ , состоящего из следующих, различающихся изотопным составом молекул:  $^{14}\text{N}^{16}\text{O}$ ,  $^{14}\text{N}^{17}\text{O}$ ,  $^{14}\text{N}^{18}\text{O}$ ,  $^{15}\text{N}^{16}\text{O}$ ,  $^{15}\text{N}^{17}\text{O}$ ,  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$ . Природные концентрации компонентов смеси легко рассчитать по соотношениям (2.254), учитывая природное содержание изотопов азота: для  $^{14}\text{N}$   $x_1=99,632\%$ , для  $^{15}\text{N}$

$x_2=0,368$  % и кислорода: для  $^{16}\text{O}$   $y_1=99,757$  %, для  $^{17}\text{O}$   $y_2=0,038$  %, для  $^{18}\text{O}$   $y_3=0,205$  % (см. табл. 2.8).

В табл. 2.8 через  $\varepsilon_{ij}^{11}$  обозначен коэффициент обогащения  $ij$ -го компонента относительно 11-го компонента ( $^{14}\text{N}^{16}\text{O}$ ).

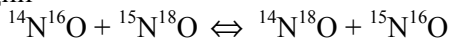
Изотопный обмен в системе NO может осуществляться как вынужденно (за счет наличия обменников на ступенях каскада), либо спонтанно (из-за наличия катализаторов или химических примесей). Установлено, что если разделяемое вещество – NO – химически чистое, то изотопный обмен между компонентами смеси отсутствует. Поскольку концентрации компонентов  $^{15}\text{N}^{17}\text{O}$  и  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$  в исходной смеси пренебрежимо малы, то в этом приближении задача сводится к разделению в каскаде 4-компонентной смеси, причем крайними компонентами будут молекулы  $^{14}\text{N}^{16}\text{O}$  и  $^{14}\text{N}^{18}\text{O}$ , а промежуточным компонентом молекула  $^{15}\text{N}^{16}\text{O}$ . Это означает, что в 3-поточном каскаде возможно получение высокообогащенного (>90%) изотопа  $^{18}\text{O}$ , чего нельзя сказать об изотопе  $^{15}\text{N}$  [8].

Таблица 2.8

Природные концентрации и относительные коэффициенты обогащения молекулярной смеси NO (низкотемпературная дистилляция,  $T=120\text{K}$ )

| Номер компонента | Молекула                     | Концентрация $c_{ij}$ ,<br>(мольные доли) | $\varepsilon_{ij}^{11}$ |
|------------------|------------------------------|---|-------------------------|
| 11               | $^{14}\text{N}^{16}\text{O}$ | 0,9939488                                 | 0,000                   |
| 12               | $^{14}\text{N}^{17}\text{O}$ | $0,36865 \cdot 10^{-3}$                   | 0,017                   |
| 13               | $^{14}\text{N}^{18}\text{O}$ | $0,20325 \cdot 10^{-2}$                   | 0025                    |
| 21               | $^{15}\text{N}^{16}\text{O}$ | $0,36412 \cdot 10^{-2}$                   | 0,034                   |
| 21               | $^{15}\text{N}^{17}\text{O}$ | $0,13500 \cdot 10^{-5}$                   | 0,042                   |
| 21               | $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$ | $0,74500 \cdot 10^{-5}$                   | 0,059                   |

Картина меняется, если на ступенях каскада начинает идти внутрифазный изотопный обмен. Дело в том, что на ступенях каскада в ходе реакции



изотопы  $^{15}\text{N}$  и  $^{18}\text{O}$  переходят из молекул  $^{14}\text{N}^{18}\text{O}$  и  $^{15}\text{N}^{16}\text{O}$  в крайнюю молекулу  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$ , имеющую наибольшее значение относительного

коэффициента обогащения. Если изотопный обмен идет в каждой ступени, то в них происходит образование новых молекул  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$  и при соответствующем выборе параметров каскада рост переноса этого компонента к «тяжелому» концу каскада, приводящий к увеличению концентрации изотопа  $^{15}\text{N}$  в потоке отбора. В то же время увеличение концентрации компонента  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$  происходит за счет уменьшения числа молекул  $^{14}\text{N}^{18}\text{O}$ , в составе которых до включения обменного процесса осуществлялось обогащение изотопа  $^{18}\text{O}$ . Поскольку в обменном процессе число молекул, содержащих изотоп  $^{18}\text{O}$  и переносимых к «тяжелому» (отборному) концу каскада, не изменяется, этот процесс не должен приводить к увеличению концентрации этого изотопа.

Приведенные соображения иллюстрируют результаты численного исследования низкотемпературной дистилляции в ПСК, параметры которого приведены в табл. 2.9\*\* и соответствуют параметрам описанной в литературе каскадной установки для получения продукта, обогащенного по изотопу  $^{18}\text{O}$  до концентрации 90% [34].

На рис. 2.21 и 2.22 приведены результаты численных расчетов концентраций компонентов и изотопов при фиксированных значениях потоков в обоганительной и обеднительной

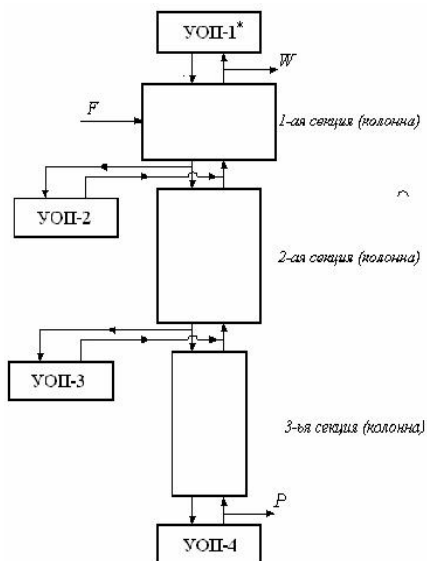


Рис. 2.20. Прямоугольно-секционированный каскад для получения высокообогащенного изотопа  $^{18}\text{O}$  методом низкотемпературной дистилляции

\* УОП – устройство для обращения потоков.

\*\* В рассматриваемом примере за отборный принят «тяжелый» конец каскада.

секциях каскада и потоке отвала от величины отношения  $2P/L_1$  ( $L_1$  – поток в 1-й секции) для случаев нулевой и бесконечной скорости изотопного обмена во всем объеме). Расчеты проведены в 4-компонентном приближении, считая, что компоненты  $^{14}\text{N}^{17}\text{O}$  и  $^{15}\text{N}^{17}\text{O}$  в смеси отсутствуют.

Таблица 2.9

Параметры ПСК для получения высокообогащенного изотопа  $^{18}\text{O}$  методом низкотемпературной дистилляции

|                                       | 1-ая секция<br>(колонна) |                   | 2-ая секция<br>(колонна) | 3-я секция<br>(колонна) |
|---------------------------------------|--------------------------|-------------------|--------------------------|-------------------------|
|                                       | отвальная<br>часть       | отборная<br>часть |                          |                         |
| Число теоретических ступеней          | 89                       | 178               | 394                      | 444                     |
| Относительное значение потока, $L/2P$ | 22,74                    | 22,74             | 4,37                     | 1,68                    |

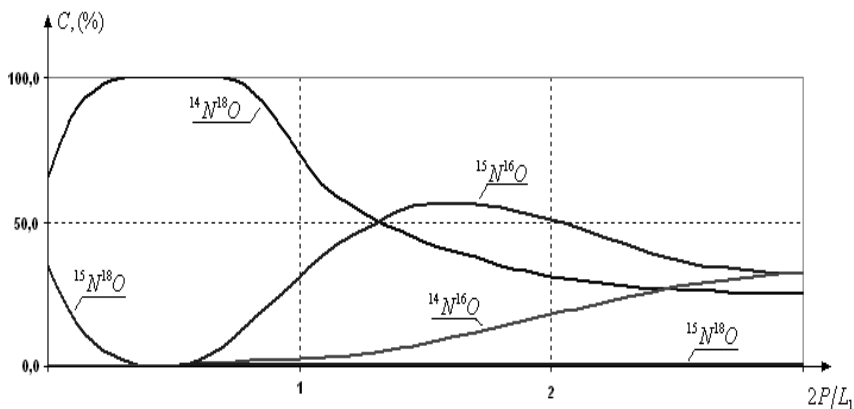


Рис. 2.21 Зависимости концентраций компонентов (в 4-компонентном приближении) в потоке отбора ПСК от величины безразмерного потока отбора  $2P/L_1$  для низкотемпературной дистилляции NO для случая  $\gamma=0$

Как видно из приведенных зависимостей, изотопный обмен слабо влияет на концентрацию  $^{18}\text{O}$  в отборе. Вместе с тем, в диапазоне  $2 \cdot 10^{-3} \leq \frac{2P}{L_1} \leq 1 \cdot 10^{-2}$  изотопный обмен может существенно влиять на

величину концентрации изотопа  $^{15}\text{N}$  в потоке отбора каскада. Это обусловлено следующей особенностью разделяемой смеси: если изотоп  $^{18}\text{O}$  содержится в компонентах  $^{14}\text{N}^{18}\text{O}$  и  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$ , которые накапливаются на «тяжелом» конце каскада, то изотоп  $^{15}\text{N}$  кроме самой тяжелой молекулы  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$  содержится в промежуточном компоненте  $^{15}\text{N}^{16}\text{O}$ .

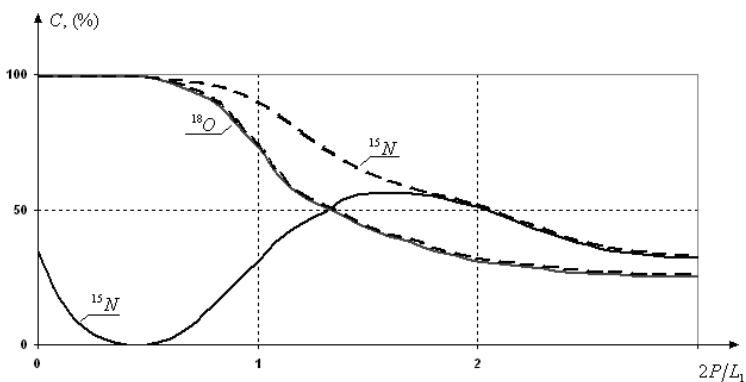


Рис. 2.22 Зависимости концентраций изотопов в потоке отбора ПСК от величины безразмерного потока отбора  $2P/L_1$  для низкотемпературной дистилляции NO в отсутствие изотопного обмена ( $\gamma=0$ , сплошные линии) и бесконечной скорости обмена ( $\gamma=\infty$ , штриховые линии)

В связи с этим обстоятельством зависимость концентрации изотопа  $^{18}\text{O}$  от величины параметра  $2P/L_1$  при  $\gamma=0$  имеет плавно убывающий характер и асимптотически приближается к значению концентрации в потоке питания. Зависимость же концентрации изотопа  $^{15}\text{N}$  в потоке отбора от величины  $2P/L_1$  при  $\gamma=0$  имеет более сложный характер, проходя последовательно через минимум, максимум и далее устремляясь к своему асимптотическому значению с увеличением  $2P/L_1$ . В диапазоне  $2 \cdot 10^{-3} \leq \frac{2P}{L_1} \leq 1 \cdot 10^{-2}$  (область минимума концентрации  $^{15}\text{N}$  при  $\gamma=0$ ) протекание реакций изотопного

обмена, как следует из зависимостей на рис.2.22 должно привести к существенному обогащению изотопа  $^{15}\text{N}$  и к решению задачи одновременного получения высокообогащенных изотопов  $^{18}\text{O}$  и  $^{15}\text{N}$ .

Согласно [34], устойчивость каскада, использующего метод низкотемпературной дистилляции  $\text{NO}$ , может обеспечить высокая степень очистки исходной смеси от высших окислов азота ( $\text{NO}_2$  и других). С другой стороны, поскольку присутствие этих примесей катализирующим образом влияет на протекание изотопно-обменных реакций между компонентами разделяемой смеси, целесообразно обеспечить условия для эффективного обмена, изолируя его от разделительного процесса, например, путем использования обменных устройств, расположенных вне пределов разделительных секций каскада (на их «стыках»). Очевидно, что применение обменных устройств эффективно только в том случае, когда обеспечиваемое ими влияние на разделительный процесс сравнимо с влиянием изотопного обмена во всем объеме каскада. На рис. 2.23 приведены распределения концентраций компонентов разделяемой смеси вдоль ПСК для случая  $2P/L_1=8,81 \cdot 10^{-3}$  при разных скоростях изотопного обмена, протекающего на «стыках» секций каскада.

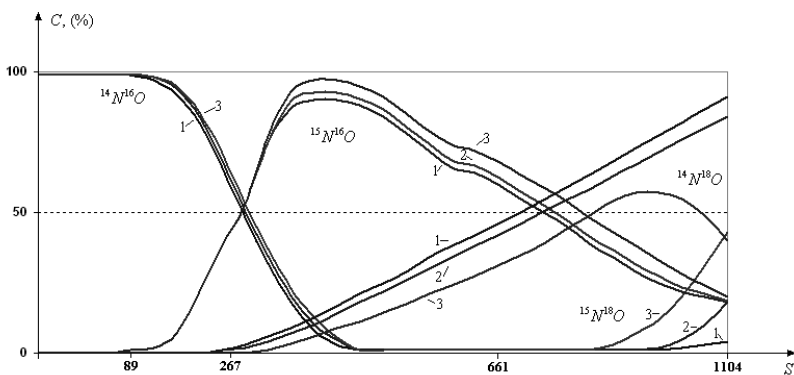


Рис. 2.23 Распределения концентраций компонентов разделяемой смеси вдоль каскада для случаев: 1 –  $\gamma=0$ ; 2 –  $\gamma \sim 1$ ; 3 –  $\gamma = \infty$

Зависимости изменения концентраций на отборном («тяжелом») конце каскада от параметра  $\Psi \tilde{\epsilon}^2$ , характеризующего скорость обменного процесса, построены на рис. 2.24. Под влиянием изотопного обмена в ступенях с обменными устройствами происходит при-

ближение концентраций компонентов к соответствующим равновесным значениям. При этом, поскольку равновесное значение концентрации компонента  $^{15}\text{N}^{18}\text{O}$  выше исходного, то изотопный обмен ведет к увеличению его концентрации в граничной ступени и в области, прилегающей к ней, а дальнейшее обогащение к отборному концу каскада приводит к росту концентрации изотопа  $^{15}\text{N}$  от 12% до 50-60 %.

Роль обмена может оказаться существенной в том случае, если обменные устройства, установлены в тех сечениях каскада, где, во-первых, отклонение концентраций реагирующих молекул от соответствующих равновесных значений достаточно велико (проценты или десятки процентов), во-вторых, длина и потоки части каскада, расположенной между границей области, в которой протекают обменные реакции, и отборным концом каскада таковы, чтобы обогащение от новых концентраций, полученных в результате реакций изотопного обмена, было заметно. В частности, в примере на рис. 2.25 размещение обменных устройств в сечении между 2-й и 3-й секциями каскада приводит к увеличению вклада обмена, а концентрация изотопа  $^{15}\text{N}$  в потоке отбора при этом возрастает до 90% при сохранении концентрации изотопа  $^{18}\text{O}$  также не ниже 90%.

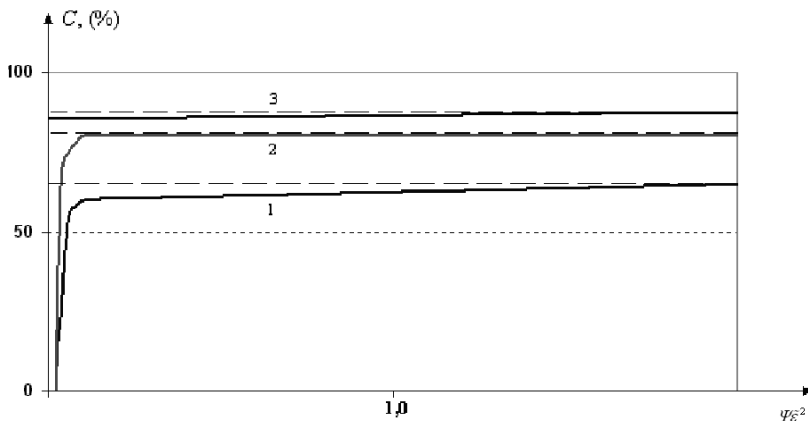


Рис. 2.24 Зависимости концентраций целевых изотопов в потоке отбора от параметра  $\Psi\epsilon^2$ : 1 —  $^{15}\text{N}$ , обменники расположены на стыке 1-й и 2-й колонн каскада; 2 —  $^{15}\text{N}$ , обменники на стыке 2-й и 3-й колонн; 3 —  $^{18}\text{O}$  для обоих случаев



## 2.4. Каскады с немалыми обогащениями на ступенях

### 2.4.1. Основные уравнения

Рассмотрим противоточный симметричный каскад, работающий в стационарном режиме и состоящий из  $N$  ступеней при немалых (произвольных) обогащениях на каждой из них. При разделении  $m$ -компонентной смеси внешними параметрами каскада являются потоки питания  $F$ , отбора  $P$  и отвала  $W$ , а также соответствующие концентрации и  $c_{iW}$  ( $i = \overline{1, m}$ ) (см. рис.2.2). Внутренние параметры каскада – потоки  $L_s, L'_s = \theta_s L_s, L''_s = (1 - \theta_s) L_s$ , коэффициенты деления потока  $\theta_s$  и концентрации  $c_i(s), c'_i(s), c''_i(s)$ . Параметры каждой ступени связаны уравнениями баланса вещества и каждого компонента:

$$\begin{aligned} L_s &= L'_s + L''_s, \\ L_s c_i(s) &= L'_s c'_i(s) + L''_s c''_i(s), \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (2.286)$$

Аналогичные соотношения справедливы для каскада в целом

$$F = P + W,$$

$$F c_{iF} = P c_{iP} + W c_{iW}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.287)$$

Уравнения (2.286), (2.287) легко преобразуются к виду

$$L'_{s-1} - L''_s = T_s, \quad (2.288)$$

$$L'_{s-1} c'_i(s-1) - L''_s c''_i(s) = J_{i,s}, \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{2, N} \quad (2.289)$$

или

$$\theta_{s-1} L_{s-1} - (1 - \theta_s) L_s = T_s, \quad (2.290)$$

$$\theta_{s-1} L_{s-1} c'_i(s-1) - (1 - \theta_s) L_s c''_i(s) = J_{i,s}, \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{2, N}. \quad (2.291)$$

Уравнения (2.288) – (2.291) характеризуются выполнением балансов между ступенями. Здесь  $T_s, J_{i,s}$  – транзитные потоки смеси и  $i$ -го компонента, рассчитываемые по внешним параметрам каскада

$$T_s = \begin{cases} -W, & 1 \leq s \leq f, \\ P, & f < s \leq N, \end{cases} \quad (2.292)$$

$$J_{i,s} = \begin{cases} -Wc_{iW}, & 1 \leq s \leq f \\ Pc_{iP}, & f < s \leq N, \quad i = \overline{1, m} \end{cases} \quad (2.293)$$

где  $f$  – номер ступени, на вход которой подают внешнее питание.

Внешние и внутренние параметры связаны граничными условиями

$$L_1'' = (1 - \theta_1)L_1 = W, \quad L_N' = \theta_N L_N = P, \quad (2.294)$$

$$c_i''(1) = c_{iW}, \quad c_i'(N) = c_{iP}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.295)$$

а концентрации изотопов, взятые в одинаковых потоках, дают в сумме единицу, т.е.

$$\sum_{j=1}^m c_j(s) = 1, \quad s = \overline{1, N}.$$

Если для всех ступеней заданы полные коэффициенты разделения  $q_{ij}(s)$ , то связь концентраций  $c_i'(s)$  и  $c_i''(s)$  легко найти, используя соотношения (2.11)

$$c_i''(s) = \frac{c_i'(s)}{\sum_{j=1}^m q_{ij}(s)c_j'(s)}, \quad (2.296a)$$

$$c_i'(s) = \frac{c_i''(s)}{\sum_{j=1}^m q_{ij}^{-1}(s)c_j''(s)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, N}. \quad (2.296b)$$

Если для каждого компонента коэффициент разделения задать по отношению к определенному (одному) компоненту, например с номером  $m$ , то соотношения (2.296) переписутся в виде

$$c_i''(s) = \frac{1}{q_{im}(s)} c_i'(s) / \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{jm}(s)} c_j'(s), \quad (2.297a)$$

$$c_i'(s) = \frac{q_{im}(s)c_i''(s)}{\sum_{j=1}^m q_{jm}(s)c_j''(s)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad s = \overline{1, N}. \quad (2.297b)$$

При расчете каскада заданного профиля (заданной конфигурации) входными параметрами задачи являются потоки

питания и отбора, числа  $N$  и  $f$ , концентрации компонентов в потоке питания  $c_{iF}$ , распределение потока  $L_s$ . В качестве неизвестных выступают концентрации компонентов в потоках отбора и отвала, а также распределение концентраций  $c_i(s)$  и коэффициента деления потока  $\theta_s$  по ступеням каскада. Как и в случае «слабого разделения», сложность решения этой задачи обусловлена, во-первых, нелинейностью уравнений (2.290), (2.291) и, во-вторых, трудностью определения приближений на концах каскада, которые, являясь граничными условиями, сами явно входят в эти уравнения.

Для того, чтобы система (2.290), (2.291) из  $mxN$  уравнений была замкнута, надо из числа неизвестных исключить распределение коэффициента деления потока  $\theta_s$  по ступеням каскада. При заданном значении одного из коэффициентов (например  $\theta_1$ ) остальные  $\theta_s$  при заданном распределении  $L_s$  определяются по соотношениям, которые легко получить из (2.290):

$$\theta_{s+1} = \begin{cases} 1 - \frac{W}{L_{s+1}} - \frac{\theta_s L_s}{L_{s+1}}, & s = 1, 2, \dots, f, \\ 1 + \frac{P}{L_{s+1}} - \frac{\theta_s L_s}{L_{s+1}}, & s = f, f+1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.298)$$

С практической точки зрения наибольший интерес представляют прямоугольные (ПК) и прямоугольно-секционированные (ПСК) каскады. Рассмотрение прямоугольного каскада накладывает условие одинаковости потоков  $L_s$ , т.е.

$$L_s = L, \quad 1 \leq s \leq N, \quad (2.299)$$

для выполнения которого на концах каскада организуется «закрутка» в виде подачи части потоков, выходящих с крайних ступеней ( $s = 1$  и  $s = N$ ) в их питание.

$$\begin{cases} T'_3 = L'_1 - W = (1 - \theta_1)L_1 - W, \\ T_3 = L'_N - P = \theta_N L - P. \end{cases} \quad (2.300)$$

Распределение коэффициента деления потока  $\theta_s$  может быть рассчитано по формулам (1.262) или по формулам (1.263).

Если расчет прямоугольного каскада производить от отвального конца ( $s = 1$ ) к отборному концу ( $s = N$ ), то систему (2.290) – (2.291), с учетом (2.297б) и в предположении постоянства полных коэффициентов разделения по длине каскада, целесообразно представить в виде

$$c_i''(s) = \frac{c_i''(s-1)}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}(s)} c_j''(s-1)} \left( 1 + \frac{T_s}{(1-\theta_s)L} \right) - \frac{J_{i,s}}{(1-\theta_s)L}, \quad (2.301)$$

$$i = \overline{1, m}, \quad s = 2, 3, \dots, N.$$

где  $T_s$  и  $J_{i,s}$  определяются соотношениями (2.292) и (2.293).

Если же расчет каскада осуществляют от его концов к точке подачи питания, то систему (2.290)-(2.291) следует использовать в виде:

для отборной части каскада

$$c_i'(s) = \frac{c_i'(s+1)}{\sum_{j=1}^m q_{ij} c_j'(s+1)} \left( 1 - \frac{P}{\theta_s L} \right) + \frac{P c_{iP}}{\theta_s L}, \quad (2.302)$$

для отвальной части каскада

$$c_i''(s) = \frac{c_i''(s-1)}{\sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} c_j''(s-1)} \left( 1 - \frac{W}{(1-\theta_{s-1})L} \right) - \frac{W c_{iW}}{(1-\theta_{s-1})L}, \quad (2.303)$$

При расчете прямоугольно-секционированных каскадов следует учитывать то обстоятельство, что в связи с различием потоков в двух соседних секциях, часть  $\lambda$  обогащенного или обедненного потока, выходящего из последней (или первой) ступени секции с большим потоком, направляется на ее вход, как это показано на рис.2.25 для двух возможных вариантов соединения  $l$ -й и  $l+1$ -й секции в каскаде.

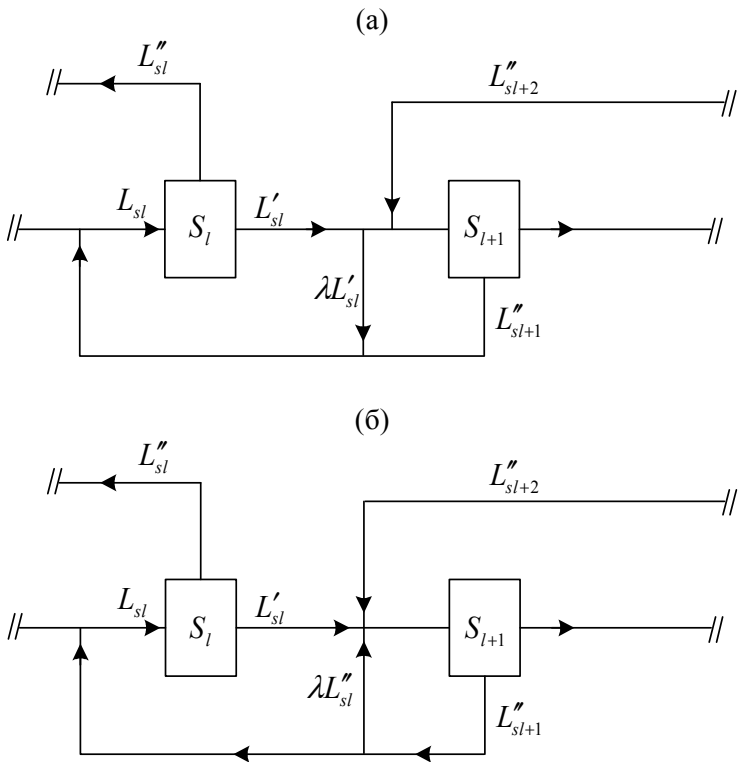


Рис. 2.25. Схема соединения секций в каскаде: (а) –  $L_{sl} > L_{sl+1}$  ;

(б) –  $L_{sl} < L_{sl+1}$

Из уравнений покомпонентного баланса и соотношений (2.297а), (2.297б) можно получить следующие условия на стыке секций в каскаде:

для отборной части каскада (рис.2.25а)

$$c'_i(s_i) = \frac{(1 - \theta_{s_{i+1}}) L_{s_{i+1}} c'_i(s_i + 1) \left[ \sum_{j=1}^m q_{ij} c'_j(s_i + 1) \right]^{-1} + P c_{iP}}{(1 - \lambda) \theta_{s_i} L_{s_i}}, \quad i = \overline{1, m} \quad (2.304)$$

$$\theta_{s_l} = \frac{L_{s_l}}{L_{s_{l+1}}} \cdot \frac{\left[ (1 - \theta_{s_{l+1}}) + \frac{P}{L_{s_{l+1}}} \right]}{(1 - \lambda)}; \quad (2.305)$$

для отвальной части каскада (рис 2.25б)

$$c''_i(s_{l+1}) = \frac{(1 - \lambda)\theta_{s_l} L_{s_l} c'_i(s_l) \left[ \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} c'_j(s_l) \right]^{-1} + Wc_{iW}}{(1 - \theta_{s_{l+1}}) L_{s_{l+1}}}, \quad (2.306)$$

$$\theta_{s_{l+1}} = \frac{L_{s_l}}{L_{s_{l+1}}} \cdot \frac{\left( \theta_{s_l} + \frac{W}{L_{s_l}} \right)}{(1 - \lambda)}. \quad (2.307)$$

Рассматривая условия на стыке секций в точке подачи питания (рис. 2.26), из уравнений многокомпонентного баланса и соотношений (2.296) можно получить:

вариант (а) (рис. 2.26):

$$\theta_{f-1} L_{f-1} c''_i(f-1) \left[ \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} c''_j(f-1) \right]^{-1} + Fc_{iF} = \quad (2.308)$$

$$= (1 - \lambda)(1 - \theta_f) L_f c'_i(f-1) \left[ \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} c'_j(f) \right]^{-1} + Pc_{iP},$$

$$\theta_{f-1} L_{f-1} = L_f (1 - \theta_f)(1 - \lambda), \quad (2.309)$$

вариант (б) (рис. 2.26):

$$(1 - \lambda)\theta_{f-1} L_{f-1} c''_i(f-1) \left[ \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} c''_j(f-1) \right]^{-1} + Fc_{iF} = \quad (2.310)$$

$$= (1 - \theta_f) L_f c'_i(f) \left[ \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} c'_j(f) \right]^{-1} + Pc_{iP},$$

$$\theta_{f-1} L_{f-1} = L_f (1 - \theta_f)(1 - \lambda). \quad (2.311)$$

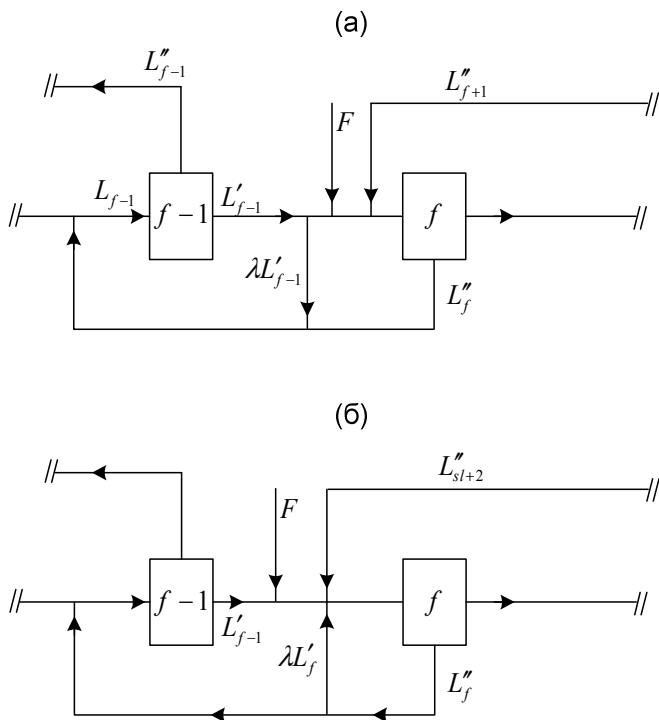


Рис. 2.26. Схема соединения ступеней в каскаде в точке подачи питания:

(а) –  $(L_{f-1} + F) > L_f$ , (б) –  $(L_{f-1} + F) < L_f$

Если для каждой секции ПСК обеспечить постоянство коэффициента деления потока, то значения  $\lambda$  должны быть выбраны:

для отборной части каскада

$$\lambda = 1 - \frac{L_{sl+1} + P}{L_{sl} + P},$$

при этом

$$\theta_s = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{P}{L_{sl}} \right);$$

для отвальной части каскада

$$\lambda = 1 - \frac{L_{s_{l+1}} + W}{L_{s_l} + W}, \quad (2.312)$$

при этом

$$\theta_s = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{W}{L_{s_l}} \right);$$

в точке подачи питания

$$\theta_{f-1} = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{W}{L_{f-1}} \right), \quad (2.313)$$

$$\theta_f = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{P}{L_f} \right), \quad (2.314)$$

при этом вариант (а) (рис. 2.26)

$$\lambda = 1 - \frac{L_f + P}{L_{f-1} + P}, \quad (2.315)$$

вариант (б) (рис. 2.26)

$$\lambda = 1 - \frac{L_{f-1} + W}{L_f + W}. \quad (2.316)$$

#### **2.4.2. Обзор численных методов решения системы уравнений переноса в каскадах заданного профиля**

Для расчета каскадов заданного профиля, как правило, ПК и ПСК, используют различные итерационные методы с уточнением ориентировочно принятых приближений, либо квазилинеаризацию уравнений каскада и совместное их решение с уравнениями покомпонентного баланса. Очевидно, что эффективность метода определяется его устойчивостью к заданию начальных приближений для конечных концентраций и сходимостью итерационного процесса.

Обзор методов расчета можно свести к следующим основным случаям.



### 2.4.2.1. «Классический» итерационный метод [35, 36]

Рассмотрим применение метода на примере прямоугольного каскада, расчет которого производится от отвального конца к отборному. Алгоритм расчета имеет следующий вид.

1. Задают  $\theta_1$  (например  $\theta_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{W}{L} \right)$ ) по формулам (1.262)

или (1.263) находят распределение  $\theta_s$  по длине каскада.

2. По соотношениям (2.300) определяют  $T_3$  и  $T'_3$ .

3. Задают начальные приближения  $c''_i(1)$ , например,  $c''_i(1) = c_{iF}$ .

4. Последовательно с использованием рекуррентной формулы (2.301) определяют  $c''_i(s)$  на всех ступенях, включая последнюю ( $s = N$ ).

5. По соотношению (2.296 б) или (2.297 б) находят все  $c'_i(N)$ .

6. Проверяют выполнены ли условия материального баланса

$$Pc'_i(N) + Wc''_i(1) - Fc_{iF}, \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.317)$$

7. Если условия баланса (2.296) на  $\nu$ -ом шаге итерации не выполнены, то начальные приближения для следующего  $(\nu + 1)$ -ого шага задают в виде

$$(c''_i(1))^{\nu+1} = \omega \frac{Fc_{iF}}{P \frac{(c'_i(N))^\nu}{(c'_i(1))^\nu}} + (1 - \omega) (c'_i(1))^\nu, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.318)$$

где  $\omega$  – коэффициент, находящийся в пределах от 0 до 1.

8. Шаги (2.286) – (2.289) ÷ (2.286) – (2.292) повторяют до тех пор, пока (2.317) не будут выполнены с заданными точностями.

«Классический» метод весьма чувствителен к выбору начальных приближений, что приводит либо к необходимости разработки сложных и громоздких алгоритмов для их определения, либо к значительным затратам машинного времени.

### 2.4.2.2. «Матричный» метод [37, 38]

В работе [37] система (2.291), (2.294) представлена в виде

$$L_1 c_i(1) - (1 - \theta_2) L_2 c_i'(2) - [W - (1 - \theta_1) L_1] c_{iW} = 0, \quad (2.319)$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$L_s c_i(s) - \theta_{s-1} L_{s-1} c_i'(s-1) - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c_i''(s+1) - \delta_{sk} F c_{iW} = 0, \quad (2.320)$$

$$s = 2, 3, \dots, N-1, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$L_N c_i(N) - \theta_{N-1} L_{N-1} c_i'(N-1) - [P - \theta_N L_N] c_{iP} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.321)$$

где

$$\delta_{sk} = \begin{cases} 0, & s \neq k \\ 1, & s = k \end{cases}, \quad (2.322)$$

$$\begin{cases} c_i'(s) = f(c_i(s), \theta_s, L_s), \\ c_i''(s) = [c_i(s) - \theta_s c_i'(s)] / (1 - \theta_s). \end{cases} \quad (2.323)$$

Конкретный вид функциональной зависимости в системе (2.323) определяется используемым методом разделения и режимом работы каждой ступени (см. формулы (2.296) – (2.297)). Для замыкания системы (2.319) – (2.321) из  $m \times N$  уравнений, как и ранее, из числа неизвестных с помощью (2.298) исключаем коэффициенты деления потока на ступенях (один из коэффициентов  $\theta_s$  является свободным параметром).

Для решения системы (2.319) – (2.321) в работе [37] применен демпфированный метод Ньютона [39], в котором используется итеративный процесс в виде

$$F'(\mathbf{x}^v) \Delta \mathbf{x}^v = -\omega F(\mathbf{x}^v), \quad (2.324)$$

где  $F(\mathbf{x}^v)$  – значения левых частей системы (2.319) – (2.321) в точке с неизвестными координатами  $\mathbf{x}^v$ ;  $F'(\mathbf{x}^v)$  – матрица Якоби системы в этой же точке;  $\Delta \mathbf{x}^v = \mathbf{x}^{v+1} - \mathbf{x}^v$ ;  $\omega$  – коэффициент демпфирования. При такой записи определение нового приближения  $\mathbf{x}^{v+1}$  сводится к решению системы нелинейных уравнений вида  $\mathbf{A} \Delta \mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Для определения  $\Delta \mathbf{x}$  согласно [6] целесообразно использовать алгоритм Гауссова исключения с компактным хранением матрицы  $\mathbf{A}$  в оперативной памяти. Компактная организация хранения матрицы  $A$  возможна, поскольку, как видно из уравнений системы (2.319) – (2.321), матрица Якоби  $F'(\mathbf{x}^v)$  принадлежит к системе ленточных матриц с

шириной ленты  $2(2m - 1) + 1$ , причем в процессе итерации (2.324) ленточная структура матрицы сохраняется [40]. Алгоритм должен быть составлен так, чтобы элементы Якобиана  $F'(\mathbf{x})$ , не входящие в ленту указанной ширины, в вычислениях не участвовали. Это позволяет в несколько раз сократить время вычислений. Элементы якобиана предпочтительно вычислять аналитически, поскольку при этом скорость сходимости итеративного процесса (2.324) квадратична. Если вид функциональной зависимости для  $c'_i(s)$  в системе (2.323) не позволяет получить аналитическое выражение для производных, то в алгоритме элементы якобиана следует вычислять численно по двухточечной схеме.

Схема расчета каскада заданного профиля по матричному методу включает в себя:

1. Задание исходных данных  $m, N, f, F, P, f(c_i(s), \theta_s, L_s), L_s, \theta_1$ .
2. Определение коэффициентов деления потоков на ступенях  $\theta_s$  ( $s = 2, 3, \dots, N$ ).
3. Решение системы уравнений (2.319) – (2.321).

Согласно [38] расчет каскада с двумя потоками питания различного состава и тремя потоками отбора, состоящего из 50-ти ступеней, при разделении пятикомпонентной модельной смеси заключается в решении системы (2.319) – (2.321) из 250 уравнений. Решение осуществляется за несколько итераций и требует около 30 секунд машинного времени для персональных компьютеров типа РС/АТ386. В качестве начальных приближений для неизвестных концентраций на каждой ступени были взяты концентрации компонентов в одном из потоков питания. Расчеты прямоугольно-секционированных каскадов, предназначенных для разделения различных многокомпонентных смесей показали, что при указанном выборе начальных приближений расчет неизвестных концентраций с точностью не ниже 0,1% требует не более 10 итераций.

2.4.2.3. Метод, основанный на решении системы уравнений переходного (нестационарного) процесса в каскаде [36]

Суть метода: для нахождения конечных концентраций  $c_{iP}$ ,  $c_{iW}$  противоточного симметричного каскада заданного профиля решают систему уравнений переходного (нестационарного) процесса применительно к случаю немалых обогачений на ступенях. [41]. Считаем, что с момента запуска каскада включены расчетные значения внешних потоков  $P$ ,  $W$  и  $F$ . Считая по-прежнему, что время установления гидравлических характеристик много меньше времени достижения стационарного накопления компонентов на ступенях и задержки ступеней не зависят от времени, систему уравнений каскада, описывающих переходной (нестационарный) процесс можно записать в виде

$$\theta_s L_s c'_i(s, t) - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_i(s+1, t) = J_{s,i}(t), \quad (2.325)$$

где  $J_{s,i}(t)$  – перенос  $i$ -го компонента через мысленную линию раздела между  $s$ -й и  $s+1$ -й ступенями;  $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $s = 1, 2, \dots, N-1$

$$c_i(s, t) = \theta_s c'_i(s, t) + (1 - \theta_s) c''_i(s, t), \quad (2.326)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

$$H_s \frac{\partial c_i(s, t)}{\partial t} = J_{s-1,i} - J_{s,i} + \delta(s, f) F c_i^F \quad (2.327)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, N$$

Граничные условия в рассматриваемом случае могут быть записаны в следующем виде

$$J_{N,i} = P c'_{iP}(N, t), J_{0,i} = -W c''_{iW}(1, t), \quad (2.328)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Подстановка (2.325), (2.326) и (2.328) в (2.327) дает

$$\begin{aligned} H_s \frac{\partial c_i(s, t)}{\partial t} = & [1 - \delta(s, 1)] \{ \theta_{s-1} L_{s-1} c'_i(s-1, t) - (1 - \theta_s) L_s c''_i(s, t) \} - \\ & - [1 - \delta(s, N)] \{ \theta_s L_s c'_i(s, t) - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} c''_i(s+1, t) \} + \delta(s, f) F c_{iF} - \\ & - \delta(s, N) P c'_{iP}(N, t); \end{aligned}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N, \quad (2.329)$$

где 
$$\delta(s, j) = \begin{cases} 0, & j \neq s \\ 1 & j = s. \end{cases} \quad (2.330)$$

Подставляя (2.296а) в (2.326), получим

$$c_i(s, t) = \theta_s c'_i(s, t) + (1 - \theta_s) \frac{c'_i(s, t)}{\sum_{j=1}^m q_{ij} c'_j(s, t)}, \quad (2.331)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N.$$

Дифференцирование уравнения (2.331) по  $t$  дает:

$$\frac{\partial c_i(s, t)}{\partial t} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial c_i(s, t)}{\partial c'_j(s, t)} \cdot \frac{\partial c'_j(s, t)}{\partial t}; \quad (2.332)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N,$$

где 
$$\frac{\partial c_i(s, t)}{\partial c'_j(s, t)} = a(i, j) = \begin{cases} \theta_s + (1 - \theta_s) \frac{\sum_{l=1}^m q_{il} c'_l(s, t) - c'_i(s, t)}{\left( \sum_{l=1}^m q_{il} c'_l(s, t) \right)^2}, & (i = j) \\ -(1 - \theta_s) \frac{q_{ij} c'_i(s, t)}{\left( \sum_{j=1}^m q_{ij} c'_j(s, t) \right)^2}, & (i \neq j) \end{cases}$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N \quad (2.333)$$

Подставляя соотношения (2.296а) и (2.333) в (2.329), получаем

$$H_s \sum_{j=1}^m a(i, j) \frac{\partial c'_i(s, t)}{\partial t} = [1 - \delta(s, 1)] \left\{ \theta_{s-1} L_{s-1} c'_i(s-1) - (1 - \theta_s) L_s \frac{c'_i(s, t)}{\sum_{j=1}^m q_{jl} c'_l(s, t)} \right\} -$$

$$[1 - \delta(s, N)] \left\{ \theta_s L_s c'_i(s, t) - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} \frac{c'_i(s+1, t)}{\sum_{j=1}^m q_{jl} c'_j(s+1, t)} \right\} + \delta(s, f) F c_{iF} -$$

$$\delta(s, 1) W c'_i(1, t) - \delta(s, N) P c'_i(N, t);$$

$$i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N \quad (2.334)$$

Приближенное решение системы (2.334) основано на использовании явного метода Эйлера, согласно которому производные в (2.334) заменяют простейшими конечно-разностными формулами

$$\frac{\partial c'_i(s, t)}{\partial t} = \frac{[c'_i(s, t)]^{\nu+1} - [c'_i(s, t)]^\nu}{\Delta t}, \quad (2.335)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, N,$$

где  $[c'_i(s, t)]^\nu$  – значение соответствующей концентрации  $i$ -го компонента в потоке  $L_s$  на  $\nu$ -м «временном» шаге. С учетом (2.335) уравнения (2.334) преобразуются к виду

$$H_s \sum_{j=1}^m [a(i, j)]^\nu \frac{[c'_i(s, t)]^{\nu+1} - [c'_i(s, t)]^\nu}{\Delta t} = [1 - \delta(s, 1)] \cdot$$

$$\left\{ \theta_{s-1} L_{s-1} [c'_i(s-1, t)]^\nu - (1 - \theta_s) L_s \frac{[c'_i(s, t)]^\nu}{\sum_{j=1}^m q_{jl} [c'_j(s, t)]^\nu} \right\} - [1 - \delta(s, N)] \cdot \quad (2.336)$$

$$\left\{ \theta_s L_s [c'_i(s, t)]^\nu - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} \frac{[c'_i(s+1, t)]^\nu}{\sum_{j=1}^m q_{jl} [c'_j(s+1, t)]^\nu} \right\} +$$

$$+ \delta(s, f) F c_{iF} - \delta(s, N) P [c'_i(N, t)]^\nu;$$

Таким образом,

$$\frac{H_s}{\Delta t} \sum_{j=1}^m [a(i, j)]^\nu [c'_i(s, t)]^{\nu+1} = \frac{H_s}{\Delta t} \sum_{j=1}^m [a(i, j)]^\nu [c'_i(s, t)]^\nu +$$

$$+ [1 - \delta(s, 1)] \cdot \left\{ \theta_{s-1} L_{s-1} [c'_i(s-1, t)]^\nu - (1 - \theta_s) L_s \frac{[c'_i(s, t)]^\nu}{\sum_{j=1}^m q_{jl} [c'_j(s, t)]^\nu} \right\} - \quad (2.337)$$

$$- [1 - \delta(s, n)] \cdot \left\{ \theta_s L_s [c'_i(s, t)]^\nu - (1 - \theta_{s+1}) L_{s+1} \frac{[c'_i(s+1, t)]^\nu}{\sum_{j=1}^m q_{jl} [c'_j(s+1, t)]^\nu} \right\} +$$

$$+ \delta(s, f) F c_{iF} - \delta(s, N) P [c'_i(N, t)]^\nu;$$

$$i = 1, 2, \dots, m; \quad s = 1, 2, \dots, N.$$

Начальные приближения для «нулевого» временного шага ( $\nu = 0$ ) можно задать, например, следующим образом:  $[c'_i]^0 = c_{iF}$ , где  $c_{iF}$  – концентрация компонентов смеси в потоке питания.

При выбранном временном шаге  $\Delta t$  последовательно используя уравнения (2.337), находят стационарные значения концентраций по длине каскада. В качестве практического критерия достижения стационарных значений концентраций может быть использовано одно из 2-х условий:

1) конечные концентрации каждого из компонентов смеси (с заданной точностью) на  $\nu^*$ -м временном шаге удовлетворяют уравнениям покомпонентного баланса

$$Fc_{iF} - P[c'_i(N, t)]^{\nu^*} - W[c''_i(1, t)]^{\nu^*} = 0, \quad (2.338)$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

2) при переходе от  $\nu^*$ -го к  $\nu^* + 1$ -му временному шагу величина

$$\delta = \frac{[c_i(N, t)]^{\nu^*+1} - [c_i(N, t)]^{\nu^*}}{[c_i(N, t)]^{\nu^*+1}} \quad \text{достигает заданного}$$

значения.

Рассмотренный метод имеет первый порядок точности относительно шага  $\Delta t$ . Уменьшение шага  $\Delta t$  увеличивает точность расчета. Сверху «временной» шаг ограничен величиной [41]:

$$\Delta t < \min\left(\frac{H_s}{L_s}\right) \quad (2.339)$$

Распределение  $\theta_s$  в (2.337) задается соотношением (2.298) и произвольным значением коэффициента деления потока на одной

из ступеней каскада, например,  $\theta_1 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{W}{L_1}\right)$  или

$$\theta_n = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{P}{L_N}\right).$$

В работе [36] приведен пример реализации метода при расчете прямоугольного каскада, предназначенного для разделения четырехкомпонентной смеси изотопов хрома:  $^{50}\text{Cr}$ ,  $^{52}\text{Cr}$ ,  $^{53}\text{Cr}$ ,  $^{54}\text{Cr}$  ( $c_{1F} = 0,0431$ ,  $c_{2F} = 0,8376$ ,  $c_{3F} = 0,0955$ ,  $c_{4F} = 0,0238$ ). Исходные данные:  $\frac{P}{F} = 0,2$ ;  $\frac{F}{L} = 0,2$ ;  $q_0 = 1,12$ ;  $N = 15$ ,  $f = 12$ ,  $\frac{H}{L} = 0,03$  час.

Условием достижения конечными концентрациями стационарных значений являлось  $Fc_{iF} - Pc'_i(N, t) - Wc''_i(1, t) < 10^{-6}$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ). При использовании персонального компьютера с процессором на 66 МГц и «временного» шага  $\Delta t = 0,02$  ч для достижения заданной точности потребовалось примерно 1000 шагов и 20 с машинного времени.

Замена в (2.329) производной  $\frac{\partial c'}{\partial t}$  на  $\frac{\partial c}{\partial t}$  приводит к сокращению времени счета до 12 с при сохранении заданной точности.

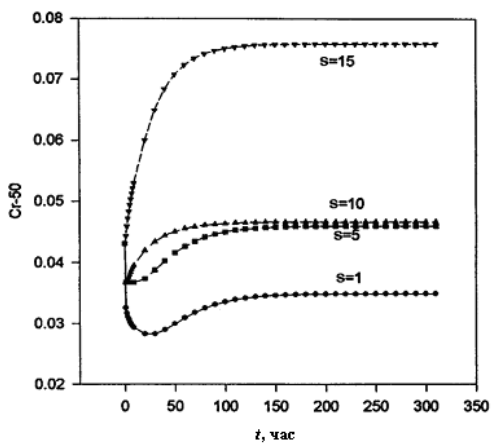


Рис. 2.27. Расчетные зависимости концентрации изотопа  $^{50}\text{Cr}$  на различных ступенях прямоугольного каскада от времени ( $\frac{P}{F} = 0,2$ ;  $\frac{F}{L} = 0,2$ ;  $q_0 = 1,12$ ;  $N=15$ ,  $f = 12$ ,  $\frac{H}{L} = 0,03$  ч) [36]

На рис. 2.27 представлено изменение концентрации изотопа  $^{50}\text{Cr}$  на различных ступенях прямоугольного каскада со временем. Как видно из приведенных зависимостей, скорости изменения концентраций максимальны в начальные моменты времени после запуска каскада. Поведение концентрации  $^{50}\text{Cr}$  на «отрицательном» конце каскада ( $s=1$ ) объясняются причинами, которые изложены в разделе 2.3.5.2.



#### 2.4.2.4. Метод квазилинеаризации [42-44,67]

Суть метода квазилинеаризации, приведенного в [42, 43], заключается в сведении системы уравнений (2.302)-(2.303) к линейной системе уравнений путем вычисления значений функций

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} c_j''(s) \text{ и } \sum_{j=1}^m q_{ij} c_j'(s) \text{ с использованием значений, полученных}$$

на предыдущей итерации. Другими словами, нелинейный член уравнений каскада записывается в виде

для отборной части каскада

$$[c_i'(s+1)]^v / \sum_{j=1}^m q_{ij} [c_j''(s+1)]^{v-1} \quad (2.340)$$

для отвальной части каскада

$$[c_i'(s-1)]^v / \sum_{j=1}^m \frac{1}{q_{ij}} [c_j''(s-1)]^{v-1} \quad (2.341)$$

где  $v$  – номер текущей итерации.

Кроме того, при решении квазилинеаризованной системы уравнений в качестве неизвестных предложено принять  $c_i'(s)/c_{iP}$  для отборной части каскада и  $c_i''(s)/c_{iW}$  для отвальной части. Это позволяет исключить неизвестные граничные условия из уравнений каскада.

Указанные выше подстановки приводят уравнения (2.302) – (2.303) к квазилинеаризованной форме, в которой относительные концентрации на концах каскада (т.е. новые граничные условия) равны единице:

для отборной части каскада

$$\frac{[c_i'(s)]^v}{[c_{iP}]^v} = \frac{[c_i'(s+1)]^v}{[c_{iP}]^v} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^m q_{ij} [c_j'(s+1)]^{v-1}} \times \quad (2.342)$$

$$\times \left( 1 - \frac{P}{\theta_s L} \right) + \frac{P}{\theta_s L}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\theta_s = 1 - \theta_{s+1} + \frac{P}{L};$$

для отвальной части каскада

$$\frac{[c_i''(s)]^v}{[c_{iW}]^v} = \frac{[c_i''(s-1)]^v}{[c_{iW}]^v} \cdot \frac{1}{\sum_{j=1}^m q_{ij}^{-1} [c_j''(s-1)]^{v-1}} \times$$

$$\times \left( 1 - \frac{W}{(1-\theta_s)L} \right) + \frac{W}{(1-\theta_s)L}, \quad i = 1, 2, \dots, m,$$

$$\theta_s = 1 - \theta_{s-1} - \frac{W}{L};$$

с граничными условиями

$$\frac{[c_i''(1)]^v}{[c_{iW}]^v} = 1, \text{ и } \frac{[c_i'(n)]^v}{[c_{iP}]^v} = 1. \quad (2.344)$$

Дальнейший расчет состоит в вычислениях этих относительных концентраций по ступеням от концов каскада к точке подачи питания. После нахождения этих отношений в точке подачи питания для определения концентраций в потоках отбора и отвала и распределения концентраций компонентов по ступеням каскада следует использовать условия непрерывности концентраций в точке подачи потока питания и уравнения покомпонентного баланса.

Сходимость итерационного процесса определяется выполнением с заданной наперед точностью условия  $\sum_{j=1}^m c_{jP} = 1$  и

$\sum_{j=1}^m c_{jW} = 1$ . С учетом отношений (2.303) – (2.311) описанный выше

алгоритм может быть использован для расчета прямоугольно-секционированного каскада. Результаты тестирования рассмотренного метода показали равномерную сходимость итерационного процесса и нечувствительность к начальным приближениям независимо от величины концентраций

компонентов в потоке питания, величин потоков и других параметров каскада. Метод легко адаптировать для расчета ПК с потерями рабочего вещества на ступенях [67].

Метод квазилинеаризации, предложенный в работе [44], состоит в следующем. Основные уравнения каскада записываются в виде

$$L'_{s-1}c'_i(s-1) + (L'_s + a)c''_i(s+1) + d = L'_s c'_i(s) + (L'_{s-1} + b)c''_i(s), \quad (2.345)$$

$$(L'_s + L'_{s-1} + b)c_i(s) = L'_s c'_i(s) + (L'_{s-1} + b)c''_i(s), \quad (2.346)$$

$$F = P + W, \quad (2.347)$$

$$\sum_{j=1}^m c_j(s) = \sum_{j=1}^m c'_j(s) = \sum_{j=1}^m c''_j(s) = 1 \quad (2.348)$$

где

$$a = \begin{cases} W & 1 \leq s < f \\ -P & f \leq s \leq N, \end{cases} \quad b = \begin{cases} W & 1 \leq s \leq f \\ -P & f < s \leq N, \end{cases} \quad d = \begin{cases} Fc_{i,F} & s = f \\ 0 & s \neq f. \end{cases}$$

Для произвольно выбранного компонента смеси с номером « $n$ » задают на всех ступенях каскада величину  $\gamma_n = \frac{c'_n}{c''_n}$  (начальное приближение). Тогда для всех остальных компонентов согласно (2.11) соответствующее отношение концентраций равно

$$\gamma_i = \frac{c'_i}{c''_i} = \gamma_n q_{in}. \quad (2.349)$$

С учетом (2.349) система уравнений (2.344) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} & -L'_{s-1}\gamma_n(s-1)q_{in}c''_i(s-1) + [L'_s\gamma_n(s)q_{in} + (L'_s - b)]c''_i(s) - \\ & -(L'_s + a)c''_i(s+1) = -d \end{aligned} \quad (2.350)$$

Разрешая (2.350) относительно  $c''_i(s)$ , далее по формулам (2.349) и (2.3346) находят  $c'_i(s)$  и  $c''_i(s)$ .

Условия (2.348) при этом, вероятнее всего будут не выполнены, т.к. величины  $\gamma_n$  для каждой ступени заданы произвольно.

Для нахождения значений  $\gamma_n$ , задание которых приводит к выполнению (с заданной точностью) условий (2.349) используют итеративный процесс. Суммирование по всем компонентам уравнений баланса

$$c_i(s) = \theta_s c'_i + (1 - \theta_s) c''_i \quad (2.351)$$

с использованием (2.349) дает

$$\sum_i c_i(s) = \theta_s \gamma_n(s) \sum_i q_{in} c''_i(s) + (1 - \theta_s) \sum_i c''_i(s). \quad (2.352)$$

Если потребовать

$$\gamma_n(s) \sum_i q_{in} c''_i(s) = \sum_i c_i(s), \quad (2.353)$$

то есть  $\sum_i c'_i(s) = \sum_i c_i(s)$  (2.352), то из (2.353) автоматически следует

$$\sum_i c''_i(s) = \sum_i c_i(s). \quad (2.354)$$

Новые приближения  $\gamma_n(s)$  можно найти, разрешая (2.352)

$$\gamma_n(s) = \frac{\sum_i c_i(s)}{\sum_i q_{in} c''_i(s)}. \quad (2.356)$$

Таким образом, если на  $\nu$ -й итерации с использованием приближений  $[\gamma_n(s)]^\nu$  найденные значения концентраций компонентов составляют  $[c_i(s)]^\nu$ ,  $[c''_i(s)]^\nu$  и  $[c'_i(s)]^\nu$ , то приближения  $\gamma_n$  на последующей  $(\nu+1)$ -й итерации составят

$$[\gamma_n(s)]^{\nu+1} = \frac{\sum_i [c_i(s)]^\nu}{\sum_i [q_{in} c''_i(s)]^\nu}. \quad (2.357)$$

Для увеличения скорости сходимости процесса рекомендуют величину  $\gamma_n$  на  $(\nu+1)$ -й итерации брать равной [44]

$$[\gamma_n(s)]^{\nu+1} = \omega \frac{\sum_j [c_j(s)]^\nu}{\sum_j [q_{jn} c''_j(s)]^\nu} + (1 - \omega) [\gamma_n(s)]^\nu, \quad (2.358)$$

где коэффициент  $\omega$  находится в пределах  $0 < \omega < 1$ .

Итеративный процесс прекращают при выполнении требования

$$\max \left[ \left\| \sum_{j=1}^m c_j(s) - 1 \right\|, \left\| \sum_{j=1}^m c'_j(s) - 1 \right\|, \left\| \sum_{j=1}^m c''_j(s) - 1 \right\| \right] < \varepsilon, \quad (2.359)$$

где  $\varepsilon$  – заданная малая величина («ошибка» итерации).

Легко показать, что при выполнении с заданной точностью условий

$$\sum_{i=1}^m c_i(s) = \sum_{i=1}^m c'_i(s) = \sum_{i=1}^m c''_i(s) \quad (2.360)$$

выполняются и условия (2.348). Действительно, суммирование (2.345) по всем компонентам смеси с учетом (2.359) дает

$$\begin{aligned} & -L'_{s-1} \sum_{j=1}^m c_j(s-1) + (L'_s + L'_{s-1} + b) \sum_{j=1}^m c_j(s) - \\ & -(L'_s + a) \sum_{j=1}^m c_j(s+1) = U, \end{aligned} \quad (2.361)$$

где  $U = F$  для  $s = f$  (так как  $\sum_{j=1}^m c_{jF} = 1$ ) и  $U = 0$  для всех остальных ступеней.

Рассмотрим (2.361) как систему линейных уравнений относительно неизвестных  $\sum_{j=1}^m c_j(s)$ ,  $s = 1, 2, \dots, N$ . Так как  $F \neq 0$  и диагональный элемент  $L'_s + L'_{s-1} + b$  не меньше суммы абсолютных величин, соседних с диагональным элементом  $L'_{s-1}$  и  $L'_s + a$ , то определитель матрицы, составленный из коэффициентов (2.350) не равен нулю и, следовательно, имеет единственное решение. Легко проверить, что это решение есть 1, т.е.

$$\sum_{j=1}^m c_j(s) = 1, \quad s = 1, 2, \dots, m. \quad (2.362)$$

Согласно [44] для расчета прямоугольного каскада для разделения изотопов ксенона на персональном компьютере с процессором Pentium Pro-200 для следующих исходных данных:

$$\frac{L}{F} = 10, \quad \frac{P}{F} = 0,2, \quad N = 20, \quad f = 10, \quad q_0 = 1,4, \quad \theta_1 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{W}{L} \right), \quad \omega = 1$$

при  $\varepsilon = 10^{-5}$  потребовалось 70 итераций, а временные затраты составили 0,16 с.

#### 2.4.2.5. Метод расчета на основе приближения фактора разделения [45-46]

Рассмотрим данный метод на примере расчета прямоугольно-секционированного каскада. Авторами настоящего метода предпринята попытка увеличить скорость сходимости итерационного процесса за счет применения метода Ньютона при вычислении новых приближений. Стандартный способ реализации метода Ньютона здесь не подходит. Во-первых, его использование может нарушить сходимость итерационной процедуры при «плохих» («некорректных») начальных приближениях. Во-вторых, применение метода Ньютона требует составления разностной матрицы, а значит, проведения  $m + 1$  вычислений функций. Поскольку в рассматриваемом случае вычисление каждого значения функции представляет собой расчет по итерационным формулам (2.302), (2.303) с большим числом ступеней, то выигрыш от ускорения сходимости процесса, особенно при большом числе компонентов, исчезает. Предложенный в [45-46] алгоритм вычисления нового приближения путем итерационной процедуры состоит из следующих пунктов.

1. Для заданных приближений на концах каскада проводят расчет нового приближения для отношения этих концентраций методом простой (классической) итерации.

2. После нахождения данного отношения для каждой пары компонентов  $i$  и  $j$  проводят расчет фактора разделения каскада

$$K_{ij} = \frac{c_{iP}}{c_{jP}} \bigg/ \frac{c_{iW}}{c_{jW}} \quad (2.363)$$

3. Находят пару компонентов  $n$  и  $l$ , для которых величина  $|\ln K_{nl}|$  максимальна. Далее находят величины  $\ln K_{il}$ .

4. На основании результатов двух последовательных расчетов, при условии постоянства в обоих случаях номеров пар компонентов  $n$  и  $l$ , проводят вычисление нового приближения методом Ньютона, рассматривая значения  $\ln K_{il}$  как функцию от величины невязок. Для повышения устойчивости сходимости итерационной процедуры вместо шага, вычисленного методом Ньютона  $\Delta K_{il}^{\text{Ньют.}}$ , целесообразно использовать значения  $\Delta K_{il}$ , вычисляемые по формуле  $\Delta K_{il} = \lg \left[ (1 + \Delta K_{il}^{\text{Ньют.}}) \right] / \omega$ . На основании численных экспериментов в [45-46] рекомендовано значение  $\omega$  выбирать равным 0,25.

5. После нахождения фактора разделения каскада с учетом уравнения покомпонентного баланса проводят вычисление нового приближения для концентраций на концах каскада. Решение нелинейной системы (2.302), (2.303) проводят путем квазилинеаризации через последовательное приближение отношения концентраций  $c_{iP} / c_{iW}$  и использование простой итерации. В качестве начальных приближений для данной итерационной процедуры выбирают значения, полученные при решении уравнений каскада. Для уменьшения величины невязки в несколько раз (в 6-8) обычно требуется от трех до четырех итераций. Более высокая точность решения данной системы уравнений нецелесообразна, поскольку не приводит к ускорению сходимости глобальной итерационной процедуры, а лишь только увеличивает затраты времени на решение данной системы.

6. Итерационный процесс, описанный в пп. 1-5, повторяют до достижения заданной точности, которая определяется по величине невязки, полученной на данной итерации.

Проверка данного метода, проведенная на примерах расчета нескольких десятков различных каскадов, показала, что в пределах заданной погрешности данный метод по сравнению с методами, рассмотренными ранее, сокращает время счета в 4–20 раз. Причем выигрыш во времени тем больше, чем больше число ступеней в каскаде.

Изложенный метод не требователен к заданию начальных приближений, характеризуется устойчивой сходимостью итерационного процесса и быстротой расчета каскадов.

### 2.4.3. Влияние параметров каскада на состав получаемой смеси

Одним из основных параметров, характеризующих процесс разделения в каскаде, является отношение потока отбора  $P$  к потоку отвала  $W$  (или потока отбора  $P$  к потоку питания  $F$ ). В работах [47-48] изучено влияние параметра  $P/W$  на состав смеси в выходящих из каскада потоках. Используя уравнения баланса по каскаду в целом (2.43), можно показать, что при  $P/W \rightarrow 0$  концентрации компонентов в отвале  $c_{iW}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ), будут приближаться к  $c_{iF}$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ). При возрастании параметра  $P/W$  концентрация самого легкого компонента в потоке отвала уменьшается, самого тяжелого – увеличивается, а концентрации промежуточных компонентов проходят через максимум. Аналогичный характер имеют зависимости  $c_{iP}(P/W)$  с той лишь разницей, что поток отбора обогащается самым легким компонентом при уменьшении  $P/W$ .

Рассмотрим соотношения, позволяющие оценить значения параметра  $P/W$ , при котором в потоке отбора  $P$  или отвала  $W$  может быть достигнута предельная концентрация  $l$ -ого компонента. Из уравнений баланса следует

$$\frac{P}{W} = \frac{c_{iF} - c_{iW}}{c_{iP} - c_{iF}}. \quad (2.364)$$

Предположим, что многокомпонентная смесь в каскаде делится на две фракции: в потоке отбора накапливаются только компоненты  $1, 2, \dots, j, \dots, l$ , а в потоке отвала – только  $l+1, l+2, \dots, m$ . В этом случае формулу (2.364) можно записать в виде

$$\frac{P}{W} = \frac{c_{iF}}{(c_{iP})_{\text{пред}} - c_{iF}}. \quad (2.365)$$

Просуммировав первые  $l$  уравнений системы (2.287), получим

$$P/F = \sum_{j=1}^l c_{jF}, \quad (2.366)$$



после чего с помощью уравнения баланса для  $i$ -го компонента с учетом соотношений (2.364) – (2.365) запишем соотношение для его предельной концентрации в потоке отбора:

$$(c_{iP})_{\text{пред}} = \frac{c_{iF}}{\sum_{j=1}^l c_{jF}}. \quad (2.367)$$

Если  $i$ -й компонент накапливается в потоке отвала, то соотношения (2.364) – (2.366) преобразуются к виду:

$$\frac{P}{W} = \frac{c_{iF} - (c_{iW})_{\text{пред}}}{c_{iF}}, \quad (2.368)$$

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=l+1}^m c_{jF}, \quad (2.369)$$

$$(c_{iW})_{\text{пред}} = \frac{c_{iF}}{\sum_{j=l+1}^m c_{jF}}. \quad (2.370)$$

Формулы (2.366) и (2.369) могут быть переписаны в виде:

$$(c_{iP})_{\text{пред}} = \frac{c_{iF}}{P/F}, \quad (2.371)$$

$$(c_{iW})_{\text{пред}} = \frac{c_{iF}}{1 - P/F}, \quad (2.372)$$

где величина  $P/F$  определяется соотношением (2.366).

Можно показать, что формулы (2.366), (2.369) (или (2.371), (2.372)) позволяют оценить предельные значения концентраций компонентов в потоках отбора и отвала и соответствующие им значения  $P/F$  (или  $P/W$ ) в каскаде с произвольным обогащением на ступени и конечной (небольшой) длины.

Введем в рассмотрение функцию

$$D = \frac{P}{F} \sum_{j=1}^l c_{jP} + \frac{W}{F} \sum_{j=l+1}^m c_{jW}, \quad (2.373)$$

где  $l$  – число компонентов в отборе (т.е. принадлежащих «легкой» группе компонентов). Нетрудно видеть, что

$$D \leq 1, \quad (2.374)$$

причем знак равенства в (2.374) будет иметь место только в случае, если смесь в каскаде полностью разделена на «легкую» (в отборе) и «тяжелую» (в отвале) группы, т.е. одновременно выполнены условия:

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=l+1}^m c_{jF}, \quad \frac{W}{F} = 1 - \frac{P}{F} = \sum_{j=l+1}^m c_{jW}, \quad (2.375)$$

$$\sum_{j=1}^l c_{jP} = 1, \quad \sum_{j=l+1}^m c_{jW} = 1. \quad (2.376)$$

При выполнении условий (2.375), (2.376) функция  $D$  достигает своего максимального значения, равного единице.

На рис. 2.28 приведены зависимости функции  $D$  от величины  $P/F$  для прямоугольных каскадов, предназначенных для разделения природной смеси изотопов ксенона, состав которой приведен в табл. 2.10. при следующих исходных данных:

$\frac{P}{F} = 10$ ,  $q_0 = 1,4$ ;  $N = 5, 11, 21, 41$  и  $61$ : в каждом случае поток питания подают на вход ступени, находящейся в центре каскада. Число компонентов в «легкой» группе выбрано равным четырем ( $l=4$ ).

Таблица 2.10

Концентрации компонентов природной смеси изотопов ксенона

| Изотоп и номер компонента | $^{124}\text{Xe}$<br>1 | $^{126}\text{Xe}$<br>2 | $^{128}\text{Xe}$<br>3 | $^{129}\text{Xe}$<br>4 | $^{130}\text{Xe}$<br>5 | $^{131}\text{Xe}$<br>6 | $^{132}\text{Xe}$<br>7 | $^{134}\text{Xe}$<br>8 | $^{136}\text{Xe}$<br>9 |
|---------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| Концентрация              | 0,00093                | 0,0109                 | 0,01917                | 0,2664                 | 0,0408                 | 0,3118                 | 0,2689                 | 0,1044                 | 0,0887                 |

Из рис. 2.28 следует, что при всех значениях  $n$  максимум величины  $D$  имеет место при одном и том же значении величины  $P/F = 0,2854$ .

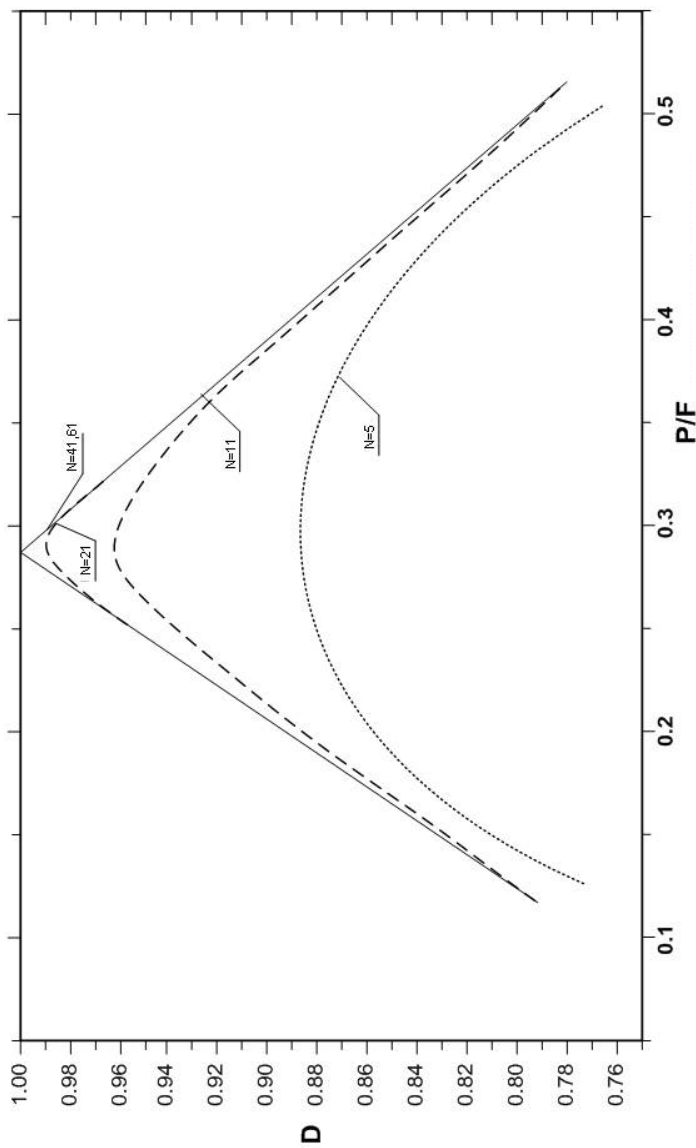


Рис. 2.28. Зависимость величины  $D$  от параметра  $P/F$  для прямоугольного каскада ( $L/P=10$ ,  $q_0=1,4$ ) при различных значениях полного числа ступеней  $n$ . «Легкую» группу компонентов составляют:  $^{126}\text{Xe}$ ,  $^{128}\text{Xe}$  и  $^{129}\text{Xe}$

Эта величина в точности совпадает с величиной суммы  $\sum_{j=1}^4 c_{jF}$ . В

табл. 2.11 приведены максимальные значения функции  $D$  при различном числе ступеней в прямоугольном каскаде. Следует отметить, что на рис. 2.28 кривые для  $N = 41$  и  $N = 61$  практически совпадают.

Таблица 2.11.  
Максимальные значения функции  $D$  при различных значениях полного числа ступеней в прямоугольном каскаде ( $\frac{P}{F} = 10$ ,  $q_0 = 1,4$ ;  $l = 4$ )

|            |         |          |          |          |          |
|------------|---------|----------|----------|----------|----------|
| $N$        | 5       | 11       | 21       | 41       | 61       |
| $D_{\max}$ | 0,88586 | 0,964870 | 0,991783 | 0,999580 | 0,999980 |

Из приведенных результатов следует, что при небольших обогащениях на ступени в каскадах ограниченной длины для заданного значения величины  $l$  – числа компонентов, обогащаемых

в отборе, подбором величины  $\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^l c_{jF}$ ,  $\left( \frac{P}{W} = \frac{\sum_{j=1}^l c_{jF}}{\sum_{j=l+1}^m c_{jF}} \right)$  можно

достичь разделения смеси на «легкую» и «тяжелую» группы ( $l$  – число компонентов «легкой» группы, т.е. число компонентов, обогащаемых в отборе). При этом формулы (2.367) и (2.369) позволяют оценивать значения концентраций в потоках отбора и отвала. В частности, в рассматриваемом примере при расчета каскада из пяти ступеней ( $N = 5$ ), относительное различие между расчетной концентрацией произвольного промежуточного компонента и значением, полученным по выражению (2.367), не превышает 10-12 отн. %. В работе [48] показано также, чем длиннее каскад, тем меньше влияют на достижение функцией  $D$

максимального значения, равного 1, такие факторы, как профиль каскада и номер ступени, на вход которой подаются поток питания.

Для иллюстрации в табл. 2.12 для прямоугольного каскада, предназначенного для разделения изотопов ксенона, ( $\frac{L}{F} = 10$ ,  $q_0 = 1,4$ ;  $l = 4$ ;  $N = 41$ ) приведены максимальные значения функции  $D$  для случаев  $f = 11, 21, 31$ .

Таблица 2.12

Значения  $D_{\max}$  при различных величинах  $f$  для прямоугольного каскада при разделении изотопов ксенона

| $f$        | 11       | 21       | 31       |
|------------|----------|----------|----------|
| $D_{\max}$ | 0,999087 | 0,999580 | 0,999137 |

Рассмотренные закономерности позволяют не только определить оптимальные рабочие параметры каскада заданного профиля, но и оценить требования к точности их поддержания.

#### 2.4.4. Модельные каскады и их свойства

Под модельными каскадами будем понимать каскады, математические модели которых адекватны процессу разделения, но позволяют существенно упростить анализ закономерностей массопереноса в каскаде и соответствующие расчеты. При таком подходе искусственным подбором профиля потока можно добиться наиболее эффективного обогащения целевого компонента.

##### 2.4.4.1. Каскад с постоянными относительными коэффициентами разделения на ступенях («квазиидеальный» каскад) [1, 4, 49, 50]

Рассмотрим противоточный симметричный каскад, состоящий из  $N$  ступеней и предназначенный для разделения  $m$ -компонентной смеси. Поток исходной смеси  $F$  с концентрациями компонентов

$c_{iF}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) подают на вход ступени с номером  $f$ . В потоках отбора  $P$  и отвала  $W$ , выходящих из ступеней с номерами  $s = N$  и  $s = 1$ , концентрации компонентов соответственно равны  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ).

Рассмотрим случай каскада с постоянными по его длине относительными коэффициентами разделения  $q_{ik}, \alpha_{ik}, \beta_{ik}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $k$ -номер «опорного» компонента). Уравнения коммутации потоков на входе в произвольную  $s$ -ую ступень каскада с учетом обозначений (2.5) имеют вид

$$G'_i(s-1) + G''_i(s+1) - G_i(s) + \delta_{sf} F c_{iF} = 0, \quad i \neq k \quad (2.377)$$

$$G'_k(s-1) + G''_k(s+1) - G_k(s) + \delta_{sf} F c_{kF} = 0, \quad (2.378)$$

где  $\delta_{sf} = \begin{cases} 0, & s \neq f \\ 1, & s = f \end{cases}$

С учетом соотношений (2.17) – (2.18) уравнения (2.377), (2.378) приводятся к виду

$$G'_i(s-1) + \frac{1}{g_i} G'_i(s+1) - \frac{g_i+1}{g_i} G'_i(s) + \delta_{sf} F c_{iF} = 0, \quad i \neq k, \quad (2.379)$$

$$G'_k(s-1) + \frac{1}{g_k} G'_k(s+1) - \frac{g_k+1}{g_k} G'_k(s) + \delta_{sf} F c_{kF} = 0, \quad (2.380)$$

где  $g_i$  и  $g_k$  определяются по формулам (2.19) и (2.20).

Уравнения (2.378)-(2.379) представляют собой нелинейные разностные уравнения второго порядка относительно неизвестных функций  $G'_i(s)$ .

Граничные условия имеют вид:

$$\begin{cases} G'_i(0) = G'_i(N+1) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ G'_i(N) = P c_{iP}, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ G'_i(1) = g_i W c_{iW}, \quad i \neq k \\ G''_k(1) = g_k W c_{iW}. \end{cases} \quad (2.381)$$

Ступени с номерами  $s=1$  и  $s=N$  являются крайними ступенями каскада, что делает возможным формально записать  $G'_i(0) = G'_i(N+1) = 0$ .

Фундаментальное решение (2.378) – (2.379) в случае постоянства коэффициентов  $g_i$  и  $g_k$  может быть представлено в виде

$$G'_i(s) = A_i \omega_1^s + B_i \omega_2^s, \quad (2.382)$$

где  $\omega_1(g_i)$  и  $\omega_2(g_i)$  – корни характеристических уравнений

$$\omega^2 - (g_i + 1)\omega + g_i = 0, \quad (2.383)$$

соответственно равные

$$\omega_1(g_i) = g_i, \quad (2.384)$$

$$\omega_2(g_i) = 1, \quad (2.385)$$

$A_i, B_i$  – константы.

Используя уравнения баланса (2.287) и граничные условия (2.382), в результате получим:

для отборной части:

$$G'_i(s) = Pc_{iP} \frac{g_i}{g_i - 1} (1 - g_i^{s-N-1}), \quad i \neq k, \quad s = f, \dots, N \quad (2.386)$$

$$Pc_{iP} = Fc_{iF} \frac{1 - g_i^{-f}}{1 - g_i^{-N-1}}, \quad i \neq k \quad (2.387)$$

для отвальной части:

$$G'_i(s) = Wc_{iW} \frac{g_i}{g_i - 1} (g_i^s - 1), \quad s = 1, 2, \dots, f - 1, \quad (2.388)$$

$$Wc_{iP} = Fc_{iF} \frac{g_i^{N+1-f} - 1}{g_i^{N+1} - 1}. \quad (2.389)$$

В соотношениях (2.386)-(2.387) и далее величины  $g_i$  для  $i \neq k$  определяются соотношениями (2.19), а для  $i = k$  формулой (2.20).

Из (2.386)-(2.389) можно получить

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - g_j^{-f}}{1 - g_j^{-N-1}}, \quad s = f, \dots, N. \quad (2.390)$$

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{g_j^{N+1-f} - 1}{g_j^{N+1} - 1}, \quad s = 1, \dots, f - 1. \quad (2.391)$$

$$c_{iP} = c_{iF} \frac{1 - g_i^{-f}}{1 - g_i^{-N-1}} \Bigg/ \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - g_j^{-f}}{1 - g_j^{-N-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.392)$$

$$c_{iW} = c_{iF} \frac{g_i^{N+1-f} - 1}{g_i^{N+1} - 1} \Bigg/ \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{g_j^{N+1-f} - 1}{g_j^{N+1} - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.393)$$

Далее с использованием решений (2.386) – (2.389) и соотношений (2.8) – (2.10), (2.17) определяем распределение потока  $L(s)$ , концентраций компонентов и коэффициента деления потоков по ступеням каскада

$$L(s) = \sum_{j=1}^m G'_j(s) \frac{1 + g_j}{g_j} = \begin{cases} P \sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j - 1} c_{jP} (1 - g_j^{s-N-1}), & s = f, \dots, N, \\ W \sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j - 1} c_{jW} (g_j^s - 1), & s = 1, \dots, f - 1. \end{cases} \quad (2.394)$$

$$c_i(s) = \frac{1 + g_j}{g_j} \cdot \frac{G''_i(s)}{G_i(s)} = \begin{cases} \frac{c_{iP} \frac{g_j}{g_j - 1} (1 - g_j^{s-N-1})}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j - 1} c_{jP} (1 - g_j^{s-N-1})}, & s = f, \dots, N, \\ \frac{c_{iW} \frac{g_j}{g_j - 1} (g_j^s - 1)}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j - 1} c_{jW} (g_j^s - 1)}, & s = 1, \dots, f - 1. \end{cases} \quad (2.395)$$



$$\theta(s) = \frac{\sum_{j=1}^m G'_j(s)}{G_i(s)} = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^m \frac{g_j}{g_j - 1} c_{jP} (1 - g_j^{s-N-1})}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j - 1} c_{jP} (1 - g_j^{s-N-1})}, & s = f, \dots, N, \\ \frac{\sum_{j=1}^m \frac{g_j}{g_j - 1} c_{jW} (g_j^s - 1)}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j - 1} c_{jW} (g_j^s - 1)}, & s = 1, \dots, f - 1. \end{cases} \quad (2.396)$$

Формулу для расчета суммарного потока в каскаде легко получить, суммируя (2.394) по всем ступеням каскада

$$\sum_{s=1}^N \frac{L(s)}{P} = \sum_{i=1}^m \left\{ \frac{g_i + 1}{g_i - 1} \left[ \frac{W}{P} c_{iW}(f) + c_{iP}(N + 1 - f) \right] \right\}. \quad (2.397)$$

Рассмотренный выше каскад отличается тем, что относительные коэффициенты разделения  $q_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$  (и, соответственно, срезы парциальных компонентов  $\varphi_i$ ,  $\varphi_k$  и параметры  $g_i$ ,  $g_k$ ) остаются постоянными по длине каскада. Для каскадов такого типа в работе [1] введен термин «квазиидеальный» каскад.

Если ввести обозначения

$$Q_i = \ln g_i, \quad (2.398)$$

$$S_p = N + 1 - f, \quad (2.399)$$

$$S_w = f, \quad (2.400)$$

то формулы (2.392) и (2.393) переходят в соответствующие соотношения для концевых концентраций  $Q$ -каскадов [17].

$$c_{iP} = \frac{1 - \exp(Q_i S_w)}{\exp(-Q_i S_p) - \exp(Q_i S_w)} c_{iF} \bigg/ \sum_{j=1}^m \frac{1 - \exp(Q_j S_w)}{\exp(-Q_j S_p) - \exp(Q_j S_w)} c_{jF}, \quad (2.401)$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

$$c_{iW} = \frac{\exp(-Q_i s_P) - 1}{\exp(-Q_i s_P) - \exp(Q_i s_W)} c_{iF} \bigg/ \sum_{j=1}^m \frac{\exp(-Q_j s_P) - 1}{\exp(-Q_j s_P) - \exp(Q_j s_W)} c_{jF} \quad (2.402)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Другими словами, понятия « $Q$ -каскад», «квазиидеальный» каскад оказываются идентичными с уточнением лишь выбора параметров  $g_i$  (или  $Q_i$ ) для случаев «слабого разделения» и произвольного (немалого) обогащения на ступенях каскада.

При заданных величинах  $c_{iF}$ ,  $N$ ,  $f$ ,  $q_{ik}$ ,  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$  формулы (2.386)–(2.387) позволяют решить задачу расчета "квазиидеального" каскада ( $Q$ -каскада или «свободного» каскада с произвольным (немалым) обогащением на ступенях).

Разделительные свойства «квазиидеальных» каскадов идентичны свойствам  $Q$ -каскадов: выбор номера «опорного» компонента полностью определяет распределение потока в каскаде и, соответственно, направление обогащений компонентов разделяемой смеси.

#### 2.4.4.2. Квазиидеальный каскад с несмешением относительных концентраций двух заданных компонентов смеси ( $R$ -каскад) [4, 49-52]

Рассмотрим так называемый  $R$ -каскад, в котором выполняется несмешение относительных концентраций  $l$ -го и  $k$ -го компонентов

$$\text{смеси, т.е. } R_{nk} = \frac{c_n}{c_k}$$

$$R'_{nk}(s-1) = R_{nk}(s) = R''_{nk}(s+1) \quad (2.403)$$

Вследствие (2.403) коэффициенты  $\alpha_{nk}$  и  $\beta_{nk}$  совпадают для двух соседних ступеней. При постоянных полных коэффициентах разделения равенство

$$\alpha_{nk} = \beta_{nk} = \sqrt{q_{nk}}, \quad (2.404)$$

приводит к каскаду со ступенями симметричными относительно пары компонентов с номерами  $n$  и  $k$ . При этом на всех ступенях каскада  $\alpha_{ik} \neq \beta_{ik}$  ( $i \neq n$ ). Так как соотношение (2.20) справедливо

для любого  $i$ , включая  $i = n$ , то, следовательно, учитывая (2.404), имеем

$$g_k = \frac{1}{\sqrt{q_{nk}}}, \quad (2.405)$$

а учитывая, что  $g_i = q_{ik} g_k$  ( $i \neq k$ ), получим

$$g_i = \frac{q_{ik}}{\sqrt{q_{nk}}}, \quad \text{и} \quad (2.406)$$

$$\text{в частности,} \quad g_n = \sqrt{q_{nk}}. \quad (2.407)$$

Из (2.393) и (2.394) с учетом (2.405), (2.407) непосредственно получается

$$N - f + 1 = \frac{1}{\ln g_n} \ln \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^F}, \quad (2.408)$$

$$f = \frac{1}{\ln g_n} \ln \frac{R_{nk}^F}{R_{nk}^W}, \quad (2.409)$$

$$\text{где} \quad R_{nk}^P = \frac{c_{nP}}{c_{kP}}, \quad R_{nk}^W = \frac{c_{nW}}{c_{kW}}, \quad R_{nk}^F = \frac{c_{IF}}{c_{kF}}.$$

Соотношения (2.408) – (2.409) позволяют исключить числа ступеней  $N$  и  $f$  из числа параметров решаемой задачи. С учетом (2.405) – (2.409) формулы (2.391) – (2.394) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^F)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}, \quad (2.410)$$

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{(R_{nk}^F)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}, \quad (2.411)$$

$$c_{iP} = \frac{c_{iF} \frac{(R_{nk}^W)^{-d_i} - (R_{nk}^F)^{-d_i}}{(R_{nk}^W)^{-d_i} - (R_{nk}^P)^{-d_i}}}{\sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^F)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}}, \quad (2.412)$$

$$c_{iW} = \frac{c_{iF} \frac{(R_{nk}^F)^{-d_i} - (R_{nk}^P)^{-d_i}}{(R_{nk}^W)^{-d_i} - (R_{nk}^P)^{-d_i}}}{\sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{(R_{nk}^F)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}{(R_{nk}^W)^{-d_j} - (R_{nk}^P)^{-d_j}}}, \quad (2.413)$$

где

$$d_i = \frac{\ln q_{ik}}{\ln g_n} - 1. \quad (2.414)$$

Поскольку при решении уравнения каскада (2.387) – (2.389) для отборной и отвальной частей каскада должны совпадать при  $s = f$ , то

$$Pc_{iP} (1 - g_i^{f-N-1}) = Wc_{iW} (g_i^f - 1). \quad (2.415)$$

Используя уравнения баланса (2.43), соотношения (2.408), (2.409), уравнения (2.415) легко привести к виду

$$Pc_{iP} (R_{nk}^P)^{-d_i} + Wc_{iW} (R_{nk}^W)^{-d_i} - Fc_{iF} (R_{nk}^F)^{-d_i} = 0. \quad (2.416)$$

Соотношения типа (2.416) получили название уравнений *H*-баланса [16]. Следует иметь в виду, что уравнения (2.416) при  $i = n$  и  $i = k$  вырождаются в обычные уравнения покомпонентного баланса по каскаду, и выражение (2.416) имеет место именно для тех компонентов, по которым следует выполнить условие

несмешения. Суммарный поток каскада  $\sum_{s=1}^N L(s)$  можно получить, используя соотношения (2), (2.395), (2.405) – (2.409). Простые преобразования приводят к следующему результату

$$\sum_{s=1}^N L(s) = \sum_{j=1}^m \frac{Pc_{jP} \ln R_{nk}^P + Wc_{jW} \ln R_{nk}^W - Fc_{jF} \ln R_{nk}^F}{\frac{g_j - 1}{g_j + 1} \ln g_n} \quad (2.417)$$

Выясним, из каких соображений целесообразно задавать номера «опорных» компонентов  $l$  и  $k$ . Будем считать, что полный относительный коэффициент разделения  $q_{ij}$  можно аппроксимировать соотношением

$$q_{ij} = q_0^{M_j - M_i}, \quad (2.418)$$

где  $M_i$  и  $M_j$ -массовые числа  $i$ -го и  $j$ -го компонентов,  $q_0$  – коэффициент разделения, приходящийся на разность массовых чисел, равную единице.

В этом случае формулы (2.405) – (2.406) могут быть представлены в виде

$$g_k = q_0^{\frac{M_k - M_n}{2}}; \quad (2.419)$$

$$g_i = q_0^{M^* - M_i}, \quad (2.420)$$

где 
$$M^* = \frac{M_n + M_k}{2}. \quad (2.421)$$

Из (2.420)-(2.420) непосредственно следует, что для всех компонентов с  $M_i < M^*$  величины  $g_i > 1$ , если же  $M_i > M^*$ , то  $g_i < 1$ . Анализ соотношений (2.393) и (2.394) показывает, что в достаточно длинном  $R$ -каскаде ( $N - f + 1 \gg 1$ ,  $f - 1 \gg 1$ ) компоненты с  $g_i > 1$  ( $M_i < M^*$ ) обогащаются в отборе каскада, а компоненты с  $g_i < 1$  ( $M_i > M^*$ ) обогащаются в отвале каскада. Возможность изменения числа компонентов, концентрируемых в потоках отбора или отвала за счет соответствующего выбора номеров ключевых компонентов (а, следовательно, и параметра  $M^*$ ), позволяет решить проблему обогащения смеси промежуточными компонентами. Например, при  $k = n + 1$  ( $M^* = \frac{M_n + M_{n+1}}{2}$ ), как и в случае «слабого обогащения» в отборе  $R$ -каскада обогащают все компоненты с номерами от 1 до  $n$  и «подавляются» с номерами от  $n + 1$  до  $m$ , и обедняется легкая группа.

Таким образом, величина параметра  $M^*$  полностью определяет направление обогащения компонентов смеси в  $R$ -каскаде с немалыми обогащениями на ступенях.

По формулам (2.412) – (2.413) можно рассчитать концентрации компонентов в потоках отбора  $c_{iP}$  и отвала  $c_{iW}$  при заданных значениях  $c_{iF}$ ,  $f$ ,  $N$ ,  $g_i$  (или  $M^*$ ). Дальнейший расчет  $R$ -каскада

(нахождение распределений потоков по формуле (2.395), концентраций по формуле (2.396) и коэффициента деления потока по ступеням каскада по формуле (2.397)) трудности не представляет. Более сложным является расчет  $R$ -каскада с заданными концентрациями обогащаемого ценного компонента с номером  $n$  в потоках отбора и отвала  $c_{nP}$  и  $c_{nW}$ , который назовем целевым, так как в этом случае требуется найти решение системы нелинейных алгебраических уравнений (2.401) – (2.402) при  $i=n$  относительно неизвестных  $N$  и  $f$ .

При решении системы (2.401) – (2.402) следует иметь в виду два следующих обстоятельства. Во-первых, при заданных величинах  $c_{iF}$ ,  $f$ ,  $N$ ,  $q_0$  величины концентраций целевого компонента в потоках отбора и отвала будут существенным образом зависеть от номера опорного компонента ( $k = n + 1, \dots, m$ ) или выбранной величины  $M^*$ . Если же заданными величинами являются  $c_{nP}$  и  $c_{nW}$  (выбранные из области допустимых значений), то задача их нахождения может быть в принципе решена при различных значениях  $k$  (или  $M^*$ ), т.е. в разных  $R$ -каскадах, отличающихся друг от друга числами ступеней, характером распределения потока питания ступеней по длине каскада и, наконец, величиной суммарного потока. Во-вторых, для решения системы (2.401) – (2.402) необходимо предварительно определить области допустимых концентраций в потоках отбора и отвала  $c_{nP}$  и  $c_{nW}$  при заданных параметрах  $g_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ),  $q_0$  и  $c_{iF}$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

Для определения способа нахождения области существования решений системы (2.401) – (2.402) целесообразно выявить характер зависимости концентрации целевого компонента в потоке отбора  $c_{nP}$  от числа разделительных ступеней в отборной и отвальной частях каскада, считая, что целевой компонент вместе с компонентами с номерами от 1 до  $n-1$  обогащается на отборном («легком») конце каскада. Для выполнения последнего условия достаточно пронумеровать компоненты в порядке возрастания их массовых чисел, в качестве опорного принять компонент с номером  $k=n+1$ , а

в узлах квазиидеального каскада потребовать отсутствия смешения по относительной концентрации  $R_{n,n+1} = c_n/c_{n+1}$ .

На рис. 2.29 представлена зависимость концентрации  $c_{nP}$  в потоке отбора целевых компонентов  $n=4$  ( $^{83}\text{Kr}$ ) (рис. 2.29,а) и  $n=5$  ( $^{84}\text{Kr}$ ) (рис. 2.29,б) от числа разделительных ступеней в обогащительной части квазиидеального каскада с несмешением по относительной концентрации  $R_{n,n+1} = c_n/c_{n+1}$  при фиксированном числе ступеней в отвальной части каскада в случае разделения природной смеси изотопов криптона (см. табл. 2.3). Коэффициент разделения, приходящийся на единичную разность массовых чисел  $q_0$ , в расчетах был принят равным 1,2. Из приведенных зависимостей следует, что на величину  $c_{nP}$  существенно влияет длина отвальной части каскада.

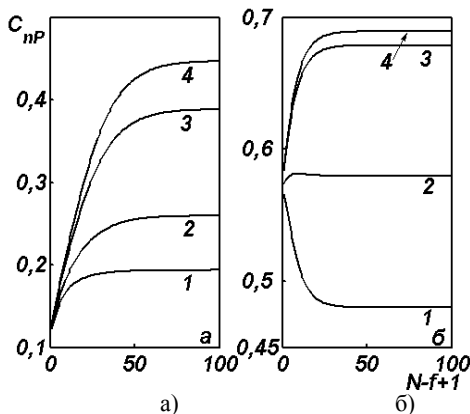


Рис. 2.29. Зависимость концентрации целевых компонентов: а –  $n=4$  ( $^{83}\text{Kr}$ ) и б –  $n=5$  ( $^{84}\text{Kr}$ ) в потоке отбора  $c_{nP}$  от числа разделительных ступеней в обогащительной части квазиидеального каскада с несмешением по относительной концентрации  $R_{n,n+1} = c_n/c_{n+1}$  при фиксированном числе ступеней в отвальной части: 1 ступень (1), 5 (2), 20 (3) и 200 (4) ступеней для случая разделения природной смеси изотопов криптона и  $q_0=1,2$

Рис. 2.30 иллюстрирует зависимость относительного приращеня концентрации целевого компонента  $c_{nP} - c_{nF}/c_{nF}$  от длины обогащительной части каскада при фиксированном числе ступеней

в отвальной части для случая разделения природной смеси изотопов криптона при различных значениях параметра

$$h = \sum_{i=n+1}^m c_{iF} - \sum_{i=1}^n c_{iF} \text{ и номера целевого компонента } n, \text{ равного } 3,4,5$$

соответственно. Как можно видеть из полученных зависимостей, при фиксированном конечном числе ступеней в отвальной части каскада обогащение целевого компонента на «легком» (отборном) конце каскада целесообразно проводить при выполнении условия

$$h = \sum_{i=n+1}^m c_{iF} - \sum_{i=1}^n c_{iF} > 0. \text{ При этом, чем больше величина } h, \text{ тем выше}$$

концентрация целевого компонента в потоке отбора.

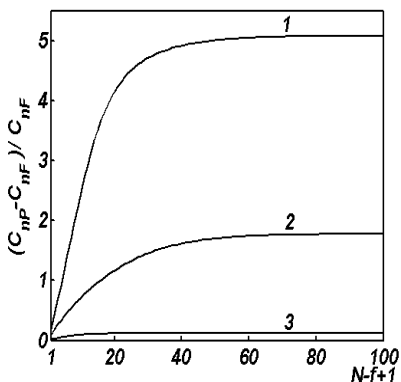


Рис. 2.30. Зависимость относительного приращения концентрации целевого компонента  $C_{nP} - C_{nF} / C_{nF}$  от длины обогатительной части каскада при фиксированном числе ступеней в отвальной части ( $f=10$ ) для случая разделения природной смеси изотопов криптона при различных значениях параметра

$$h = \sum_{i=n+1}^m c_{iF} - \sum_{i=1}^n c_{iF} : 0,7158 \text{ (1) } 0,486 \text{ (2) } , -0,654 \text{ (3) и номере целевого компонента } n, \text{ равном } 3,4,5 \text{ соответственно; } q_0=1,2$$

При фиксированном числе ступеней в отвальной части квази-идеального каскада максимальная концентрация целевого компонента в потоке отбора может быть найдена предельным переходом  $N \rightarrow \infty$  в формуле (2.393)



$$c_{nP}^{\max} \approx \frac{1 - g_n^{-f}}{\sum_{i=1}^n (1 - g_n^{-f})} c_{nF}. \quad (2.422)$$

Концентрацию целевого компонента в потоке отвала можно рассчитать по формуле

$$c_{nW} = \frac{g_n^{-f}}{\sum_{i=n+1}^m c_{iF} + \sum_{i=1}^n g_i^{-f} c_{iF}} c_{nF}. \quad (2.423)$$

С уменьшением числа ступеней в обогатительной части каскада при фиксированной величине  $f$  концентрация целевого компонента в потоке отбора  $c_{nP}$  снижается.

Рассмотрим два предельных случая. В первом обогатительная секция состоит всего из одной ступени, на вход которой подают поток питания. В этом случае выражения для определения концентраций в потоках отбора и отвала (2.393) и (2.394) приводятся к виду

$$c_{nP}^{\min} \approx \frac{1 - g_n^{-f}}{1 - g_n^{-f-1}} c_{nF} \bigg/ \sum_{i=1}^m \frac{1 - g_i^{-f}}{1 - g_i^{-f-1}} c_{iF}, \quad (2.424)$$

$$c_{nW} \approx \frac{1 - g_n}{1 - g_n^{f+1}} c_{nF} \bigg/ \sum_{i=1}^m \frac{1 - g_i}{1 - g_i^{f+1}} c_{iF}. \quad (2.424)$$

Во втором случае при стремлении  $f \rightarrow \infty$  формула (2.422) для определения концентрации целевого компонента в потоке отбора приводится к известному виду [5]

$$c_{nP}^{\max} \approx c_{nF} \bigg/ \sum_{i=1}^n c_{iF}, \quad (2.426)$$

а при стремлении  $f \rightarrow 0$  формула (2.422) будет иметь вид

$$c_{nP}^{\max} \approx c_{nF} \bigg/ \sum_{i=1}^n \frac{\ln g_i}{\ln g_n} c_{iF}. \quad (2.427)$$

При этом отношение логарифмов параметров  $g_i$  и  $g_n$  в формуле (2.427) будет больше или равно 1:  $\ln g_i / \ln g_n \geq 1$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Из формул (2.422) и (2.427) следует, что допустимую концентрацию

целевого компонента в потоке отбора можно рассчитать по соотношению

$$c_{nF} / \sum_{i=1}^n \frac{\ln g_i}{\ln g_n} c_{iF} < c_{nP}^{\max} < c_{nF} / \sum_{i=1}^n c_{iF}. \quad (2.428)$$

Таким образом, формулы (2.422) – (2.428) при возможных значениях длин отборной и отвальной частей каскада позволяют построить кривые, ограничивающие область существования решения системы (2.412) – (2.413) (рис. 2.31).

Отметим, что поведение кривой, описывающей ограничение на  $c_{nP}$  сверху при заданной величине  $c_{nW}$ , которое рассчитывается по формулам (2.422) и (2.423), не зависит от величины коэффициента разделения, приходящегося на единицу массовых чисел  $q_0$ , и определяется только исходным составом разделяемой смеси.

Сравнение величин концентраций, рассчитанных по формулам (2.426), (2.427), показывает, что в квазиидеальном каскаде с немалой отвальной частью ( $f-1 \gg 1$ ) можно достичь заметно большего обогащения промежуточного компонента по сравнению со случаем отсутствия отвальной части. В некоторых случаях в каскаде без отвальной части промежуточные компоненты почти не обогащаются. Такой случай имеет место, например, при обогащении изотопа  $^{84}\text{Kr}$  из природной смеси в каскаде с несмещением по относительной концентрации  $R_{56} = c_5/c_6$  (рис. 2.29,  $n=5$ ).

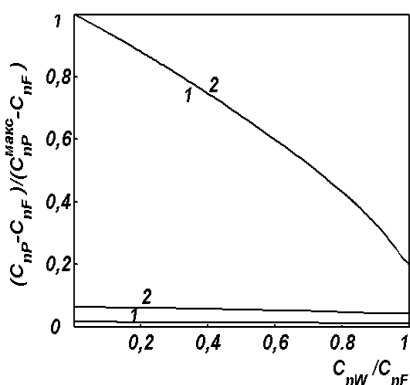


Рис. 2.31. Область допустимых значений концентрации целевого компонента в потоке отбора  $C_{nP}$  и отвала  $C_{nW}$  квазиидеального каскада при равенстве относительной концентрации  $R_{45} = c_4/c_5$  в потоках, поступающих на вход ступеней, для коэффициента разделения, приходящегося на единичную разность массовых чисел  $q_0$ , равного 1,1 (1), 1,3 (2) (кривые, описывающие ограничение сверху для случаев 1 и 2 совпадают)

В случае «слабого обогащения» на ступенях каскада формулы (2.422), (2.423), (2.426), (2.427) переходят в соответствующие соотношения для  $Q$ -каскада, приведенные в разделе 2.3.4.1.

По формулам (2.423), (2.425) для расчета концентрации целевого компонента в потоке отвала при заданной концентрации в потоке отбора  $c_{nP}$  можно определить минимальную длину отвальной секции каскада и тем самым максимально возможную концентрацию целевого компонента в потоке отвала, при которой возможно получить заданное обогащение. Поскольку при  $(f-1) \rightarrow (f-1)_{\min}$  возрастает длина обогатительной части каскада  $g_i^N \rightarrow \infty$  при  $(i = \overline{1, n}; g_i^N \rightarrow \infty$  при  $i = \overline{n+1, m})$  суммарный поток в квазиидеальном каскаде (или в частном случае  $R$ -каскада) в соответствии с соотношением (2.397) будет стремиться к бесконечности. В то же время требуемая концентрация в потоке отбора  $c_{nP}$  может быть получена при любых значениях  $(f-1) \rightarrow (f-1)_{\min}$ . Причем с ростом величины  $(f-1)$  длина обогатительной части  $(N-f+1)$  будет уменьшаться. При  $(f-1) \rightarrow \infty$  (то есть при  $c_{nW} \rightarrow 0$ ) суммарный поток в каскаде будет неограниченно возрастать. Другими словами, при фиксированной концентрации целевого компонента в отборе в интервале значений, определяющих длину отвальной части  $(f-1)_{\min} < (f-1) < \infty$ , находится оптимальное число ступеней, при котором суммарный поток в квазиидеальном каскаде (или  $R$ -каскаде, являющемся частным его случаем) будет минимален. Чем большее обогащение в квазиидеальном каскаде необходимо получить, тем больше будет величина  $(f-1)_{\min}$ , т.е. тем больше должна быть длина отвальной части, при которой суммарный поток в каскаде минимален. В силу того, что целевой компонент в отвальной части обедняется, его оптимальная концентрация в потоке отвала будет также уменьшаться с ростом концентрации целевого компонента в потоке отбора.

Наличие оптимальной отвальной части в каскадах для разделения многокомпонентных изотопных смесей существенно отличает их от каскадов для разделения бинарных смесей, в которых минимум суммарного потока всегда соответствует случаю отсутствия отвальной части и в которых нет ограничения на предельную концентрацию обогащаемого компонента.

При заданных величинах  $M^*$ ,  $q_0$ ,  $c_{jF}$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) алгоритм расчета  $R$ -каскада на заданные концентрации целевого компонента  $c_{nP}$  и  $c_{nW}$  имеет следующий вид:

1. Рассчитывают все значения параметра  $d_j = \frac{\ln q_{jk} - 1}{\ln g_n} - 1$

( $n$  – номер целевого компонента,  $k$ -номер «опорного» компонента).

2. Задают требуемые концентрации целевого компонента в отводимых из каскада потоках  $c_{nP}$ ,  $c_{nW}$  из определенной заранее области допустимых значений.

3. Решая систему (2.412) – (2.413) для ключевого (целевого) компонента, находят величины относительных концентраций  $R_{nk}^P$  и  $R_{nk}^W$ .

4. По соотношениям (2.412) – (2.413) рассчитывают остальные концентрации компонентов в отводимых из каскада потоках  $F/P$  и  $W/P$  по формулам (2.410), (2.411), а по соотношениям (2.408) – (2.409) величины  $N$  и  $f$ .

5. Расчет суммарного потока проводят по формуле (2.417).

В качестве иллюстрации ниже приведены результаты расчета  $R$ -каскада для обогащения потока изотопа  $^{180}\text{W}$  (в виде гексафторида вольфрама) с использованием газовых центрифуг, полученные в работе [61].

Исходные данные расчета:

1. Коэффициент разделения ступени, приходящийся на единичную разность массовых чисел  $q_0$  ..... 1,16306
2. Поток питания одиночной центрифуги, г W/сек. .... 0,074
3. Концентрации компонентов в потоке питания:
 

|                  |         |
|------------------|---------|
| $c_F(180)$ ..... | 0,00140 |
| $c_F(182)$ ..... | 0,26416 |
| $c_F(183)$ ..... | 0,14440 |
| $c_F(184)$ ..... | 0,30618 |
| $c_F(186)$ ..... | 0,28417 |
4. Величина  $M^*$  ..... 181

|   |            |
|---|------------|
| 5. Поток отбора, кг·W/сут.....  | 1,0        |
| 6. Концентрация целевого изотопа ( $^{180}\text{W}$ )<br>в потоке отбора.....         | $\geq 0,5$ |
| 7. Коэффициент извлечения целевого изотопа,<br>$\frac{Pc_P(180)}{Fc_F(180)}$ , %..... | $\sim 90$  |

Результаты расчета:

|  |         |
|--|---------|
| 1. Число ступеней в обогатительной<br>части каскада, $N-f+1$ .....                         | 35      |
| 2. Число ступеней в обеднительной части каскада, $f-1$ .....                               | 14      |
| 3. Концентрации компонентов в потоке отбора:   |         |
| $c_P(180)$ .....   | 0,5194  |
| $c_P(182)$ .....   | 0,48756 |
| $c_P(183)$ .....   | 0,00148 |
| $c_P(184)$ .....   | 0,00002 |
| $c_P(186)$ .....   | 0,00000 |
| 4. Концентрации компонентов в потоке отвала:   |         |
| $c_W(180)$ .....   | 0,00014 |
| $c_W(182)$ .....   | 0,26361 |
| $c_W(183)$ .....   | 0,14444 |
| $c_W(184)$ .....   | 0,30693 |
| $c_W(186)$ .....   | 0,28487 |
| 5. Поток отвала, $W$ , кг·W/сут.....   | 406     |
| 6. Поток питания $F$ , кг·W/сут.....   | 407     |
| 7. Число центрифуг, соединенных в параллель в «головной»<br>ступени каскада ( $s=f$ )..... | 645     |
| 8. Суммарное число центрифуг в обогатительной части<br>каскада.....                        | 3210    |
| 9. Суммарное число центрифуг в обеднительной части<br>каскада.....                         | 7018    |
| 10. Общее число центрифуг в каскаде.....   | 10228   |

В табл. 2.13 представлены распределения концентраций компонентов, величин  $L_s$  и  $\theta_s$  по ступеням каскада.

В рассмотренном примере в качестве целевого компонента выступает изотоп  $^{180}\text{W}$ , а в качестве опорного изотоп  $^{182}\text{W}$ . Если концентрация целевого изотопа  $^{180}\text{W}$ , являющегося крайним компонентом, меняется монотонно от первой до последней ступени каскада, то концентрация изотопа  $^{182}\text{W}$  достигает максимального значения на ступени с номером  $s=29$  и далее убывает по направлению к «легкому» концу каскада. Другими словами, «отделение» целевого изотопа  $^{180}\text{W}$  от остальных компонентов смеси происходит на участке каскада с номерами ступеней  $s$  от 29 до 49. Из табл. 2.13 видно, что поток  $L_s$  имеет максимальное значение в «головной» ступени каскада ( $s=15$ ) и убывает по направлению к «легкому» и «тяжелому» концам каскада.

Таблица 2.13  
Концентрации компонентов, величины потоков и коэффициенты среза на ступенях  $R$ -каскада для концентрирования  $^{180}\text{W}$

| Номер ступени, $s$ | $L_s, \text{гWF}_6/\text{с}$ | Число центрифуг в ступени | $\theta_s$ | $c_s(180)$ | $c_s(182)$ | $c_s(183)$ | $c_s(184)$ | $c_s(186)$ |
|--------------------|------------------------------|---------------------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1                  | 12,655                       | 171                       | 0,399      | 0,00019    | 0,24489    | 0,15111    | 0,301196   | 0,25186    |
| 2                  | 21,206                       | 287                       | 0,403      | 0,00024    | 0,32278    | 0,15683    | 0,29473    | 0,22092    |
| 3                  | 27,261                       | 368                       | 0,407      | 0,00031    | 0,35579    | 0,16304    | 0,28590    | 0,19767    |
| 4                  | 31,721                       | 429                       | 0,410      | 0,00038    | 0,38054    | 0,16214    | 0,27664    | 0,18030    |
| 5                  | 35,115                       | 475                       | 0,413      | 0,00047    | 0,40183    | 0,16274    | 0,26766    | 0,16730    |
| 6                  | 37,765                       | 510                       | 0,415      | 0,00057    | 0,42007    | 0,16250    | 0,25938    | 0,15749    |
| 7                  | 39,877                       | 539                       | 0,416      | 0,00069    | 0,43563    | 0,16172    | 0,25196    | 0,15001    |
| 8                  | 41,588                       | 562                       | 0,418      | 0,00083    | 0,44888    | 0,16061    | 0,24545    | 0,14423    |
| 9                  | 42,990                       | 581                       | 0,419      | 0,00098    | 0,46816    | 0,15934    | 0,23981    | 0,13970    |
| 10                 | 44,152                       | 597                       | 0,420      | 0,00117    | 0,46976    | 0,15801    | 0,23496    | 0,13610    |
| 11                 | 45,123                       | 610                       | 0,421      | 0,00138    | 0,47791    | 0,15667    | 0,23082    | 0,13321    |
| 12                 | 45,940                       | 621                       | 0,421      | 0,00163    | 0,48483    | 0,15539    | 0,22729    | 0,13086    |
| 13                 | 46,631                       | 630                       | 0,422      | 0,00192    | 0,49070    | 0,15418    | 0,22427    | 0,12893    |
| 14                 | 47,220                       | 638                       | 0,422      | 0,00226    | 0,49567    | 0,15305    | 0,22170    | 0,12732    |
| 15                 | 47,725                       | 645                       | 0,423      | 0,00265    | 0,49987    | 0,15201    | 0,21249    | 0,12598    |
| 16                 | 35,467                       | 479                       | 0,432      | 0,00356    | 0,57784    | 0,15121    | 0,18773    | 0,07965    |
| 17                 | 27,255                       | 368                       | 0,439      | 0,00463    | 0,64592    | 0,14547    | 0,15528    | 0,04871    |

|    |        |     |       |         |         |         |         |         |
|----|--------|-----|-------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 18 | 21,490 | 290 | 0,444 | 0,00587 | 0,70355 | 0,13639 | 0,12517 | 0,02903 |
| 19 | 17,278 | 233 | 0,448 | 0,00729 | 0,75139 | 0,12540 | 0,09896 | 0,01696 |
| 20 | 14,097 | 191 | 0,452 | 0,00892 | 0,79061 | 0,11362 | 0,07709 | 0,00977 |
| 21 | 11,631 | 157 | 0,454 | 0,01079 | 0,82246 | 0,10179 | 0,05939 | 0,00556 |
| 22 | 9,678  | 131 | 0,456 | 0,01294 | 0,84811 | 0,09044 | 0,04537 | 0,00314 |
| 23 | 8,105  | 110 | 0,458 | 0,01541 | 0,86857 | 0,07982 | 0,03443 | 0,00176 |
| 24 | 6,823  | 92  | 0,459 | 0,01826 | 0,88467 | 0,07009 | 0,02600 | 0,00098 |
| 25 | 5,766  | 78  | 0,460 | 0,02153 | 0,89706 | 0,06130 | 0,01955 | 0,00055 |
| 26 | 4,889  | 66  | 0,461 | 0,02530 | 0,90629 | 0,05344 | 0,01466 | 0,00030 |
| 27 | 4,155  | 56  | 0,462 | 0,02964 | 0,91276 | 0,04648 | 0,01096 | 0,00017 |
| 28 | 3,538  | 48  | 0,463 | 0,03462 | 0,91677 | 0,04033 | 0,00818 | 0,00009 |
| 29 | 3,018  | 41  | 0,464 | 0,04035 | 0,91856 | 0,03494 | 0,00610 | 0,00005 |
| 30 | 2,577  | 35  | 0,464 | 0,04691 | 0,91829 | 0,03023 | 0,00454 | 0,00003 |
| 31 | 2,202  | 30  | 0,465 | 0,05443 | 0,91606 | 0,02613 | 0,00338 | 0,00002 |
| 32 | 1,884  | 25  | 0,466 | 0,06302 | 0,91191 | 0,02256 | 0,00251 | 0,00001 |
| 33 | 1,612  | 22  | 0,467 | 0,07281 | 0,90587 | 0,01946 | 0,00186 | 0,00000 |
| 34 | 1,379  | 19  | 0,468 | 0,08393 | 0,89790 | 0,01678 | 0,00139 | 0,00000 |
| 35 | 1,180  | 16  | 0,469 | 0,09654 | 0,88798 | 0,01446 | 0,00103 | 0,00000 |
| 36 | 1,009  | 14  | 0,470 | 0,11077 | 0,87602 | 0,01245 | 0,00076 | 0,00000 |
| 37 | 0,862  | 12  | 0,471 | 0,12676 | 0,86195 | 0,01072 | 0,00057 | 0,00000 |
| 38 | 0,735  | 10  | 0,473 | 0,14465 | 0,84570 | 0,00922 | 0,00042 | 0,00000 |
| 39 | 0,626  | 8   | 0,474 | 0,16456 | 0,82719 | 0,00793 | 0,00031 | 0,00000 |
| 40 | 0,531  | 7   | 0,476 | 0,18657 | 0,80637 | 0,00682 | 0,00023 | 0,00000 |
| 41 | 0,448  | 6   | 0,478 | 0,21076 | 0,78320 | 0,00587 | 0,00018 | 0,00000 |
| 42 | 0,376  | 5   | 0,480 | 0,23714 | 0,75769 | 0,00504 | 0,00013 | 0,00000 |
| 43 | 0,312  | 4   | 0,482 | 0,25569 | 0,72988 | 0,00433 | 0,00010 | 0,00000 |
| 44 | 0,256  | 3   | 0,485 | 0,29631 | 0,69989 | 0,00372 | 0,00008 | 0,00000 |
| 45 | 0,205  | 3   | 0,487 | 0,32887 | 0,66788 | 0,00320 | 0,00006 | 0,00000 |
| 46 | 0,159  | 2   | 0,490 | 0,36313 | 0,63408 | 0,00275 | 0,00004 | 0,00000 |
| 47 | 0,116  | 2   | 0,492 | 0,39883 | 0,59877 | 0,00236 | 0,00003 | 0,00000 |
| 48 | 0,076  | 1   | 0,495 | 0,43563 | 0,56232 | 0,00202 | 0,00003 | 0,00000 |
| 49 | 0,038  | 1   | 0,498 | 0,47313 | 0,52511 | 0,00174 | 0,00002 | 0,00000 |

Коэффициент деления потоков  $\theta_s$  монотонно растет от первой до последней ступени; относительное изменение этой величины составляет ~25%. Результаты расчета позволяют оценить общее

количество одиночных разделительных аппаратов, необходимое для решения поставленной задачи.

Оптимизационный расчет  $R$ -каскада с заданными концентрациями  $c_{nP}$  и  $c_{nW}$  ( $n$  – номер целевого компонента) сводится к нахождению параметра  $M^*$ , при котором суммарный поток минимален.

При решении этой задачи систему (2.410) – (2.412) с учетом (2.408), (2.409), (2.420) и (2.421) целесообразно представить в виде

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_j)f}}{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N+1)}}, \quad (2.429)$$

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N-f+1)}}{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N+1)}}, \quad (2.430)$$

$$c_{iP} = c_{iF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_i)f}}{1 - q_0^{-(M^* - M_i)(N+1)}} \bigg/ \frac{\sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_j)f}}{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N+1)}}}{\sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_j)f}}{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N+1)}}}, \quad (2.431)$$

$$c_{iW} = c_{iF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_i)(N-f+1)}}{1 - q_0^{-(M^* - M_i)(N+1)}} \bigg/ \frac{\sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N-f+1)}}{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N+1)}}}{\sum_{j=1}^m c_{jF} \frac{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N-f+1)}}{1 - q_0^{-(M^* - M_j)(N+1)}}}, \quad (2.432)$$

а для суммарного потока использовать соотношение (2.397).

Заданными величинами являются: состав исходной смеси  $c_{jF}$  ( $j = \overline{1, m}$ ), массовые числа компонентов разделяемой смеси  $M_j$  ( $j = \overline{1, m}$ ), коэффициент разделения, приходящийся на единицу разности массовых чисел  $q_0$ , концентрации целевого компонента ( $i = n$ ) в потоках отбора  $c_{nP}$  и отвала  $c_{nW}$ , поток отбора  $P$ .

К неизвестным величинам относятся: полное число ступеней в каскаде  $N$ , номер ступени, на вход которой подают поток питания  $f$ ,



$M^*$  – параметр, при оптимальном значении которого R-каскад имеет минимальный суммарный поток.

При решении оптимизационной задачи можно считать, что величина  $M^*$  непрерывно меняется от самой легкой до самой тяжелой массы разделяемой изотопной смеси  $M_1 < M^* < M_m$ . Формально это означает, что в рассмотрение вводятся фиктивные компоненты с массовыми числами, лежащими в диапазоне  $M_1 < M_{i(\text{фикт})} < M_m$ , с исчезающе малыми концентрациями  $c_{i(\text{фикт})} \rightarrow 0$ .

На рис. 2.32 представлены зависимости относительного суммарного потока  $\Sigma L/P$  от величины параметра  $M^*$  при обогащении в R-каскаде промежуточного компонента  $^{83}\text{Kr}$  из природной смеси изотопов при различных концентрациях целевого компонента в потоке отбора (а:  $c_{nP}=15\%$ , б:  $20\%$ , в:  $30\%$ , г:  $40\%$ ) и фиксированном значении концентрации целевого компонента в потоке отвала  $c_{nW}=5\%$ . Величина коэффициента  $q_0$  принята равной 1,1;  $(c_{4P})_{\text{макс}}=44,7\%$ .

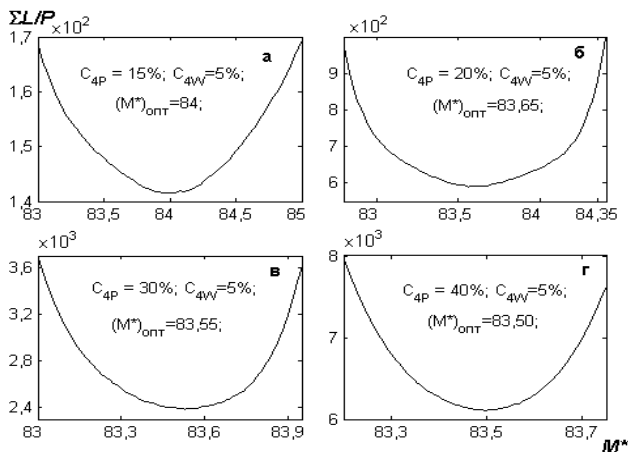


Рис. 2.32. Зависимости относительного суммарного потока  $\Sigma L/P$  от величины параметра  $M^*$  при обогащении в R-каскаде промежуточного компонента  $^{83}\text{Kr}$  ( $n=4$ ) из природной смеси изотопов криптона при различных концентрациях целевого компонента в потоке отбора

Приведенные зависимости подтверждают полученный ранее вывод для случая «слабого обогащения» (см. раздел 2.3.4.1) о том, что заданные значения концентрации целевого компонента в потоках отбора  $c_{nP}$  и отвала  $c_{nW}$  могут быть получены в  $R$ -каскаде при значении параметра  $M^* = (M^*)_{opt}$ , обеспечивающем минимальный суммарный поток. Отметим, что в рассмотренном примере в случаях а, б и в минимальные потоки соответствуют  $R$ -каскадам, для которых в роли опорных выступают фиктивные компоненты. Для  $R$ -каскада, для которого  $(M^*)_{opt} = 83,5$  (случай г), имеет место несмещение по относительной концентрации  $c(^{83}Kr)/c(^{84}Kr)$ . Численные исследования показали, что при фиксированных значениях концентраций  $c_{nP}$  и  $c_{nW}$  оптимальное значение величина  $(M^*)_{opt}$  от величины  $q_0$  практически не зависит.

#### 2.4.4.3. Оптимальный каскад с заданными концентрациями по целевому изотопу. Сравнение с $R$ -каскадом

Одной из важных задач, представляющих как теоретический, так и практический интерес является определение параметров наилучшего (оптимального) каскада с заданными внешними концентрациями по целевому компоненту. Под наилучшим (оптимальным) каскадом будем понимать каскад, характеристики которого соответствуют критерию минимальности суммарного потока, то

есть  $\sum_{s=1}^N L_s \rightarrow \min$ , без дополнительных требований, налагаемых

на внешние и внутренние параметры каскада.

Особый интерес представляет сравнение оптимальных каскадов с  $R$ -каскадами, свойства которых рассмотрены в предыдущем разделе. Возможные подходы к оптимизации многокомпонентных каскадов с заданными внешними концентрациями целевого изотопа рассмотрены в работах [53 – 56]. Суть подхода, предложенного, например, в работе [53] состоит в следующем. Анализ соотноше-

ний (2.286) – (2.298) показывает, что если известны параметры внешнего питания ( $F, c_{jF}, j = \overline{1, m}$ ), концентрации целевого компонента в потоках отбора  $c_{nP}$  и отвала  $c_{nW}$ , а также фиксированы параметры  $N$  и  $f$ , то количество свободно выбираемых параметров каскада равно  $N-2$ . Эти параметры могут быть определены исходя из принятого критерия эффективности – минимума суммарного потока в каскаде. В случае, когда коэффициенты разделения  $q_{ij}$  на ступенях каскада являются константами, для решения задачи оп-

тимизации  $\sum_{s=1}^N L_s \rightarrow \min$  при выполнении условий (2.286) – (2.298)

в качестве свободных  $N-2$  параметров предложено использовать отвальные концентрации на ступенях  $c_s'' (s = \overline{2, N-1})$ . При этом в качестве целевого выбран самый легкий компонент в номером 1. Исключение переменных преобразует критерий минимальности

суммарного потока  $\sum_{s=1}^N L_s \rightarrow \min$  к следующему выражению

$$\sum_{s=1}^N L_s(N, f, c_1(2), \dots, c_1(N-1)) \rightarrow \min. \quad (2.433)$$

Для нахождения связи параметров каскада с величинами  $c_1''(2), c_1''(3), \dots, c_1''(N-1)$  применяют итерационный подход, с помощью которого уточняют значения неизвестных отвальных концентраций на ступенях по второму и всем последующим компонентам. На каждой итерации по заданным концентрациям  $c_1''(2), c_1''(3), \dots, c_1''(N-1)$  и приближенно выбранным концентрациям других компонентов находят потоки по формуле

$$L_s'' = \frac{J_{1,s} - c_1'(s-1)T_s}{c_1'(s-1) - c_1''(s)}, \quad (2.434)$$

где  $J_{1,s}$  и  $T_s$  определяются соотношениями (2.292) и (2.293), а  $c_1'(s)$  рассчитывают по формуле (2.412).

Далее проводят последовательный расчет всех внутренних параметров каскада, начиная, например, с первой отвальной ступени.

Для этого используют рекуррентные соотношения для ступеней, основывающиеся на формулах (2.286) – (2.298). В конце расчета проверяют выполнение граничных условий на отборном конце каскада. Если они не выполняются, то итерационный процесс продолжают до выполнения этих условий.

В процедуре оптимизации перебор концентраций  $c_1''(2), c_1''(3), \dots, c_1''(N-1)$  целесообразно проводить с использованием известных методов нелинейного программирования и, если необходимо, сочетать их с методом случайного поиска [57, 58].

В работе [56] для сравнения  $R$ -каскада и оптимального каскада с одинаковыми конечными концентрациями целевого компонента в качестве разделяемой смеси рассмотрена 4-компонентная модельная смесь со следующими параметрами:  $M_1=298, M_2=299, M_3=300, M_4=301, c_{1F}=10\%, c_{2F}=30\%, c_{3F}=30\%, c_{4F}=30\%$ . За целевой принят самый легкий компонент ( $n=1$ ),  $q_0=2$ . Концентрации целевого компонента в потоках отбора  $c_{1P}=91,42\%$  и отвала  $c_{1W}=0,33\%$  были получены из предварительного расчета  $R$ -каскада с несмешением по относительной концентрации  $R_{12} = c_1/c_2$  ( $M^* = 298,5$ ) с 10 ступенями в отборной и 9 ступенями в отвальной секциях каскада. Расчет показывает, что "наилучшим"  $R$ -каскадом для заданных концентраций оказывается каскад с  $(M^*)_{\text{опт}}=298,6$ . Сравнение характеристик  $R$ -каскада и оптимального каскада, разделяющих 4-х компонентную модельную смесь ( $M_1=298, M_2=299, M_3=300$  и  $M_4=301, c_{1F}=10\%, c_{2F}=30\%, c_{3F}=30\%, c_{4F}=310\%, q_0=2$ ) при фиксированных значениях целевого компонента ( $n=1$ ) на концах каскада  $c_{1P}=91,42\%, c_{1W}=0,33\%$  приведено в табл. 2.14.

Таблица 2.14

Сравнение оптимального и  $R$ -каскадов при одинаковых значениях концентрации целевого компонента в потоках отбора и отвала

| Каскад                     | $N$         | $f$       | $\Sigma L/P$ |
|----------------------------|-------------|-----------|--------------|
| $M^*=298,5$                | 19          | 10        | 306,12       |
| $(M^*)_{\text{опт}}=298,6$ | 19,71 (~20) | 8,46 (~8) | 302,26       |
| Оптимальный                | 18          | 8         | 298,5        |

В табл. 2.14 приведены характеристики двух  $R$ -каскадов с  $M^*=298,5$  и  $(M^*)_{opt}=298,6$ , а также каскада с оптимизированными по критерию минимальности суммарного потока параметрами с указанными выше концентрациями целевого компонента в потоках отбора и отвала. Как видно из приведенных в таблице данных, значения суммарных потоков во всех рассмотренных случаях близки друг к другу. Превышение суммарного потока  $R$ -каскада с  $M^*=298,5$  над суммарным потоком оптимального каскада составляет 2,6%, а в случае  $(M^*)_{opt}=298,6$  – на 1,26%.

В работах [54, 55] также приведены результаты расчета центробежных каскадов для обогащения изотопов  $^{28}\text{Si}$  в виде тетрафторида кремния  $\text{SiF}_4$  с массовыми числами компонентов  $M_1=104$ ,  $M_2=105$ ,  $M_3=106$  и концентрациями компонентов в потоке питания  $c_{1F}=92,21\%$ ,  $c_{2F}=4,70\%$ ,  $c_{3F}=3,09\%$ . Коэффициент разделения на единицу разности массовых чисел принят равным  $q_0=\sqrt{3}$ . Для  $R$ -каскада с несмешением по относительной концентрации  $R_{13} = c_1 / c_3$  ( $M^*=105$ ) с числом ступеней  $N=81$  и подачей потока питания в ступень с номером  $f=21$  были найдены следующие конечные концентрации целевого компонента  $c_{1P}=98,71\%$ ,  $c_{2W}=1,4 \cdot 10^{-2} \%$ , а относительный суммарный поток в каскаде был равен  $\sum L / P=291,8$ .

Параметры оптимального каскада с заданными внешними концентрациями целевого компонента  $c_{1P}=98,71\%$ ,  $c_{2W}=1,4 \cdot 10^{-2} \%$  оказались равны  $N=42$  и  $f=38$ , а суммарный поток  $\sum L / P=51,1$ . Расчет показывает, что характеристики наилучшего  $R$ -каскада были равны:  $(M^*)_{opt}=104,5$ , что означает несмешение по относительной концентрации  $R_{12} = c_1 / c_2$ ,  $N=45$  и  $f=41$ ,  $\sum L / P=51,17$ . Таким образом различие в величинах суммарного потока в оптимальном и  $R$ -каскадах с  $(M^*)_{opt}$  не превышает 0,14%, в то время как в  $R$ -каскаде с  $M^*=105$  он в несколько раз больше.

Отсюда следует важный вывод. Опираясь на теорию модельных каскадов для разделения многокомпонентных изотопных (в частности  $R$ -каскадов), можно получать исходные данные (начальные приближения) для определения оптимальных параметров много-

ступенчатых разделительных установок с заданными внешними концентрациями целевого изотопа.

2.4.4.4. *Квазиидеальный каскад с потерями рабочего вещества на ступенях [59-62]*

Схема каскада для разделения многокомпонентных смесей с потерями рабочего вещества приведена на рис. 2.33.

Так же, как и в случае разделения бинарных смесей, будем считать, что потери на каждой ступени каскада  $\Delta L_s$  пропорциональны потоку на ее входе, т.е.

$$\Delta L_s = yL(s), \quad (2.435)$$

где  $y$  – величина, называемая коэффициентом потерь, которую принимают одинаковой для всех ступеней каскада.

Уравнение коммутации потоков на входе в произвольную  $s$ -ую ступень в этом случае имеет вид:

$$G'_i(s-1) + G''_i(s+1) = (1+y) [G'_i(s) + G''_i(s)], \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.436)$$

с учетом:

$$G''_i = \frac{G'_i}{g_i}, \quad G_i = \frac{g_i + 1}{g_i} G'_i, \quad (2.437)$$

соотношения (2.436) для квазиидеального каскада могут быть переписаны в виде:

$$G'_i(s-1) + \frac{1}{g_i} G'_i(s+1) = (1 + \frac{1}{g_i})(1+y)G'_i(s), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.438)$$

где  $g_i$  - константы.

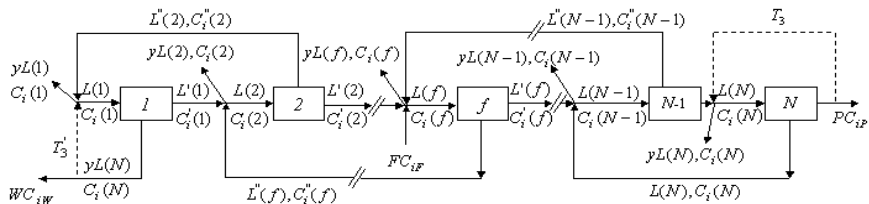


Рис. 2.33. Схема противоточного разделительного каскада с потерями в «узлах» каскада

$$\left. \begin{aligned}
 G'_i(0) &= G'_i(N+1) = 0, \\
 G'_i(f-1) + \frac{1}{g_i} G'_i(f+1) - \left(1 + \frac{1}{g_i}\right)(1+y)G'_i(f) + Fc_{iF} &= 0, \\
 G'_i(N) &= Pc_{iP}, \\
 G'_i(1) &= g_i(1)Wc_{iW}, \\
 i &= 1, 2, \dots, m.
 \end{aligned} \right\} (2.439)$$

Кроме того, решения уравнений (2.438) для отборной и отвальной частей каскада должны совпадать при  $s = f$ .

Фундаментальные решения уравнений (2.438) могут быть записаны в виде

$$G'_i(s) = A_i \omega_{1i}^s + B_i \omega_{2i}^s, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.440)$$

где  $A_i$  и  $B_i$  – константы, которые должны быть найдены из граничных условий, а  $\omega_{1i}, \omega_{2i}$  являются решениями квадратных уравнений

$$\omega_i^2 - (g_i + 1)(1+y)\omega_i + g_i = 0, \quad (2.441)$$

имеющими вид

$$\omega_1 = \frac{(g_i + 1)(1+y) + \sqrt{((g_i + 1)(1+y))^2 - 4g_i}}{2}, \quad (2.442)$$

$$\omega_2 = \frac{(g_i + 1)(1+y) - \sqrt{((g_i + 1)(1+y))^2 - 4g_i}}{2}, \quad (2.443)$$

$$i = 1, 2, \dots, m.$$

Использование граничных условий (2.439) позволяет решение уравнений (2.438) записать в виде:

для отвальной части каскада

$$G'_i(s) = Wc_{iW} \frac{\omega_{1i} \omega_{2i}}{\omega_{2i} - \omega_{1i}} (\omega_{2i}^s - \omega_{1i}^s), \quad (2.444)$$

$$s = 1, 2, \dots, f-1, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

$$Wc_{iW} = \frac{\omega_{2i}^{N+1-f} - \omega_{1i}^{N+1-f}}{\omega_{2i}^{N+1} - \omega_{1i}^{N+1}} Fc_{iF}, \quad (2.445)$$

$$s = 1, 2, \dots, f-1, i = 1, 2, \dots, m.$$

для отборной части каскада

$$G'_i(s) = Pc_{iP} \frac{\omega_{2i}^{s-N-1} - \omega_{1i}^{s-N-1}}{\omega_{2i}^{-1} - \omega_{1i}^{-1}}, \quad (2.446)$$

$$s = f, \dots, N, i = 1, 2, \dots, m.$$

$$Pc_{iP}^P = \frac{\omega_{2i}^{-f} - \omega_{1i}^{-f}}{\omega_{2i}^{-N-1} - \omega_{1i}^{-N-1}} Fc_{iF}, \quad (2.447)$$

$$s = f, \dots, N, i = 1, 2, \dots, m.$$

Учитывая, что  $\sum_{j=1}^m c_j = 1$ , из (2.445) – (2.447) получаем:

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{2j}^{N+1-f} - \omega_{1j}^{N+1-f}}{\omega_{2j}^{N+1} - \omega_{1j}^{N+1}} c_{iF}, \quad (2.448)$$

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{2j}^{-f} - \omega_{1j}^{-f}}{\omega_{2j}^{-N-1} - \omega_{1j}^{-N-1}} c_{iF}, \quad (2.449)$$

$$c_{iW} = \frac{\omega_{2i}^{N+1-f} - \omega_{1i}^{N+1-f}}{\omega_{2i}^{N+1} - \omega_{1i}^{N+1}} c_{iF} \left/ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{2j}^{N+1-f} - \omega_{1j}^{N+1-f}}{\omega_{2j}^{N+1} - \omega_{1j}^{N+1}} c_{jF} \right., \quad (2.450)$$

$$c_{iP} = \frac{\omega_{2i}^{-f} - \omega_{1i}^{-f}}{\omega_{2i}^{-N-1} - \omega_{1i}^{-N-1}} c_{iF} \left/ \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{2j}^{-f} - \omega_{1j}^{-f}}{\omega_{2j}^{-N-1} - \omega_{1j}^{-N-1}} c_{jF} \right., \quad (2.451)$$

Далее, используя решения (2.444) (2.446) и соотношения (2.437), можно определить распределение потоков  $L(s)$ , концентраций компонентов  $c_i(s)$  и коэффициента деления потока  $\theta(s)$  по длине квазиидеального каскада с потерями на ступенях.



$$L(s) = \begin{cases} W \sum_{j=1}^m \left(1 + \frac{1}{g_i}\right) \frac{\omega_{1j} \omega_{2j}}{\omega_{2j} - \omega_{1j}} (\omega_{2j}^s - \omega_{1j}^s) c_{jW}, & s = 1, 2, \dots, f-1 \\ P \sum_{j=1}^m \left(1 + \frac{1}{g_i}\right) \frac{\omega_{2j}^{s-N-1} - \omega_{1j}^{s-N-1}}{\omega_{2j} - \omega_{1j}} c_{jP}, & s = f, f+1, \dots, N \end{cases}, \quad (2.452)$$

$$C_i(s) = \begin{cases} \frac{\omega_{1i} \omega_{2i}}{\omega_{2i} - \omega_{1i}} (\omega_{2i}^s - \omega_{1i}^s) c_{iW} / \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j} \omega_{2j}}{\omega_{2j} - \omega_{1j}} (\omega_{2j}^s - \omega_{1j}^s) c_{jW}, & s = 1, 2, \dots, f-1, \\ \frac{\omega_{2i}^{s-N-1} - \omega_{1i}^{s-N-1}}{\omega_{2i}^{-1} - \omega_{1i}^{-1}} c_{iP} / \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{2j}^{s-N-1} - \omega_{1j}^{s-N-1}}{\omega_{2j}^{-1} - \omega_{1j}^{-1}} c_{jP}, & s = f, f+1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.453)$$

$$C_i(s) = \begin{cases} \frac{\omega_{1i} \omega_{2i}}{\omega_{2i} - \omega_{1i}} (\omega_{2i}^s - \omega_{1i}^s) c_{iW} / \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{1j} \omega_{2j}}{\omega_{2j} - \omega_{1j}} (\omega_{2j}^s - \omega_{1j}^s) c_{jW}, & s = 1, 2, \dots, f-1, \\ \frac{\omega_{2i}^{s-N-1} - \omega_{1i}^{s-N-1}}{\omega_{2i}^{-1} - \omega_{1i}^{-1}} c_{iP} / \sum_{j=1}^m \frac{\omega_{2j}^{s-N-1} - \omega_{1j}^{s-N-1}}{\omega_{2j}^{-1} - \omega_{1j}^{-1}} c_{jP}, & s = f, f+1, \dots, N. \end{cases} \quad (2.454)$$

Формулы (2.448) – (2.454) позволяют, например, при заданных величинах  $g_i$ ,  $f$ ,  $N$ ,  $u$  рассчитать квазиидеальный каскад с потерями на ступенях, т.е. определить значения  $W/F$ ,  $P/F$ , значения концентраций компонентов в потоках отбора и отвала  $C_{iP}$ ,  $C_{iW}$ , распределение потока на входе в ступень  $L(s)$  и концентрации компонентов  $C_i(s)$  по длине каскада.

Другую разделительную задачу – расчет параметров квазиидеального каскада с потерями при заданных концентрациях целевого

изотопа  $C_{iP}$  и  $C_{iW}$  решают по тому же алгоритму, который для случая  $y = 0$  описан в разделе 2.4.6.2.

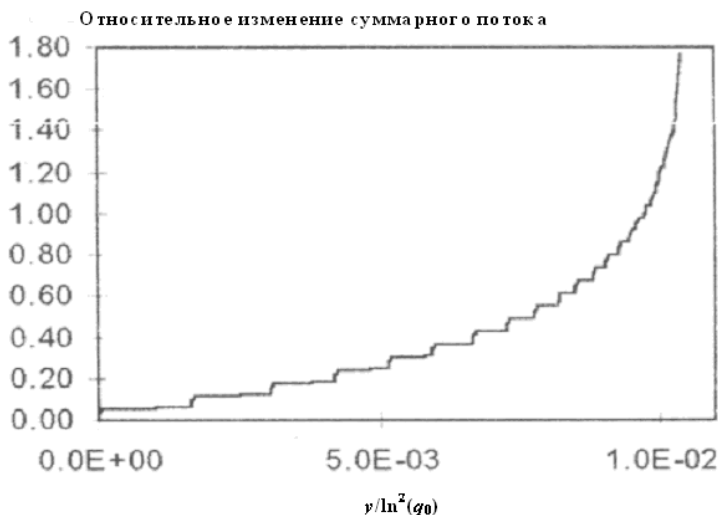


Рис. 2.34. Зависимость относительного изменения суммарного потока в  $R$ -каскаде при обогащении изотопа  $^{180}\text{W}$  в виде гексафторида вольфрама от коэффициента потерь  $y$  при заданных величинах концентрации целевого изотопа в потоке отбора  $C^P(180) \geq 0.5$ , и коэффициенте извлечения ( $\frac{PC_P(180)}{FC_F(180)} \approx 0.9$ )

В качестве иллюстрации на рис. 2.34 представлена зависимость относительного изменения суммарного потока в  $R$ -каскаде, предназначенном для концентрирования изотопа  $^{180}\text{W}$  в виде  $\text{WF}_6$ , от коэффициента потерь  $y$ . Исходные данные расчета были приняты те же, что и в работе [50] для случая отсутствия потерь ( $y = 0$ ).

Из представленной зависимости видно, что, например, при  $y/\ln^2 q_0 = 5 \times 10^{-3}$ , относительное увеличение (по сравнению со случаем отсутствия потерь  $y = 0$ ) суммарного потока составляет  $\approx 24,5\%$ .

В случае малых потерь в разделительной ступени, когда выполнено условие  $y \ll \ln q_0$ , раскладывая (2.441) и (2.442) в ряд, получаем

$$\omega_{1i} = y \frac{1 + g_i}{1 - g_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.455)$$

$$\omega_{2i} = g_i \left(1 - y \frac{1 + g_i}{1 - g_i}\right), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.456)$$

Учитывая малость величины  $y$  по сравнению с единицей соотношения (2.455), (2.456) можно преобразовать к виду

$$\ln \omega_{1i} = y \frac{1 + g_i}{1 - g_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.457)$$

$$\ln \omega_{2i} = \ln g_i - y \frac{1 + g_i}{1 - g_i}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.458)$$

Откуда находим, что

$$\omega_{1i}^s = \exp\left(y \frac{1 + g_i}{1 - g_i} s\right), \quad (2.459)$$

$$\omega_{2i}^s = g_i^s \exp\left(-y \frac{1 + g_i}{1 - g_i} s\right), \quad (2.460)$$

Подставляя (2.459) – (2.460) в (2.448) и (2.451) получим:

$$\frac{W}{F} = \sum_{j=1}^m \frac{g_j^{N+1-f} \exp[-\tilde{y}_j(N+1-f)] - \exp[\tilde{y}_j(N+1-f)]}{g_j^{N+1} \exp[-\tilde{y}_j(N+1)] - \exp[\tilde{y}_j(N+1)]} c_{jF}, \quad (2.461)$$

$$\frac{P}{F} = \sum_{j=1}^m \frac{g_j^{-f} \exp(\tilde{y}_j f) - \exp(-\tilde{y}_j f)}{g_j^{-N-1} \exp[\tilde{y}_j(N+1)] - \exp[-\tilde{y}_j(N+1)]} c_{jF}, \quad (2.462)$$

$$C_{iW} = \frac{\frac{g_i^{N+1-f} \exp[-\tilde{y}_i(N+1-f)] - \exp[\tilde{y}_i(N+1-f)]}{g_i^{N+1} \exp[-\tilde{y}_i(N+1)] - \exp[\tilde{y}_i(N+1)]} c_{iF}}{\sum_{j=1}^m \frac{g_j^{N+1-f} \exp[-\tilde{y}_j(N+1-f)] - \exp[\tilde{y}_j(N+1-f)]}{g_j^{N+1} \exp[-\tilde{y}_j(N+1)] - \exp[\tilde{y}_j(N+1)]} c_{jF}}, \quad (2.463)$$

$$C_{iP} = \frac{g_i^{-f} \exp(\tilde{y}_i f) - \exp(-\tilde{y}_i f)}{g_i^{-N-1} \exp[\tilde{y}_i(N+1)] - \exp[-\tilde{y}_i(N+1)]} c_{iF}, \quad (2.464)$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{g_j^{-f} \exp(\tilde{y}_j f) - \exp(-\tilde{y}_j f)}{g_j^{-N-1} \exp[\tilde{y}_j(N+1)] - \exp[-\tilde{y}_j(N+1)]} c_{jF}$$

$$i = 1, 2, \dots, m,$$

где  $\tilde{y}_i = y \frac{g_i + 1}{g_i - 1}$ .

Если количество ступеней в каскаде достаточно велико, так что  $g_i^f \gg 1$ ,  $g_i^N \gg 1$ , то из формулы (2.464) можно получить следующие асимптотические приближения для концентраций компонентов, обогащаемых по направлению к «легкому» (отборному) концу каскада ( $g_i > 0$ )

$$c_{iP} = \frac{\exp\left[-y \frac{g_i - 1}{g_i + 1} (N + 1 - f)\right]}{\sum_{g_j > 0} \exp\left[-y \frac{g_j - 1}{g_j + 1} (N + 1 - f)\right]} c_{iF}. \quad (2.465)$$

Данное соотношение является обобщением на случай каскада с потерями формулы для предельных концентраций, полученной в работе [5]:

$$[c_{iP}]_{\text{пред.}} = \frac{c_{iF}}{\sum_{g_j > 0} c_{jF}}. \quad (2.466)$$

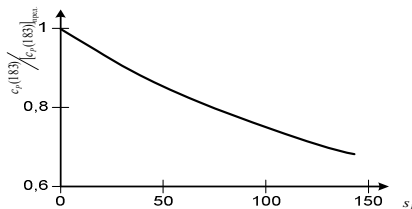


Рис. 2.35. Зависимость величины  $c_p(183) / [c_p(183)]_{\text{пред.}}$  от длины обогатительной части каскада  $s_p$ .

Из формулы (2.465) следует, что «потери» промежуточных компонентов по сравнению с крайними в достаточно длинном каскаде оказываются более значительными. Это объясняется тем, что распределения промежуточных компонентов в этом случае имеют максимум внутри каскада, где по сравнению со ступенями, близкими к концам, потоки питания ступеней и, следовательно, потери будут больше.

На рис. 2.35 представлена рассчитанная по формуле (2.465) зависимость отношения  $c_p(183) / [c_p(183)]_{\text{пред.}}$ , где  $[c_p(183)]_{\text{пред.}}$  – предельное значение концентрации целевого изотопа  $^{183}\text{W}$  в потоке отбора  $R$ -каскада с потерями от длины обогатительной части  $S_p = N - 1 + f$  ( $M^* = 183,5$ ;  $y / \ln q_0 = 5 \times 10^{-3}$ ;  $q_0 = 1,16306$ ).

#### 2.4.4.5. Квазиидеальный каскад с двумя питающими потоками [63-66]

Каскады с дополнительными потоками отбора и питания представляют интерес по ряду факторов, в частности для получения высокообогащенных промежуточных компонентов.

Представляет практический интерес случай, когда противоточный каскад имеет две точки питания. При этом основной поток питания  $F$ , содержащий разделяемые компоненты с концентрациями  $c_{iF}$ , подается в первую точку (на вход ступени с номером  $f$ ). Во вторую точку питания (на вход ступени с номером  $p$ ) подается поток  $E$  с концентрациями  $c_{iE}$ , (рис. 2.36). Возможен случай, когда поток  $E$  не содержит разделяемые компоненты.

Задачу разделения многокомпонентной смеси рассмотрим на примере квазиидеального каскада с двумя точками подачи питания.

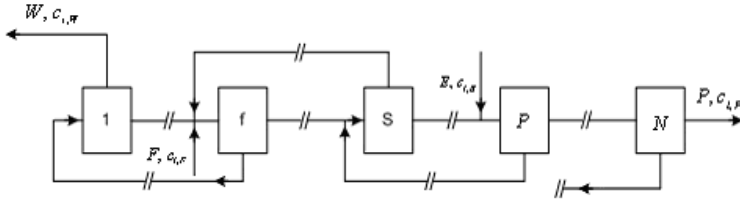


Рис. 2.36. Схема противоточного каскада с двумя питающими потоками

Как показано в разделе 2.4.6.1, обогащенный поток произвольного  $i$ -ого компонента может быть представлен в виде

$$G'_i(s) = A_i g_i^s + B_i, \quad (2.467)$$

В рассматриваемом случае для определения констант  $A_i$  и  $B_i$  помимо граничных условий (2.381) следует использовать уравнения баланса на входах в ступени с номерами  $f$  и  $p$ :

$$G'_i(f-1) + \frac{1}{g_i} G'_i(f+1) + Fc_{i,F} - \frac{g_i+1}{g_i} G'_i(f) = 0, \quad (2.468)$$

$$G'_i(p-1) + \frac{1}{g_i} G'_i(p+1) + Ec_{i,E} - \frac{g_i+1}{g_i} G'_i(p) = 0. \quad (2.469)$$

где величины  $g_i$  определяются соотношениями (2.19) и (2.20).

Применение условий (2.381), (2.468) и (2.469) позволяет решение (2.467) для отдельных частей каскада записать в виде

$$G'_i(s) = Wc_{iW} \frac{g_i}{g_i - 1} (g_i^s - 1), \quad 1 \leq s \leq f-1, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.470)$$

$$G'_i(s) = A_i g_i^s + B_i, \quad f \leq s \leq p-1, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.471)$$

где

$$A_i = \frac{g_i}{g_i - 1} \cdot \frac{g_i}{g_i^p - g_i^f} \left[ Pc_{iP} (1 - g_i^{p-N-2}) - Wc_{iW} (g_i^{f-1} - 1) \right] + \frac{g_i}{g_i^p - g_i^f} (Fc_{iF} + Ec_{iE}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.472)$$

$$B_i = \frac{g_i}{g_i - 1} \cdot Wc_{iW} (g_i^{f-1} - 1) + Fc_{iF} - \frac{g_i}{g_i - 1} \frac{g_i^f}{g_i^p - g_i^f} \left[ Pc_{iP} (1 - g_i^{p-N-2}) - \right. \\ \left. - Wc_{iW} (g_i^{f-1} - 1) \right] + \frac{g_i^f}{g_i^p - g_i^f} (Fc_{iF} + Ec_{iE}), \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2.473)$$

$$G'_i(s) = Pc_{iP} \frac{g_i}{g_i - 1} (1 - g_i^{s-N-1}) \quad (2.474)$$

$$p \leq s \leq N, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Используя уравнения баланса

$$Pc_{iP} + Wc_{iW} - Fc_{iF} - Ec_{iE} = 0, \quad (2.475) \\ i = 1, 2, \dots, m$$

и решения (2.470), (2.471), (2.472), получим

$$P = \sum_{j=1}^m \frac{(1 - g_j^{-f})Fc_{jF} + (1 - g_j^{-p})Ec_{jE}}{1 - g_j^{-N-1}}, \quad (2.476)$$

$$W = \sum_{j=1}^m \frac{(1 - g_j^{N+1-f})Fc_{jF} + (1 - g_j^{N+1-p})Ec_{jE}}{1 - g_j^{N+1}}. \quad (2.477)$$

$$c_{iP} = \frac{(1 - g_i^{-f})Fc_{iF} + (1 - g_i^{-p})Ec_{iE}}{1 - g_i^{-N-1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad (2.478) \\ \sum_{j=1}^m \frac{(1 - g_j^{-f})Fc_{jF} + (1 - g_j^{-p})Ec_{jE}}{1 - g_j^{-N-1}}$$

$$c_{iW} = \frac{(1 - g_i^{N+1-f})Fc_{iF} + (1 - g_i^{N+1-p})Ec_{iE}}{1 - g_i^{N+1}}, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (2.479) \\ \sum_{j=1}^m \frac{(1 - g_j^{N+1-f})Fc_{jF} + (1 - g_j^{N+1-p})Ec_{jE}}{1 - g_j^{N+1}}$$

Распределения  $L(s)$ ,  $c_i(s)$  и  $\theta(s)$  по отдельным участкам каскада можно найти, используя очевидные соотношения

$$L(s) = \sum_{j=1}^m G'_j(s) \frac{1 + g_j}{g_j}, \quad c_i(s) = \frac{1 + g_i}{g_i} \cdot \frac{G'_i(s)}{L(s)}, \quad \theta(s) = \frac{\sum_{j=1}^m G'_j(s)}{L(s)}.$$

Суммирование величины  $L(s)$  по всем ступеням каскада дает:

$$\sum_{s=1}^N L(s) = \sum_{j=1}^m \frac{g_j + 1}{g_j - 1} [Pc_{iP}(N - p + 1) - Wc_{iW}f + (Fc_{iF} - Wc_{iW})(p - f)]. \quad (2.480)$$

Если заданы величины  $c_{iF}, c_{iE}, N, f, p, g_i$  и два внешних потока (например,  $F$  и  $E$ ), то, формулы (2.470)-(2.481) позволяют провести полный расчет квазиидеального каскада с двумя точками питания.

Если в квазиидеальном каскаде выполнены условия несмещения относительных концентраций  $n$ -го и  $k$ -го компонентов, то с учетом соотношений (2.477), (2.478), (2.403)-(2.407) легко получить

$$f = \frac{1}{\ln g_n} \ln \frac{R_{nk}^F}{R_{nk}^W}, \quad (2.481)$$

$$p - f = \frac{1}{\ln g_n} \ln \frac{R_{nk}^E}{R_{nk}^F}, \quad (2.482)$$

$$N - p + 1 = \frac{1}{\ln g_n} \ln \frac{R_{nk}^P}{R_{nk}^E}, \quad (2.483)$$

где  $R_{nk}^F = \frac{c_{nF}}{c_{nF}}$ ,  $R_{nk}^W = \frac{c_{nW}}{c_{nW}}$ ,  $R_{nk}^E = \frac{c_{nE}}{c_{nE}}$ ,  $R_{nk}^P = \frac{c_{nP}}{c_{nP}}$ , а  $g_n$

определяется соотношением (2.407).

Учитывая, что решения уравнений квазиидеального каскада (2.470), (2.471) должны совпадать при  $s = f$ , используя соотношения (2.481) – (2.483), уравнения баланса (2.475) и очевидные связи  $\sum_{j=1}^m c_{jW} = 1$ ,  $\sum_{j=1}^m c_{jF} = 1$ ,  $\sum_{j=1}^m c_{jE} = 1$  и  $\sum_{j=1}^m c_{jP} = 1$ ,

получим

$$Pc_{iP}(R_{nk}^P)^{-d_i} + Wc_{iW}(R_{nk}^W)^{-d_i} - Fc_{iF}(R_{nk}^F)^{-d_i} - Ec_{iE}(R_{nk}^E)^{-d_i} = 0, \quad (2.484)$$

где  $d_i = \frac{\ln q_{ik}}{\ln g_n} - 1$ .



Суммарный поток каскада с учетом соотношений (2.481)-(2.483) и уравнений баланса по каскаду можно представить в виде

$$\sum_{s=1}^N L(s) = \sum_{j=1}^m \frac{Pc_{iP} \ln R_{nk}^P + Wc_{iW} \ln R_{nk}^W - Fc_{iF} \ln R_{nk}^F - Ec_{iE} \ln R_{nk}^E}{\frac{g_j - 1}{g_j + 1} \ln g_n} = 0. \quad (2.485)$$

Если заданными величинами при "проектировочном" расчете (на заданные концентрации целевого (ценного) компонента  $c_{iP}$  и  $c_{iW}$ ) являются: номера опорных компонентов ( $n, k$ ), концентрации компонентов в потоках питания  $c_{iE}, c_{iF}$ , величины  $g_i$ , то для решения задачи имеем  $m$  уравнений покомпонентного баланса (2.475),  $(m-2)$  уравнений вида (2.484) (уравнений  $H$ -баланса) и два уравнения, связывающие величины концентраций в потоках отбора

и отвала:  $\sum_{j=1}^m c_{jP} = 1$  и  $\sum_{j=1}^m c_{jW} = 1$ , т.е. всего  $m + (m - 2) + 2 = 2m$

уравнений. Неизвестные параметры:  $(m-1)$ -концентраций  $c_{iP}$  ( $i \neq n$ ),  $(m-1)$ -концентраций  $c_{iW}$ , ( $i \neq n$ ) и четыре величины потоков  $P, W, F$ , и  $E$ , т.е. всего  $(m - 1) + (m - 1) + 4 = (2m + 2)$  параметра. Следовательно, для замыкания системы уравнений необходимо задать  $(2m + 2) - 2 = 2$  параметра, например,  $E$  и  $P$ .

После решения указанной системы с использованием (2.481) – (2.483) могут быть вычислены величины  $f, p$  и  $N$ , далее – распределения

$$L(s) = \sum_{j=1}^m L'_j(s) \frac{1 + g_j}{g_j}, \quad c_i(s) = \frac{1 + g_i}{g_i} \cdot \frac{G'_i}{L(s)},$$

$\theta(s) = \frac{\sum_{j=1}^m L'_j(s)}{L(s)}$ , где функции  $L'_i(s)$  для отдельных участков каскада определяются формулами (2.470), (2.472), (2.475) и, наконец, по формуле (2.485) – суммарный поток в каскаде.

Представляет практический интерес разделение в  $R$ -каскаде  $m$ -компонентной изотопной смеси с малым содержанием  $(m - 2)$

компонентов (минорные компоненты). В этом случае сумма концентраций двух основных (опорных) компонентов примерно равна единице, т.е.  $c_n + c_k \approx 1$ , т.е.  $R_{nk} \approx \frac{c_n}{1 - c_n}$ .

Если  $n$ -й опорный компонент одновременно является целевым, то величины  $R_{nk}^P \approx \frac{c_{nP}}{1 - c_{nP}}$ ,  $R_{nk}^W \approx \frac{c_{nW}}{c_{kW}}$  (и, следовательно, величины  $f$ ,  $p$  и  $N$ ) заданы.

Формулы для расчета концентраций минорных компонентов в потоках отбора и отвала легко получить, используя соотношения (2.484) и уравнения покомпонентного баланса (2.475):

$$c_{iP} = c_{iE} \frac{\left[ \frac{c_{nE}}{1 - c_{nE}} \right]^{-d_i} - \left[ \frac{c_{nW}}{1 - c_{nW}} \right]^{-d_i}}{\left[ \frac{c_{nP}}{1 - c_{nP}} \right]^{-d_i} - \left[ \frac{c_{nW}}{1 - c_{nW}} \right]^{-d_i}} \cdot \frac{E}{P}, \quad i \neq n, k, \quad (2.486)$$

$$c_{iW} = \frac{c_{nE} - c_{nW}}{c_{nP} - c_{nF} - \frac{E}{P}(c_{nE} - c_{nF})} \times \left\{ c_{iE} \left( 1 - \frac{\left[ \frac{c_{nE}}{1 - c_{nE}} \right]^{-d_i} - \left[ \frac{c_{nW}}{1 - c_{nW}} \right]^{-d_i}}{\left[ \frac{c_{nP}}{1 - c_{nP}} \right]^{-d_i} - \left[ \frac{c_{nW}}{1 - c_{nW}} \right]^{-d_i}} \cdot \frac{E}{P} \right) \right\}, \quad i \neq n, k \quad (2.487)$$

Из соотношений (2.486), (2.487) следует, что величина  $f_E = \frac{E}{P}$  является свободным параметром, который может меняться в пределах  $0 \leq f_E \leq \left( \frac{E}{P} \right)_{\max} = \frac{c_{nP} - c_{nW}}{c_{nE} - c_{nW}}$ . Максимальное значение параметра  $f_E$  соответствует случаю, когда поток основного питания  $E$  принимает значение, равное нулю.

После определения концентраций  $c_{nP}$  и  $c_{nWP}$ ,  $(M^*)_{\text{опт}}$  дальнейший расчет параметров  $R$ -каскада трудностей не представляет.

### Контрольные вопросы ко второй части

1. Какая ступень (элемент) называется симметричной относительно компонентов с номерами  $n$  и  $k$ ?
2. В чем заключается свойство антисимметричности относительных коэффициентов обогащения?
3. Какими граничными условиями связаны внешние и внутренние параметры каскада?
4. Какую задачу подразумевают под расчетом каскада заданного профиля?
5. Как выглядят уравнения каскада в случае разделения многокомпонентной смеси?
6. Перечислите свойства уравнений каскада.
7. В чем суть метода расчета заданной конфигурации методом ортогональной коллокации? Метода квазилинеаризации уравнений?
8. Какие каскады для разделения многокомпонентных смесей называют модельными?
9. Каким отличительным свойством обладает  $Q$ -каскад?
10. Назовите возможности получения значений концентраций целевых промежуточных компонентов больших, чем предельные значения этих концентраций на концах  $Q$ -каскада?
11. Какова последовательность расчета  $Q$ -каскада на заданные величины  $C_{np}$ ,  $C_{nw}$  и  $P$  ( $n$  - номер целевого компонента; величины  $\varepsilon_{ij}$  и  $C_{iF}$  считаются заданными)?
12. Опишите подход В.Б. Жигаловского к решению системы уравнений каскада с несмещением по относительной концентрации для выбранной пары компонентов ( $R$ -каскада).
13. В чем суть проектировочного расчета прямоугольно-секционированного каскада на основе каскада непрерывного профиля (случай слабого обогащения)?

14. Каковы особенности нестационарных процессов в каскадах для разделения многокомпонентных смесей?

15. Как можно сократить пусковой период в двойном каскаде?

16. Как внутрифазный изотопный обмен влияет на процесс разделения многокомпонентной смеси, содержащей изотопы молекул на примере NO?

17. В чем состоят трудности расчета системы уравнений, описывающих процесс разделения многокомпонентной смеси в прямоугольном каскаде с немалыми обогащениями на ступенях?

18. Каковы основные принципы методов расчета прямоугольных каскадов?

19. Как влияет величина отношения потока отбора к потоку отвала на состав получаемой смеси?

20. Какой каскад называют «квазиидеальным»?

21. В чем заключается характерная особенность свойств «квазиидеальных» каскадов с несмешением относительных концентраций двух заданных компонентов ( $R$ -каскадов)?

22. На каких математических подходах осуществляют оптимизацию каскада с немалым обогащением на ступенях по суммарному потоку при заданных концентрациях целевого компонента в потоках отбора и отвала?

23. К какому выводу приводит сравнение по суммарному потоку «оптимальных» и  $R$ -каскадов (с  $M^* = M_{onm}^*$ ) при одинаковых концентрациях целевого компонента на их концах?

24. На величину каких концентраций в потоке отбора – крайнего компонента или промежуточных – потери рабочего вещества оказывают большее влияние?

25. Какие уравнения необходимо привлечь для «проектировочного» расчета (на заданные концентрации целевого компонента в потоках отбора и отвала)  $R$ -каскада с двумя питающими потоками, если заданными величинами являются: номера опорных компонентов, концентрации компонентов в потоках питания, величины параметров  $g_i$ ?

## Список литературы

1. Сазыкин А.А. Термодинамический подход к разделению изотопов, в кн. Изотопы (Свойства. Получение. Применение.) / Под ред. В.Ю. Баранова. М: ИздАТ, 2000, С. 72-108.
2. Кучеров Р.Я., Миненко В.П. К теории каскадов для разделения многокомпонентных изотопных смесей // Атомная энергия. 1965. Т. 19. Вып. 4. С. 360-367.
3. Жигаловский Б.В. Лекционные материалы по многокомпонентным смесям. Новоуральск, УЭХК, 1999.
4. Sulaberidze G.A. and Borisevich V.D. Cascades for separation of multicomponent isotope mixtures // Sep. Sci. and Technol. 2001. V. 36. № 8/9. P. 1769-1817.
5. Миненко В.П. Предельное обогащение промежуточных изотопов в отборе с концов каскада // Атомная энергия. 1972. Т. 33. Вып. 2. С. 704-706.
6. Филиппов И.Г., Сулаберидзе Г.А., Чузинов В.А. Расчет разделительных каскадов методом ортогональной коллокации // Атомная энергия. 1992. Т. 72. Вып. 1. С. 33-39.
7. Холпанов Л.П., Потапов Д.В., Сулаберидзе Г.А., Чузинов В.А. Эффективный метод расчета каскадов для разделения многокомпонентных смесей // Химическая промышленность. 1998. № 3. С. 44-50.
8. Villadsen J., Muchelsen M. Solution of differential equation models by polynomial approximation. In: Englewood Cliffs, NJ, prentice-Hall. 1978.
9. Tarnig Y., Anthony R. Nonlinear boundary value problems. A decoupling technique with quasi-linearization and orthogonal collocation // Ind. Eng. Chem. Res. 1987. V. 26. P. 311-318.
10. Potapov D.V., Soulaberidze G.A., Chuzhinov V.A. and Filippov I.G. On calculation of squared-off cascades for multicomponent isotope separation // Proc. 5th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases / Eds. C.Schwab, N.A.S.Rodriques, H.G.Wood. Iguassu Falls, Brazil, Sept. 22-26, 1996. P. 13-23.
11. Kholpanov L.P., Potapov D.V., Soulaberidze G.A. and Chuzhinov V.A. On the calculation of squared-off cascades for multi-

component isotope separation // Chem. Eng. and Proc. 1998. V. 37. P. 359-365.

12. Колокольцов Н.А., Миненко В.П., Николаев Б.И. и др. К вопросу о построении каскадов для разделения многокомпонентных изотопных смесей // Атомная энергия. 1970. Т. 29. Вып. 6. С. 425-429.

13. De la Garza A., Garrett G.A., Murphy J.E. Multicomponent isotope separation in cascades // Chem. Eng. Sci. 1961. V. 15. P. 188-209.

14. Израилевич А.И. Формулы для расчета содержания минорных изотопов для трехпоточных каскадов // В сб. Труды VII Всероссийской (Международной) конференции «Физико-химические проблемы при селекции атомов и молекул», Звенигород, 2003. С.40-43.

15. Borisevich V.D., Potapov D.V., Sulaberidze G.A. et al. Multicomponent isotope separation cascades with additional external flow // Proc. 4 th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases / Ed. C. Ying, Beijing, P.R. China, Aug. 19-23, 1994. P. 181-190.

16. Корн Г и Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров / Ред. И.Г.Араманович. М.: Наука, 1973. 832с.

17. Колокольцов Н.А., Лагунцов Н.И., Николаев Б.И. и др. К расчету каскадов для разделения многокомпонентных изотопных смесей // Атомная энергия. 1975. Т. 38. Вып. 3. С. 178-179.

18. Фролов В.В., Чужинов В.А., Сулаберидзе Г.А. Расчет и оптимизация каскадов для разделения многокомпонентных смесей // Атомная энергия. 1986. Т. 61. Вып. 6. С. 457-459.

19. Парцахашвили Г.Л. О расчете кинетики ректификационной колонны с потоками питания и отвала // *Сообщ. АН ГССР*, 1966. Т. 41. № 1. С. 89-93.

20. Веренинов И.А., Ракитский Ю.В. Методы расчета нестационарных процессов разделения многокомпонентных изотопных смесей в насадочных колоннах // Атомная энергия. 1972. Т. 32. Вып. 6. С. 409-501.

21. Парцахашвили Г.Л. Обобщенная система уравнений разделения многокомпонентных изотопных смесей // *Сообщ. АН ГССР*, 1971.

Т. 63. № 1. С. 53-56.

22. Higashi K. Transient behavior of minor isotopes in cascade for uranium enrichment // J. Nucl. Sci. and Technol. 1975. V. 12. No. 4. P. 243-249.

23. Левин Е.В., Лагунцов Н.И., Сулаберидзе Г.А. Об одном методе численного исследования нестационарных процессов в многосекционных установках для разделения многокомпонентных изотопных смесей // ИФЖ. 1982. Т. 43. № 3. С. 456-462.

24. Вецко В.М., Девдариани О.А., Левин Е.В. и др. Моделирование переходных процессов в каскадных установках для разделения многокомпонентных смесей стабильных изотопов // Isotopenpraxis. 1982. Bd.18. N8. S. 288-293.

25. Лагунцов Н.И., Левин Е.В., Николаев Б.И., Сулаберидзе Г.А. О некоторых особенностях переходных процессов при разделении многокомпонентных изотопных смесей в каскадах // Атомная энергия. 1987. Т. 62. Вып. 6. С. 394-398.

26. Вецко В.М., Лагунцов Н.И., Левин Е.В., Николаев Б.И., Сулаберидзе Г.А. Переходные процессы в двойных каскадах для разделения многокомпонентных изотопных смесей // Атомная энергия. 1987. Т. 63. Вып. 3. С. 184-188.

27. Поттер Д. Вычислительные методы в физике. М: Мир, 1975. 392 с.

28. Muller G. Methoden zur experimentellen bestimmung der konstanten von Cluseus-Dickel. Trennenrobren fur binare and polynare isotopengemische // *Kernenergie*. 1965. Bd.8. N4. S. 226-236.

29. Сиденко Р.И., Сулаберидзе Г.А., Чужин В.А., Вецко В.М. Исследование низкотемпературной ректификации NO в каскадах с устройствами изотопного обмена на стыках секций // В сб. Труды МХТИ им. Д.И.Менделеева. 1989. Вып. 156. С. 57-60.

30. Сиденко Р.И., Вецко В.М., Кудзиев А.Г. и др. О возможности одновременного получения высококонцентрированных  $^{18}\text{O}$  и  $^{15}\text{N}$  методом низкотемпературной ректификации оксида азота // Атомная энергия. 1990. Т.6 9. Вып. 4. С. 255-257.

31. Сиденко Р.И. О разделении многокомпонентных изотопных смесей в каскадах с конечным числом устройств изотопного обмена. Препринт МИФИ №17. 1991. 17с.

32. Бояринов А.И., Кафров В.В., Методы оптимизации в химической технологии, М.: Химия, 1969, 564с.

33. Borman V.D., Chuzhinov V.A., Potapov D.V. et al. Simulation of a multicomponent isotopic mixture behavior of the nitrogen oxide distillation for production of highly enriched  $^{17}\text{O}$ ,  $^{18}\text{O}$  and  $^{15}\text{N}$  isotopes // Proc. XIII-th Int. Symposium Ars Separatoria, Gniew, Poland, 1998. P. 27-31.

34. Asatiany P.Ya. et al. Industrial installation for  $^{18}\text{O}$  production. In: Stable isotopes in the life sciences by IAEA. 1977. P. 75-83.

35. Руднев А.И., Сазыкин А.А. Усовершенствованный метод расчета разделения многокомпонентных смесей на центробежных каскадах // Сб. докладов 2-ой Всерос. Научн. Конф. «Физ.-хим. Процессы при селекции атомов и молекул», 1997, ЦНИИАтоминформ. С. 159-161.

36. Wu H., Ying C. and Liu G. Calculation methods for determining the distribution of components in a separation cascade for multicomponent mixture // Sep. Sci. and Techn. 1988. V. 33(6). P. 887-898.

37. Груздев Е.Б., Лагунцов Н.И., Николаев Б.И., Тодосиев А.П., Сулаберидзе Г.А. Об одном методе расчета каскадов из мембранных элементов для разделения многокомпонентных смесей // Атомная энергия. 1984. Т. 57. Вып. 2. С. 117-120.

38. Фролов В.В., Сулаберидзе Г.А., Тодосиев А.П., Чужинов В.А. Методика расчета каскадов для разделения многокомпонентных смесей с произвольным обогащением на ступени. Деп. в спр.-инф. фонде ЦНИИАТОМИНФОРМа. Реферат опубликован в Сб. рефератов НИОКР, обзоров, переводов и депон. рукописей. Серия "ЭЛ", вып.10 за 1987.

39. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. М.: Мир, 1975.

40. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. М.: Мир, 1969.

41. Higashi K., Transient behavior of minor isotopes in cascade for uranium enrichment // J. Nucl. Sci. and Techn. 1975. V. 12[4]. P. 243-249.

42. Potapov D.V., Soulaberidze G.A., Chuzhinov V.A. and Filippov I.G. On calculation of squared-off cascades for multicomponent isotope separation // Proc. 5th. Workshop of Sep. Phen. in Liquids and Gases. Iguacu Falls, Brazil, 1996. P. 13-23.



43. Холпанов Л.П., Потапов Д.В., Сулаберидзе Г.А. Чужинов В.А. Эффективный метод расчета каскадов для разделения многокомпонентных смесей // Хим. промышл. 1977. № 3. С. 44-50.

44. Zeng S and Ying C. A Robust and efficient calculation procedure for determining concentration distribution of multicomponent mixture // Sep. Sci. and Techn. 2000. V. 35(4). P. 613-622.

45. Kholpanov L.P., Potapov D.V., Soulaberidze G.A., and Chuzhinov V.A. On calculation of squared-off cascades for multicomponent isotope separation // Chem. Eng. Proc. 1998. v. 37. P. 359-365.

46. Потапов Д.В., Сулаберидзе Г.А., Холпанов Л.П. Расчет прямоугольно-секционированного каскад путем приближения фактора разделения // ТОХТ. 2000. Т. 34. № 2. С. 147-151.

47. Груздев Е.Б., Лагунцов Н.И., Николаев Б.И., Тодосиев А.П., Сулаберидзе Г.А. Об одном методе расчета каскадов из мембранных элементов для разделения многокомпонентных смесей // Атомная энергия. 1984. Т. 57. Вып. 2. С. 117-120.

48. Zeng S. and Ying C. A Method of separating a middle component in multicomponent isotope mixtures by gas centrifuge cascades // Proc. 7th Workshop of Separation Phenomena in Liquids and Gases. Moscow, Russia, 2000. P. 100-112.

49. Yamamoto I., Kanagawa A. Multicomponent isotope separating cascade composed of elements with large separation factors // J. Nucl. Sci. Technol. 1978. V. 15. No. 8. P. 28-32.

50. von Halle E. Multicomponent isotope separation in matched abundance ratio cascades composed of stages with large separation factors // Proc. 1st Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases, Darmstadt, Germany, July 20-27, 1987. P. 325-355.

51. Сулаберидзе Г.А., Потапов Д.В., Борисевич В.Д., Се Цюаньсинь. Особенности обогащения компонентов с промежуточной массой в квазиидеальном каскаде // Атомная энергия. 2006. Т. 100. Вып. 1. С. 51-56.

52. Се Цюаньсинь, Сулаберидзе Г.А., Борисевич В.Д. Оптимизация модельных каскадов для разделения многокомпонентных изотопных смесей // Сб. докладов XI Международной научной конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул и в лазерных, плазменных и нанотехнологиях», Звенигород, 11-15 декабря 2006г. С. 15-20.

53. Палкин В.А., Сбитнев Н.А., Фролов Е.С. Расчет оптимальных параметров каскада для разделения многокомпонентных изотопных смесей // Атомная энергия. 2002. Т. 92. № 2. С. 130-133.

54. Палкин В.А., Фролов Е.С. Оптимальный каскад с заданными концентрациями по целевому изотопу. Свойства и сравнение с R-каскадом // Труды VIII Всероссийской (Международной) научной конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул», М: ЦНИИАтоминформ, 2003. С. 23-28.

55. Палкин В.А., Фролов Е.С. Оптимальный, идеальный и R-каскады: свойства, сравнительные характеристики // Труды IX Всероссийской (Международной) научной конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул», М: ЦНИИАтоминформ, 2004. С. 18-23.

56. Song T.M., Zeng S. On the optimity of separation cascade for a binary and multi-component case // Proc. 910th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases, September 18-21, 2006, Beijing, P.R.China. P. 132-146.

57. Inger L. Simulated annealing: practice versus theory // Math. Comput. Modeling. 1993. V. 18(11) P. 25-57.

58. Hook R. and Jeeves T.A. Direct search solution of numerical and statistical problems // J. ACM. 1961. V. 8. P. 212-229.

59. Kholpanov L.P., Sulaberidze G.A., Potapov D.V., Chuzhinov V.A. Multicomponent isotope separating cascade with losses // Chem. Engng. Proc. 1997. V. 36. P. 189-193.

60. Sulaberidze G.A., Xie Quanxin, Borisevich V.D. On some properties of quasi-ideal cascade with losses at stages // Ars Separatoria Acta. 2006. No. 4. P. 66-77.

61. von Halle E. Multicomponent isotope separation in matched abundance ratio cascades with losses from each stage // Paper presented at 8th Workshop on Separation Phenomena in Liquids and Gases, Oak Ridge, TN, USA. 2003.

62. Сазыкин А.А. Квазиидеальные каскады с потерями // Сборник докладов XI Международной научной конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул и в лазерных, плазменных и нанотехнологиях», Звенигород, 11-15 декабря 2006г. С. 7-14.

63. Сулаберидзе Г.А., Борисевич В.Д., Се Цюаньсинь. Исследование закономерностей стационарного массопереноса в разделительных каскадах при дообогащении регенерированного урана // *Инженерная физика*. 2005. № 3. С. 15-19.

64. Сулаберидзе Г.А., Борисевич В.Д., Се Цюаньсинь. Квазиидеальные каскады с дополнительным потоком для разделения многокомпонентных изотопных смесей // *ТОХТ*. 2006. Т. 40. № 1. С. 7-16.

65. Сазыкин А.А. Разделение многокомпонентных смесей изотопов в квазиидеальном каскаде с двумя точками питания // *Сб. докладов IX Международной научной конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул»*, Звенигород, 04-08 октября 2004г. С. 18-23.

66. Палкин В.А. Расчет и оптимизация каскада с несколькими питаниями и по срезам парциальных потоков // *Сборник докладов XI Международной научной конференции «Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул и в лазерных, плазменных и нанотехнологиях»*, Звенигород, 11-15 декабря 2006г. С. 19-33.

67. Се Цюаньсинь, Борисевич В.Д., Потапов Д.В., Сулаберидзе Г.А. Разделение многокомпонентных изотопных смесей в прямоугольном каскаде с потерями рабочего вещества // *Инженерная физика*. 2006. № 2. С. 30-34.

## **Часть 3**

# **ПРИМЕРЫ ПРАКТИЧЕСКОГО РАЗДЕЛЕНИЯ НЕУРАНОВЫХ ИЗОТОПОВ НА КАСКАДАХ ГАЗОВЫХ ЦЕНТРИФУГ**

### 3.1. Понятия и приемы, используемые в практике центробежного каскадирования

Получение требуемого количества и концентрации изотопного продукта, как правило, не может быть обеспечено на отдельной газовой центрифуге вследствие её ограниченной производительности и недостаточно больших коэффициентов разделения. На практике для характеристики центробежного каскада принято использовать произведение  $\varepsilon_0 \cdot N$ , где  $\varepsilon_0 = (q_0 - 1)$  – коэффициент обогащения, приходящийся на единичную разность массовых чисел разделяемых компонентов, а  $N$  – общее число ступеней в каскаде. При  $\varepsilon_0 \cdot N > 3$ , каскад называют «длинным». При значении  $\varepsilon_0 = 0,1$  каскад, состоящий из трех десятков ступеней, считают длинным. Для получения высококонцентрированных малораспространенных в природе стабильных изотопов центробежные каскады содержат сотни ступеней.

Разделительная ступень в каскаде может состоять из одной центрифуги, нескольких или многих, соединенных параллельно и работающих в одном и том же гидравлическом и разделительном режимах (см. часть 1). Количество центрифуг в ступени определяет поток рабочего вещества, протекающего через ступень, часто называемый «шириной» ступени. Минимальная ширина ступени соответствует одной центрифуге. Чем больше ширина ступени, тем большее количество вещества подвергают разделению и тем больше обогащенного продукта может произвести каскад.

На первом этапе создания целевой разделительной установки проводят исследования, моделирующие одиночную разделительную ступень. Найденные в этих опытах относительные

коэффициенты разделения  $q_{ij} = \frac{c'_i c''_j}{c_j c'_i}$ , где  $c'_i, c'_j$  и  $c''_i, c''_j$  –

концентрации  $i$ -го и  $j$ -го компонентов в выходных потоках из ступени,  $i, j = \overline{1, m}$ ,  $m$  – число компонентов разделяемой смеси, затем используют при расчете параметров каскада [1].

В практике центробежного разделения изотопов неурановых элементов чаще всего применяют каскады постоянной ширины, в которых все разделительные ступени содержат одинаковое

количество центрифуг, соединенных параллельно. Такие установки представляют собой *прямоугольные каскады* (ПК). Разделительные каскады также могут быть выполнены из ступеней, имеющих разную ширину. В этом случае их называют *прямоугольно-секционированными каскадами* (ПСК). Характерной возможностью современной центробежной технологии является ее гибкость, т.е. возможность перестраивать конфигурацию каскада, изменять его длину и ширину ступеней, а также варьировать место подачи потока питания в каскад, что позволяет реализовывать режимы разделения, необходимые для концентрирования того или иного изотопа различных химических элементов и осуществлять наиболее производительные режимы разделения [2]. Для этого на каскаде устанавливают необходимые трассы и вентили, позволяющие это осуществлять без специальных монтажных работ и нарушения вакуумной плотности ступеней. Пусть, например, в каскаде имеется 200 центрифуг. Из них можно смонтировать каскад из 50 ступеней при ширине ступени в 4 центрифуги. При наличии необходимых трасс и вентилях, можно перенаправить потоки таким образом, чтобы каскад имел 100 ступеней при ширине в две центрифуги. Более широкий каскад позволяет пропускать больше исходного вещества, а более длинный – обеспечить высокое обогащение крайних компонентов разделяемой смеси. Современный каскад с перестраиваемой конфигурацией позволяет в течение короткого времени перейти к наработке другого целевого изотопа в той же изотопной смеси или при использовании рабочего вещества иной физико-химической природы изотопов другого химического элемента.

Разделительные ступени каскадов снабжают регулировочными органами: регуляторами потоков и давлений для поддержания заданного, стабильного гидравлического режима работы, позволяющими выполнить условия каскадирования разделительных ступеней. Для обеспечения технологической надежности каскада в случае нарушения гидравлических режимов, каскад с помощью вентилях и клапанов разделяют на так называемые «отсекаемые» группы. Любая центрифуга, в случае нарушений в ее работе, также может быть отсечена своими клапанами и выведена из эксплуатации.

В каскаде по всей его длине располагают трассу питания каскада, из которой через специальный вентиль можно подать исходное рабочее вещество в любую ступень. Подача заданного и постоянного потока питания требует соответствующей регулирующей и контролирующей аппаратуры.

Для функционирования центробежного каскада применяют процессы конденсации и испарения рабочего газа, в качестве которого используют летучие соединения различного химического состава. Для этой цели служит конденсационно-испарительная установка (КИУ), обеспечивающая подачу в каскад требуемого потока питания и сбор потоков легкой и тяжелой фракции из концевых ступеней в соотношении, задаваемом разделительным режимом. Разделенные фракции низкотемпературной конденсацией собирают в специально подготовленные емкости. Для сбора газа, находящегося в каскаде, по окончании работы или в экстренном случае предусмотрены сбросные емкости.

Каскад и КИУ снабжают необходимой вакуумной системой. Система технологического контроля контролирует работу каждой центрифуги, в частности отслеживает число оборотов центробежного аппарата, величины давления и потоков в каскаде и КИУ.

Центробежная технология основана на использовании унифицированного оборудования, которым является центрифуга. Поэтому повышение разделительных возможностей центробежного каскада может осуществляться поэтапно: запускается в эксплуатацию первая очередь, начинает производиться продукт. Затем, без приостановки разделения монтируется и подключается к работе следующий модуль.

### **3.2. Многопараметричность разделительных задач**

При постановке задачи получения какого-либо изотопа обычно задается необходимая изотопная концентрация и требуемое количество вещества. Могут быть сделаны ограничения на время наработки целевого компонента, степень его обогащения, а также ограничения на содержание примесных изотопных компонентов.

Поставленная разделительная задача, как правило, требует проведения расчетно-теоретических исследований. С этой целью

используют алгоритмы расчетов, оформленные в виде специализированных программных продуктов [3]. При расчете каскада заданной конфигурации исходными параметрами являются потоки питания  $F$  и отбора  $P$  и концентрации компонентов в потоке питания  $c_{iF}$   $i=1, \dots, m$ , относительные коэффициенты разделения  $q_{ij}$ , число ступеней в каскаде  $N$ ,  $f$  – номер ступени, на вход которой подают поток питания, а также поток питания ступеней («ширина»)  $L$ . Определению подлежат концентрации в выходных потоках из каскада  $c_{iP}$ ,  $c_{iW}$  и распределение концентраций  $c_i(s)$  по ступеням каскада.

Процесс разделения стабильных изотопов какого-либо химического элемента, в отличие от обогащения урана, как правило, не является непрерывным и постоянным. Работа осуществляется до получения заданного количества изотопной продукции, а затем режим разделения прекращают. Если изотопный продукт требуется производить в течение достаточно длительного времени, то для обеспечения долгосрочной производственной программы целесообразно создание специализированного каскада. Такая ситуация имеет место, например, при обогащении изотопов железа или обеднении цинка по изотопу цинк-64 [4].

Цена имеющегося в наличии рабочего соединения существенным образом влияет на выбор наиболее эффективного разделительного режима. Необходимость проведения более чем одного разделительного этапа, возникающая из-за ограниченного числа имеющихся в наличии разделительных элементов, еще более усложняет анализ разделительного процесса перед его практической реализацией. Напротив, наличие у производителя изотопно-разделенных фракций данного химического элемента от предыдущих кампаний, может существенно упростить будущую работу по разделению.

Если требуется наработать не крайний изотоп, или требования по наличию примесных компонентов достаточно высокие, в этом случае требуется проведение более чем одного этапа разделения. В этом случае ценная фракция, собранная на предыдущем этапе вновь подается в каскад в виде потока питания. При этом чем



меньше длина используемого каскада, тем больше этапов необходимо проводить.

При разделении изотопов на каскадах центрифуг стратегию разделительной кампании выстраивают с учетом того, какой компонент разделяемой смеси является целевым, а также какая концентрация целевого изотопа и какое количество должны быть получены. Эти факторы определяют последовательность разделительных этапов и необходимую массу исходного рабочего вещества. Для определения оптимальных условий ведения процесса разделения обычно проводят комплекс расчетно-теоретических исследований с использованием различных методик расчета прямоугольного каскада.

Иногда в ходе одной разделительной кампании требуется получить кроме основного один или несколько других изотопов разделяемого элемента. От требований к концентрации этих компонентов и их молекулярных масс (соседние они с целевым компонентом или далекоотстоящие), также зависит последовательность проводимых разделительных этапов и степень извлечения всех целевых изотопных компонентов.

Суммарный поток отбора легкой и тяжелой фракций из каскада равен подаваемому в каскад потоку питания, если отсутствуют потери вещества в каскаде. Используемые в качестве рабочего вещества химические соединения должны обладать достаточной химической и термической стойкостью, не позволяющей переход его в больших количествах в нелетучие формы и не вызывающей коррозии материалов, из которых изготовлена разделительная установка. В случае частичного разложения рабочего вещества, как это имеет место, например, в случае диметила кадмия (ДМК), используемого при разделении изотопов кадмия, возникают его потери в разделительных ступенях каскада. Наличие потерь приводит к нарушению изотопного баланса в ступенях и концевых (выходных) потоках каскада и делает необходимым анализ процесса разделения в каскаде при учете наличия потерь (см. раздел 2.4.4.4 части 2 настоящего пособия).

Величина потерь рабочего вещества существенным образом влияет на выбор режима разделения. Потери снижают разделительные возможности каскада и приводят к необходимости увеличения исходного количества рабочего вещества. При

значительных уровнях потерь, и особенно на этапе нестационарной начальной работы каскада, необходим корректный учет их величины и оптимизация работы по параметру: «продолжительность работы/масса исходного вещества». Потери сопровождаются осаждением продуктов разложения рабочего вещества как в центрифугах, так и коммуникациях. Продукты разложения могут взаимодействовать с рабочим газом, и приводить к изменению изотопного состава отбираемых фракций, а также вносить дополнительное химическое загрязнение отбираемого продукта.

### **3.3. Организация разделительной кампании**

Каждому стационарному режиму работы каскада предшествуют операции заполнения каскада рабочим веществом, установление рабочего потока питания каскада в заданную ступень, начало отбора легкой и тяжелой фракций с необходимым делением, выравнивание гидравлических параметров (давлений и потоков) в разделительных ступенях. В зависимости от длины каскада, вида рабочего вещества и заданных гидравлических параметров на это требуется от нескольких до двух десятков часов. После достижения стационарного гидравлического режима, требуется также время на установление стационарного разделительного режима, при котором концентрации изотопных компонентов в отбираемых потоках не изменяются и соответствуют заданным. При этом в каскаде достигается постоянное распределение изотопных компонентов по ступеням.

Возможность с помощью разработанных алгоритмов расчета каскадов вычислять концентрации компонентов не только в конечных потоках, но и на каждой ступени каскада (рис. 3.1) позволяет рассчитать весовое содержание всех изотопных компонентов в каскаде.

На практике эта характеристика каскада определяется следующим образом. Для этого прекращают подавать питание в каскад, перекрывают отбираемые потоки и удаляют весь рабочий газ из каскада в сбросную емкость. Масса удаленного газа позволяет определить газонаполнение как каскада в целом, так и одной ступени. Такую операцию обычно проводят в конце

разделительной кампании. Степень совпадения расчетных и реальных концентраций в потоках отбора и отвала является критерием правильности использованной расчетной методики и, в конечном счете, оптимальности выбранного технологического режима.

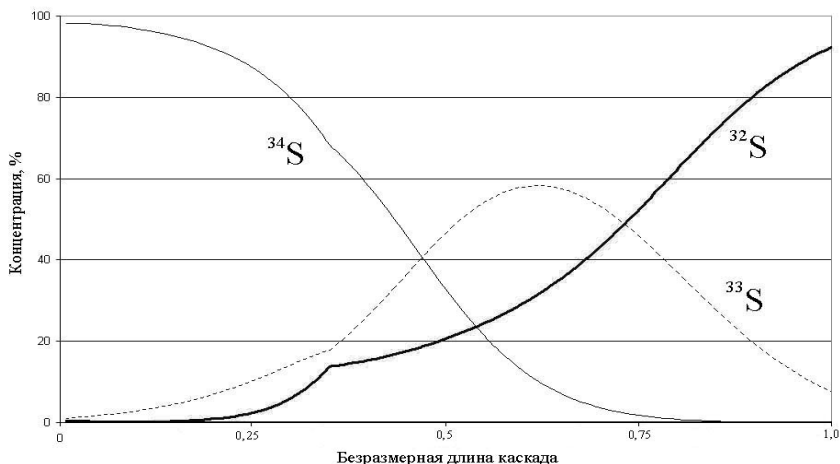


Рис. 3.1. Распределение концентраций изотопов серы по длине каскада постоянной ширины

Накопление в каскаде изотопных компонентов с заданными концентрациями определяет время установления разделительного режима. Допустим, газонаполнение некоторого каскада равно 100 г рабочего вещества, а по расчету на стационарном режиме содержание в нем ценного изотопного компонента составляет 30%, т.е. 30 г. Пусть в качестве питания каскада в сутки поступает 1000 г вещества с концентрацией ценного изотопного компонента 2%, что соответствует потоку этого компонента 20 г/сут. В случае, когда ценный изотопный компонент не выходит в отбираемые фракции, а только накапливается в каскаде, оценочное время установления составляет  $30/20 \sim 1,5$  суток. На практике времена установления могут составлять как несколько часов, так и несколько суток.

Время установления, зависящее от газонаполнения каскада, является важным параметром при многоэтапной разделительной кампании. Предположим, что для получения некоторого изотопа в

количестве 20 г рабочего вещества были выполнены расчеты и оказалось, что требуется проведение трехэтапной кампании на одном и том же каскаде, а отношение потока питания к потоку отбора на всех этапах одинаково и составляет 10/1. На первом этапе потребуется 20000 г исходного вещества, а отбор ценной фракции составит 2000 г. На втором этапе из 2000 г питания будет извлечено 200 г целевой фракции. А на третьем этапе из 200 г обогащенного вещества будет получено 20 г итогового продукта. Такая задача характерна при обогащении малораспространенных (1% и менее) изотопов, или изотопов с *большим* природным содержанием, но не крайних в изотопном интервале этого элемента. Приведенные оценки справедливы, если газонаполнение каскада много меньше потока питания на всех этапах разделительной кампании.

Если в распоряжении есть каскад, имеющий газонаполнение порядка 100 г рабочего вещества, то найденный в расчетах третий этап не может быть реализован, так как половина из 200 г, наработанных на втором этапе, уйдет на заполнение каскада, потребуется время (и питающий газ) для выхода на стационарный режим, а на накопительный режим работы газа может не остаться вовсе. Другими словами, для реализации расчетного третьего этапа нужно иметь вдвое или даже втрое больше газа для потока питания, т.е. 400-600 г. Для этого на первом этапе разделения нужно переработать не 20 кг, а 40-60 кг исходного рабочего соединения, что потребует в 2-3 раза больше времени. Таким образом, каскад с газонаполнением 100 г хорошо подходит для начальных этапов, но его ограниченные возможности приводят к увеличению общего времени разделительной кампании.

Одним из критериев оптимальной работы каскадной установки при разделении многокомпонентных смесей стабильных изотопов является время ее выхода на стационарный режим, которое должно

быть меньше времени разделительной кампании  $\frac{M_{исх.}}{F} =$   
 $= t_{раб.} \gg t_{уст.}$ , где:  $M_{исх.}$  – исходная масса рабочего вещества в

каскаде,  $F$  – величина потока питания каскада,  $t_{раб.}$  – время

работы установки,  $t_{уст.}$  – время установления стационарного режима. Для определения общего времени многоэтапной разделительной кампании должно быть добавлено время, необходимое на технологический переход от этапа к этапу (замена конденсационных емкостей, изотопный анализ фракций, установка нового питания, откачка КИУ и т.д.). В результате на практике время кампании увеличивается по сравнению с первоначально оцененной длительностью наработки целевого изотопа. Особенно это имеет значение на последних этапах работы, когда важно не допустить снижения достигнутого уровня обогащения ценного компонента. На последних этапах желательно использовать каскады с небольшим газонаполнением.

Еще одним практическим аспектом, влияющим на выбор режима работы каскада, является величина возможного отбора легкой фракции центробежного каскада. Каскад не является абсолютно вакуумно-плотной установкой, поэтому в нем всегда имеется натекание некоторого количества воздуха, пропорционального числу центрифуг в каскаде. Этот воздух уходит из каскада вместе с отбираемым в легкую фракцию потоком рабочего вещества, величина которого не может быть меньше некоторого значения, зависящего от технических параметров каскада. В противном случае натекающий в каскад воздух не будет выводиться из ступеней, и выбранный режим не будет реализован. Если рабочее вещество химически нестойкое, например, идет гидролиз фторида (реакция фторидного рабочего соединения с влагой), то при этом будет образовываться дополнительный поток легкой примеси продукта гидролиза - фтористого водорода, который также должен уходить с легкой фракцией из каскада. Это повышает нижнюю допустимую границу величины отбора легкой фракции. Все перечисленное не относится к тяжелой фракции, в которую легкие газовые компоненты не переносятся. Поэтому абсолютная величина отбора может быть сколь угодно малой, и ограничивается только техническими возможностями используемой аппаратуры для отбора газа.

На рис. 3.2. представлены все основные факторы, влияющие на процесс разделения стабильных изотопов на каскаде газовых

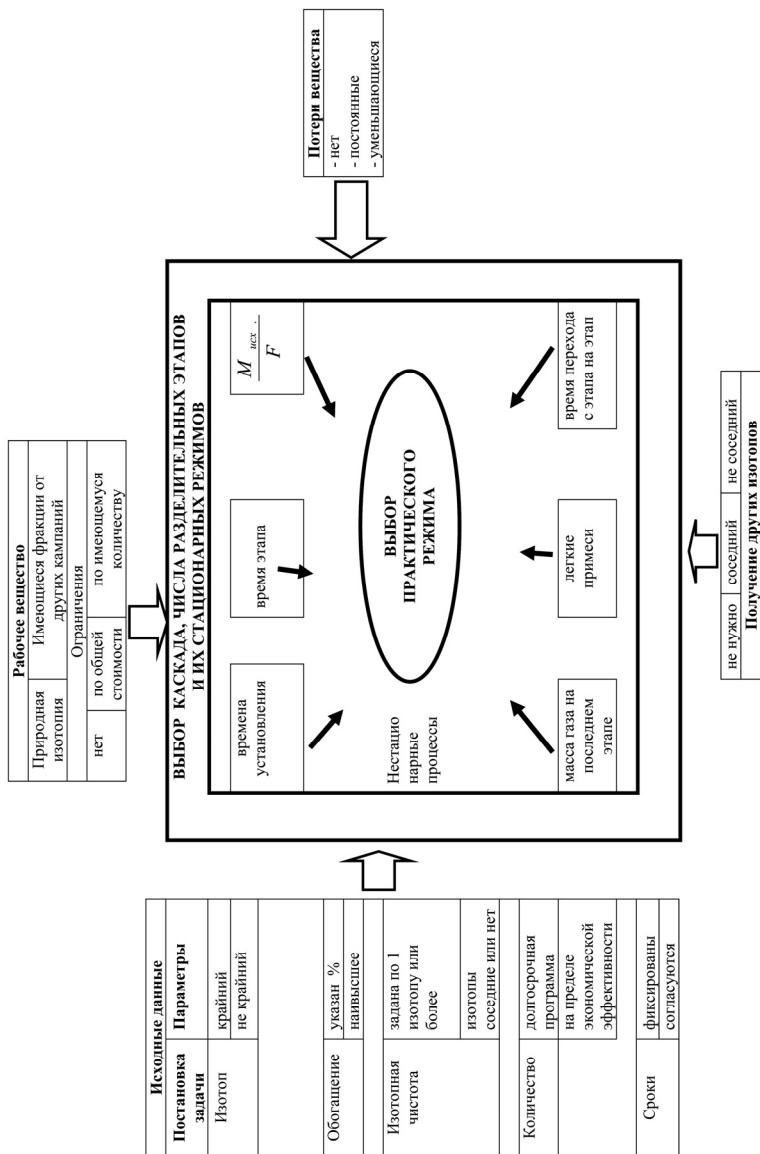


Рис. 3.2. Факторы, влияющие на процесс разделения стабильных изотопов на каскаде газовых центрифуг

центрифуг. Определение разделительного режима – это всегда компромисс, состоящий в выборе наиболее критичных из многих взаимозависимых параметров, и учете различных аспектов, влияющих на разделительную кампанию.

### 3.4. Примеры разделительных кампаний\*

**Разделение изотопов кадмия.** Рассмотрим задачу обогащения изотопа, применяющегося, в частности, в гелий-кадмиевых лазерах изотопа  $^{116}\text{Cd}$  до концентрации не менее 95%, в каскаде постоянной ширины со следующими значениями безразмерных параметров  $F/L = 0.114$ ;  $N = 60$ ;  $f = 25$ ;  $q_0 = 1.09$ ;  $y = 1.5 \cdot 10^{-4}$ , где  $q_0$  – коэффициент разделения, приходящийся на единицу разности масс. У кадмия 8 стабильных изотопов [5].

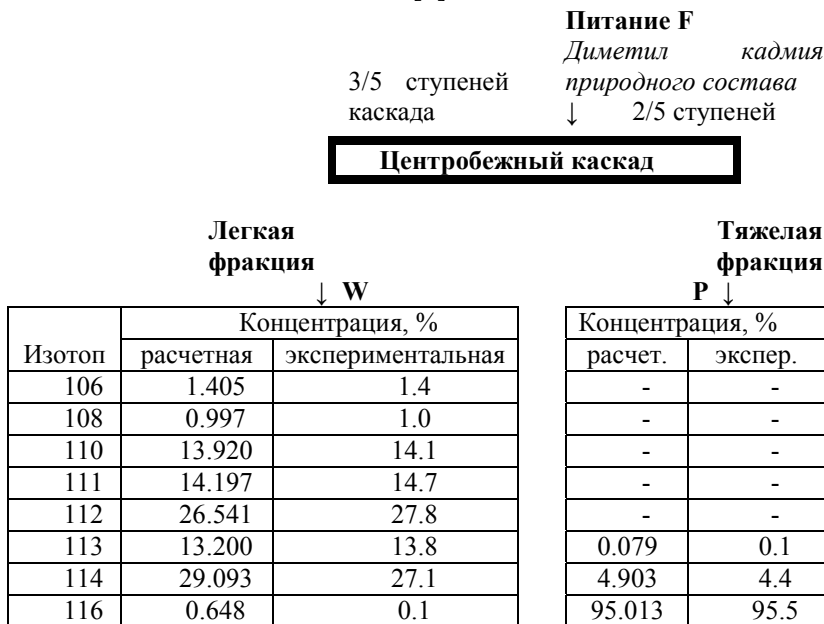


Рис. 3.3. Обогащения изотопа  $^{116}\text{Cd}$  в центробежном каскаде постоянной ширины

\* В представленных в настоящем разделе примерах в качестве отборного конца был принят «тяжёлый» конец каскада.

Потери рабочего вещества, разлагающегося в разделительной ступени  $\Delta L$ , определим как часть потока питания ступеней  $y = \Delta L / L$ . Под отборным будем понимать конец каскада, в направлении которого происходит обогащение целевым компонентом, а под отвальным – противоположный.

Для расчета изотопно-селективного массопереноса в прямоугольном каскаде с потерями использована методика, описанная в разделе 2.4.2.4.

На рис. 3.3 показана схема обогащения изотопа  $^{116}\text{Cd}$  в прямоугольном каскаде, а также приведены значения концентраций компонентов в выходных потоках, полученные экспериментальным и расчетным путем.

На рис. 3.4 представлены распределения по ступеням концентрации изотопов  $^{116}\text{Cd}$ ,  $^{114}\text{Cd}$  и  $^{113}\text{Cd}$ .

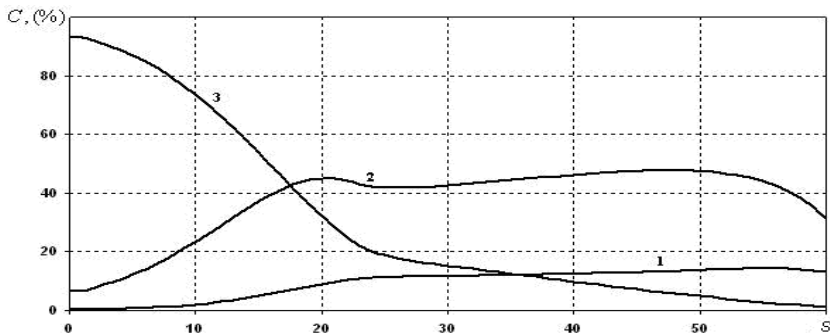


Рис. 3.4. Распределения изотопов  $^{113}\text{Cd}$  (кривая 1),  $^{114}\text{Cd}$  (2) и  $^{116}\text{Cd}$  (3) по ступеням каскада

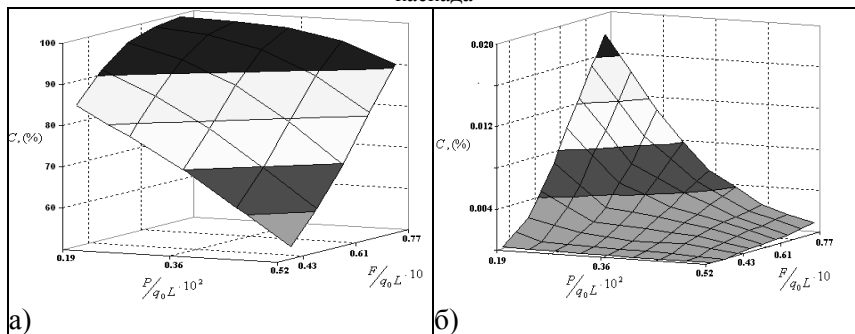


Рис. 3.5. Зависимость концентрации изотопа  $^{116}\text{Cd}$  в потоке отбора (а) и отвала (б) от безразмерных величин потоков отбора и питания в каскаде



На рис. 3.5,а и 3.5,б приведены результаты теоретического исследования распределения концентрации  $^{116}\text{Cd}$  в потоках отбора и отвала из каскада в зависимости от безразмерных величин потока питания  $F/q_0L$  и потока отбора  $P/q_0L$ , где  $q_0$  - коэффициент разделения, приходящийся на единичную разность массовых чисел изотопов.

Вследствие того, что в молекулу ДМК входят не только изотопы разделяемого химического элемента (кадмия), учет изотопии всех химических элементов, входящих в молекулы рабочего вещества, приводит к явлению, называемому «изотопным перекрытием» или «изотопным расщеплением» компонентов, когда молекулы могут быть образованы из разных изотопов, но имеют одинаковую молекулярную массу. При исследовании влияния изотопного состава на процесс обогащения изотопов кадмия в виде ДМК изотопией водорода часто пренебрегают, так как природное содержание изотопа  $^2\text{H}$  (0,015%) очень мало по сравнению с основным изотопом  $^1\text{H}$  (99,985%). Без учета изотопии водорода возникают следующие компоненты ДМК:  $^{112}\text{Cd}({}^{13}\text{CH}_3){}^{13}\text{CH}_3, \dots, {}^{113}\text{Cd}({}^{12}\text{CH}_3){}^{13}\text{CH}_3$  а также  $^{114}\text{Cd}({}^{12}\text{CH}_3){}^{12}\text{CH}_3$ , включающие разные изотопы кадмия, но имеющие одно и то же массовое число, равное 144. В результате при обогащении методом центрифугирования молекулярной смеси компонентом с массой 144, будут извлекаться содержащиеся в ней изотопы кадмия 112, 113 и 114.

Изотопное перекрытие приводит к появлению теоретического предела концентрации обогащаемого изотопа. Предельное обогащение по изотопу  $^{116}\text{Cd}$  составляет 100% при условии, что в процессе разделения выделяются компоненты с массами 147 и 148. Если одновременно извлекать и компонент с молекулярной массой 146, то предельное обогащение уменьшится до 99,95%. Для всех не крайних изотопов предельное обогащение всегда будет меньше 100%. Так, для  $^{112}\text{Cd}$  оно составляет 98,82%.

На рис. 3.6 представлены экспериментальные данные и расчетная зависимость коэффициента извлечения целевого компонента  $Re = \frac{PC_{iP}}{FC_{iF}}$  (целевой изотоп  $^{116}\text{Cd}$ ) от безразмерной

величины потока питания в каскад  $F/q_0L$ . Расчетные и экспериментальные данные совпадают в пределах точности измерений.

Зависимости концентрации изотопа  $^{116}\text{Cd}$  в потоке отбора из каскада от коэффициента потерь рабочего вещества  $u$  показаны на рис. 3.7. Видно, что концентрация целевого компонента в потоке отбора снижается с ростом коэффициента потерь рабочего газа в каскаде. Причем с ростом величины потока питания в каскад резкое падение концентрации наблюдается при больших значениях безразмерного параметра  $u$ . Потери рабочего вещества стараются уменьшить путем повышения чистоты рабочего газа и устранения из конструкции центрифуг материалов, с ним взаимодействующих.

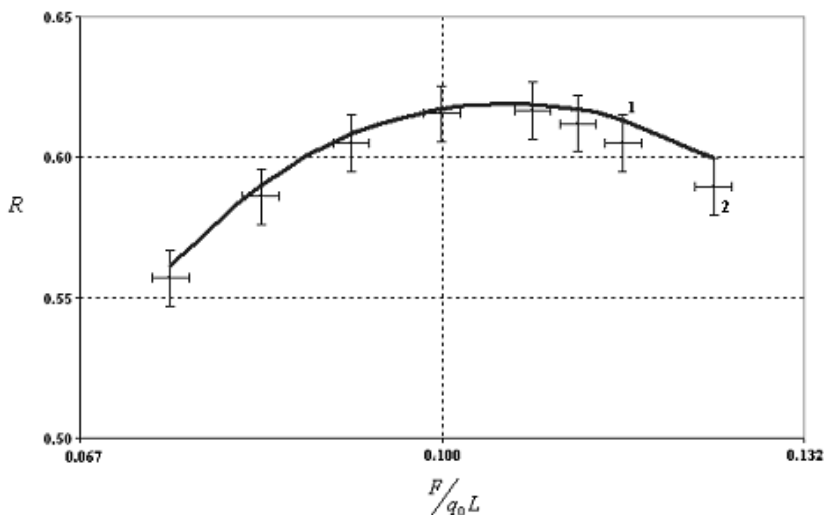


Рис. 3.6. Зависимость коэффициента извлечения ценного компонента  $R$  от относительного потока отбора  $F/q_0L$ : 1 – расчетные точки, 2 – экспериментальные данные

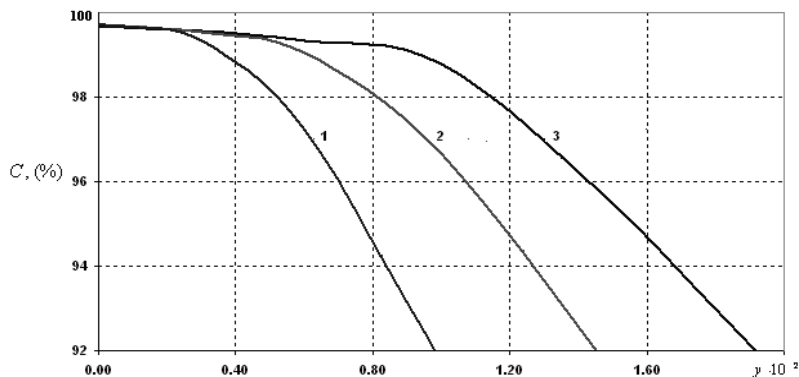


Рис. 3.7. Зависимость концентрации изотопа  $^{116}\text{Cd}$  в потоке отбора от коэффициента потерь  $y$  при различных значениях безразмерного потока питания. 1 –  $F/L=0,06$ ; 2 –  $0,07$ ; 3 –  $0,08$

**Обогащение стабильных изотопов для получения радионуклида  $^{123}\text{I}$  [6].** В основном обогащенные стабильные изотопы применяются в качестве стартового материала для получения радиоактивных изотопов различного назначения. Центробежный метод разделения сделал изотопные материалы не только более доступными, но и предоставил новые возможности, в том числе и по получению радионуклида  $^{123}\text{I}$  для ядерной медицины. Иод-123 является гамма-излучателем с энергией основной линии 159 КэВ. Его период полураспада – 13,3 ч. Преимущество  $^{123}\text{I}$  состоит в хорошей регистрации излучения и меньшей на два порядка радиационной дозы, получаемой пациентом, по сравнению с широко используемым радионуклидом  $^{131}\text{I}$ .

Из ядерно-физического рассмотрения возможных путей наработки  $^{123}\text{I}$  достаточно давно была ясна перспективность использования  $^{124}\text{Xe}$  для реакций как на протонах –  $(p,2n)$  и  $(p,pn)$ , так и фотоядерной –  $(\gamma,n)$ . Наличие примеси изотопа ксенон-126 нежелательно, поскольку она определяет радионуклидную чистоту  $^{123}\text{I}$ . Ксенон, как газ, не может быть разделен электромагнитной сепарацией и только развитие центробежного метода позволило сделать это.

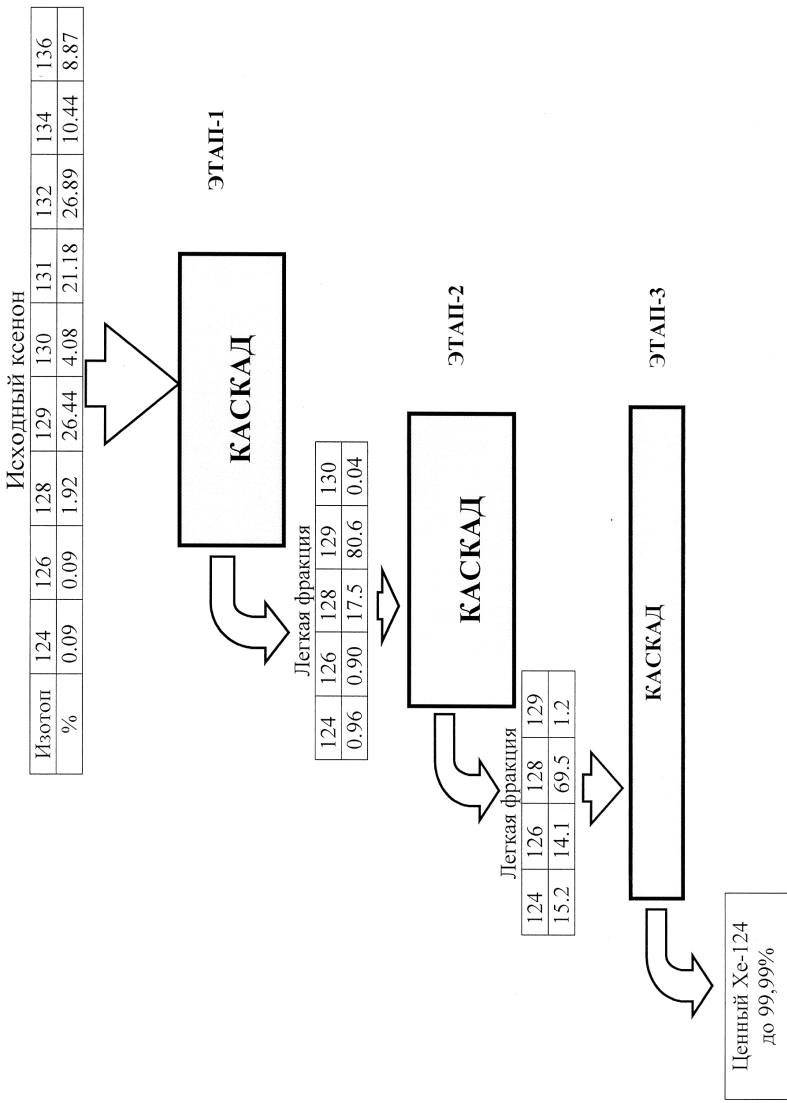


Рис. 3.8. Схема центробежного процесса получения высокообогащенного ксенона-124

На рис. 3.8. представлена одна из схем обогащения ксенона. На всех 3-х этапах центрифугирования целевой является легкая фракция. Видно, что на первом этапе  $^{124}\text{Xe}$  изотопный компонент возрастает на порядок, на втором - на полтора. Последний этап позволяет достичь концентрации 99,9% и более.

Природное содержание  $^{124}\text{Xe}$  изотопа ксенона 0,09%, поэтому в 1000 г исходного ксенона содержится менее 1 г изотопа. Для наработки десятка граммов  $^{124}\text{Xe}$  (99,9%) при степени извлечения целевого компонента из сырья 90%, необходимо переработать более 11 кг природного ксенона. Поэтому на первом и втором этапах целесообразно использование более широкого каскада для уменьшения времени переработки ксенона. Третий этап следует осуществлять с наибольшей степенью извлечения целевого компонента. В этом случае наиболее эффективен длинный каскад. На рисунке отражена относительная ширина используемых прямоугольных каскадов.

Другим вариантом получения  $^{123}\text{I}$  является использование мишеней из изотопов теллура по реакциям:  $^{124}\text{Te} (p,2n)^{123}\text{I}$  и  $^{123}\text{Te} (p,n)^{123}\text{I}$ . Для обеих реакций весьма остро стоит проблема достижения необходимой радионуклидной чистоты с обеспечением наибольшего полезного времени жизни  $^{123}\text{I}$ . Как и в случае  $^{124}\text{Xe}$ , качество изотопной мишени  $^{123}\text{Te}$  является решающим фактором достижения результата. Наличие в мишени соседнего изотопа  $^{124}\text{Te}$ , из которого образуется  $^{124}\text{I}$  (период полураспада которого  $T_{1/2}=4,17$  сут.), приводит к ограничению на время применения препарата по соотношению активностей и поэтому содержание  $^{124}\text{Te}$  в мишени должно быть минимально.

Центробежное обогащение  $^{123}\text{Te}$  высокого качества может быть организовано по-разному, в зависимости от мощности имеющихся каскадов и количества исходного гексафторида теллура. Наиболее эффективным является трехэтапная схема, представленная на рис. 3.9. На первом этапе на широком каскаде обогащают легкие изотопы теллура, при этом в легкую фракцию отбирается примерно 10% от массы исходного газа. На втором этапе отделяются все компоненты, тяжелее  $^{123}\text{Te}$ , для чего используется более длинный каскад. Газом питания длинного каскада на третьем этапе является продукт, где  $^{123}\text{Te}$  крайний в тяжелой части спектра масс (не считая малой примеси массы 124), и при отборе в тяжелую фракцию его обогащают до концентрации 99% и более.

**Исходный газ - гексафторид теллура (Тет<sub>6</sub>)**

|        |       |      |       |      |      |       |       |       |
|--------|-------|------|-------|------|------|-------|-------|-------|
| Изотоп | 120   | 122  | 123   | 124  | 125  | 126   | 128   | 130   |
| %      | 0.096 | 2.60 | 0.908 | 4.82 | 7.14 | 18.95 | 31.69 | 34.80 |

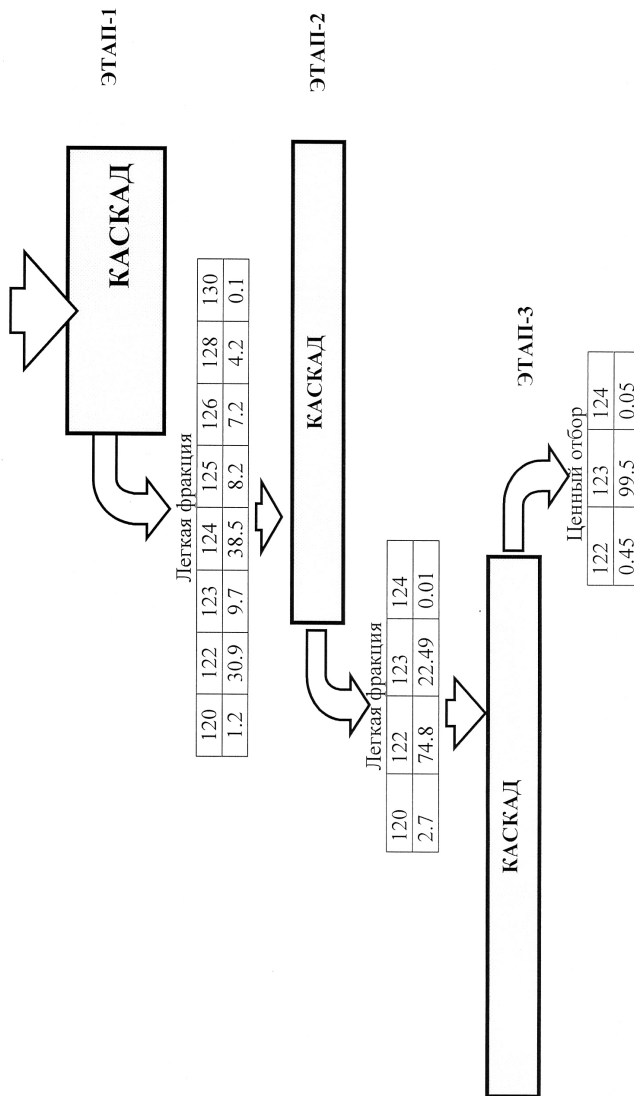


Рис. 3.9. Схема центробежного процесса получения высокообогащенного теллура-123

Согласно этой схеме, получаемым продуктом является  $^{123}\text{Te}$  при содержании  $^{124}\text{Te}$  не свыше 0,1%, что на полтора порядка чище по  $^{124}$ -й массе, чем продукт, получавшийся на масс-сепараторе. Эта же разделительная схема позволила получить изотопный образец с обогащением по  $^{123}\text{Te}$  до 99,9%.

В производстве  $^{123}\text{Te}$  и  $^{124}\text{Xe}$  имеются существенные различия.  $^{124}\text{Xe}$  является самым крайним легким изотопом и имеет разницу в 2 а.е.м. от единственного соседа с  $^{126}$ -й массой.  $^{123}\text{Te}$  имеет почти на порядок большее природное содержание, но располагается между изотопами с массами 122 и 124 с отличием от них в 1 а.е.м. Для получения изотопов ксенона используется рабочий газ ксенон с чистотой до 99,995%. Получение изотопов теллура требует специальной технологии синтеза химически активного вещества – гексафторида теллура и обеспечения его достаточной для применения в центрифугах чистоты. В отличие от отвалов при получении  $^{124}\text{Xe}$ , которые могут быть возвращены на рынок ксенона, отвалы гексафторида теллура не имеют альтернативного применения и должны храниться с последующей утилизацией.

Рассмотренные разделительные режимы для изотопов ксенона и теллура демонстрируют, что от этапа к этапу уменьшается число изотопных компонентов, соотношение их концентраций, и изменяется тем самым средняя молекулярная масса газа, подвергаемого разделению. Таким образом, строго говоря, в каскаде нет ни одной ступени, работающей на одной и той же изотопной смеси. Тем не менее, для одного рабочего вещества эти отличия невелики, поэтому для практических расчетов берут характеристики центрифуги для природной изотопной смеси.

**Обогащение изотопа  $^{50}\text{Cr}$  [7].** Центробежное разделение изотопов хрома было начато в середине 1980-х годов для Баксанской обсерватории (Кавказ), регистрирующей поток солнечных нейтрино. Первоначально была поставлена задача получения обогащенного  $^{50}\text{Cr}$  в количестве 1 кг, который после облучения в реакторе переходит в радиоактивный  $^{51}\text{Cr}$ , испускающий нейтрино. Этот искусственный источник нейтрино был необходим для калибровки солнечного нейтринного телескопа.

В результате проведенных исследований была разработана следующая технологическая схема получения обогащенного  $^{50}\text{Cr}$ :

1. Синтез рабочего вещества для центробежного обогащения изотопа  $^{50}\text{Cr}$  летучего химического соединения хрома - хромилфторида ( $\text{CrO}_2\text{F}_2$ );

2. Разделение на каскаде центрифуг и сбор обогащенной до нужной концентрации легкой фракции  $^{50}\text{CrO}_2\text{F}_2$ ;

3. Гидролиз обогащенного продукта  $^{50}\text{CrO}_2\text{F}_2$  и получение окиси  $^{50}\text{CrO}_3$ ;

4. Электролизное получение металлического  $^{50}\text{Cr}$  из окиси  $^{50}\text{CrO}_3$ ;

5. Обеспечение химической чистоты металлического хрома, т.е. необходимый для пользователей состав химических примесей, определяющих уровень радионуклидного загрязнения источника нейтрино  $^{51}\text{Cr}$ .

На рисунке 3.10.(1) показана схема процесса разделения изотопов хрома. Двухэтапный режим на каскаде изменяемой ширины позволял обеспечивать 90% обогащение при требуемой степени извлечения  $^{50}\text{Cr}$  из сырья. Хромилфторид помимо хрома включает кислород, обладающий собственной изотопией. Поскольку природное содержание  $^{17}\text{O}$  и  $^{18}\text{O}$  невелико, их влияние не препятствовало обогащению самого легкого изотопа хрома.

После отработки технологии обогащения изотопа  $^{50}\text{Cr}$  была поставлена задача наработать 40 кг этого изотопа с обогащением (38-40%) для европейского нейтринного телескопа международного научного объединения GALLEX [8].

В результате проведенных работ была достигнута производительность около 3 кг изотопа в месяц [7, 8]. На рис. 3.10(2) показаны величины выходных концентраций изотопных компонентов в легкой фракции каскада при обогащения  $^{50}\text{Cr}$ .

В этой разделительной кампании помимо ограничений на химическую чистоту конечного продукта имелось изотопное лимитирующее условие по содержанию изотопа  $^{53}\text{Cr}$ , обладающего большим сечением захвата нейтронов. В рамках проекта GALLEX его содержание ограничивалось 2% (в природном материале - 9.5%). В процессе получения изотопа  $^{50}\text{Cr}$  удалось обеспечить содержание изотопа  $^{53}\text{Cr}$  0,5%.



1. Получение хрома-50 (свыше 90%)

Исходный газ - хромилфторид ( $\text{CrO}_2\text{F}_2$ )

|        |      |       |      |      |
|--------|------|-------|------|------|
| Изотоп | 50   | 52    | 53   | 54   |
| %      | 4,35 | 83,79 | 9,50 | 2,36 |



Легкая фракция

|      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| 50   | 52   | 53   | 54   |
| 43,8 | 55,6 | 0,56 | 0,04 |



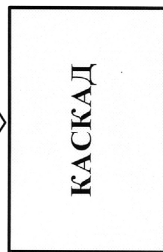
Легкая фракция

|      |     |      |      |
|------|-----|------|------|
| 50   | 52  | 53   | 54   |
| 92,5 | 7,4 | 0,08 | 0,02 |

2. Получение хрома-50 (38%)

Исходный газ - хромилфторид ( $\text{CrO}_2\text{F}_2$ )

|        |      |       |      |      |
|--------|------|-------|------|------|
| Изотоп | 50   | 52    | 53   | 54   |
| %      | 4,35 | 83,79 | 9,50 | 2,36 |



Легкая фракция

|      |      |     |     |
|------|------|-----|-----|
| 50   | 52   | 53  | 54  |
| 39,7 | 59,7 | 0,5 | 0,1 |

Рис. 3.10. Две кампании по обогащению изотопов хрома

Калибровочные эксперименты, выполненные в проектах по регистрации солнечного нейтрино на Баксанской обсерватории и GALLEX, доказали эффективность использования искусственных источников нейтрино на основе хрома-51 из обогащенного хрома-50. В настоящее время потребность в изотопе  $^{50}\text{Cr}$  имеется и в ряде других физических проектов.

**Обогащение радиоактивных изотопов.** Разработка технологии разделения стабильных изотопов какого-либо элемента позволяет существенно развить возможности получения радиоактивных изотопов из обогащенных мишеней, причем не только по количеству, но и по их удельной активности.

Работа по повышению удельной активности носит комплексный характер и включает в себя следующие этапы:

- центробежное обогащение целевого изотопа;
- облучение его в реакторе;
- синтез из облученного материала летучего соединения радиоизотопа;
- обогащение радиоизотопа;
- перевод обогащенной фракции с радионуклидом в нелетучую форму.

В такой работе объединяются химическая, центробежная, ядерно-физическая и радиохимическая технологии. Впервые такой подход был реализован в СССР для получения  $^{55}\text{Fe}$  высокой удельной активности. Позднее, после разработки центробежной технологии разделения изотопов олова, был разработан способ получения радиоактивного  $^{119\text{m}}\text{Sn}$  с высокой удельной активностью. Была достигнута радионуклидная чистота (отношение содержания  $^{113}\text{Sn}$  к содержанию  $^{119\text{m}}\text{Sn}$  составило одну миллионную), а количество выделенного радиоизотопа  $^{119\text{m}}\text{Sn}$  – 35 мг [4].

### **3.5. Некоторые экономические аспекты центробежного разделения стабильных изотопов**

**Параметры качества обогащаемых изотопов.** Основным параметром качества для обогащенного стабильного изотопа является его атомная доля (концентрация). Однако задание одной только этой величины не достаточно для установления ценности данного продукта для различных приложений, и тем более, для

оценки трудоемкости процесса разделения. Многообразие изотопической продукции упорядочивается четырьмя основными категориями качества обогащенных стабильных изотопов [9]:

- изотопная метка (изменено содержание необходимого изотопа по сравнению с природным);

- стабильный изотоп с заданной кратностью обогащения (увеличена концентрация целевого изотопа до требуемого уровня);

- изотопно-чистые препараты (уменьшено содержание мешающих изотопных компонентов);

- изотопные эталоны (образцы с предельно достижимым содержанием целевого изотопного компонента, но не менее 99%).

Концентрационные границы у первых трех категорий для каждого изотопа свои, поскольку зависят от их природной распространенности.

**Стоимость обогащения изотопов.** Себестоимость продукта, обогащенного целевым изотопом, как и любой другой продукции, включает в себя амортизационные отчисления на реновацию оборудования, эксплуатационные расходы, и нормативные начисления на прямые затраты.

Амортизационные отчисления пропорциональны произведенным капитальным затратам на создание центробежного каскада и определяются в основном стоимостью центрифуг [2]. В эксплуатационные расходы входят оплата труда персонала и энергопотребление. Последнее прямо связано с числом работающих центрифуг, но не является основополагающей в затратах, поскольку центрифужное производство не энергоемко. Трудозатраты на обслуживание каскада не зависят от количества установленных центрифуг, а определяются условиями обслуживания конденсационно-испарительной установки. Величины статей расходов для каскадов различной производительности неодинаковы, но во всех случаях себестоимость изотопного продукта пропорциональна времени работы оборудования [10]. Такой подход приводит к оценке стоимости себестоимости путем введения стоимости суточной эксплуатации одной центрифуги в каскаде (с учетом работы КИУ). В этом случае себестоимость будет произведением стоимости суточной эксплуатации одной центрифуги в каскаде, числа

центрифуг в каскаде и длительности кампании. Увеличение производительности используемых центрифуг ведет к сокращению их необходимого числа или к уменьшению времени работы, что снижает затраты на получение единицы конечного продукта.

Производство стабильных изотопов достаточно дорогостоящий процесс, но и он подчиняется общему правилу: при возрастании масштаба выпуска, цена единицы продукции уменьшается. С уменьшением цены масштаб потребления любого продукта увеличивается, и при достижении некоторой характерной цены, объем спроса может возрастать весьма резко.

При эксплуатации энергетических ядерных реакторов в конструкционных материалах образуется радионуклид  $^{60}\text{Co}$ , который попадает в теплоноситель и обуславливает дозовую нагрузку на персонал атомной электростанции. В 80-х годах специалисты американской фирмы «General Electric» определили издержки, связанные с оплатой работы во вредных условиях, медицинские страховки, пенсионные начисления и вычислили «цену» наличия  $^{60}\text{Co}$  в теплоносителе. Дальнейшие работы показали, что влияние  $^{60}\text{Co}$  может быть блокировано мелкодисперсной окисью цинка, введенной в теплоноситель. Однако пять изотопов цинка включают в себя 48% самого легкого изотопа  $^{64}\text{Zn}$ , который при воздействии нейтронов переходит в  $^{65}\text{Zn}$ , не менее радиоактивный, чем  $^{60}\text{Co}$ .

Решение данной проблемы состоит в удалении изотопа  $^{64}\text{Zn}$  (обеднении) посредством центробежного процесса до такого уровня, который бы не приводил к заметной активации цинка в теплоносителе. При этом стоимость обедненного цинка должна быть такой, чтобы экономически оправдать его использование, то есть не должна превышать заданную величину.

**Перспективы дальнейшего развития центробежного метода для разделения неурановых изотопов.** Сейчас возможности центробежного разделения распространяются более чем на два десятка химических элементов. Уровень развития центробежного метода в настоящее время таков, что практически все потенциально разделяемые на центрифугах химические элементы подвергались разделению и были выявлены особенности технологии получения их изотопов. В результате часть элементов давно и успешно делят

на центробежных каскадах, для других элементов доказана принципиальная применимость метода.

Прогресс центробежного метода связан с развитием и взаимовлиянием основных его составляющих: конструкциями новых центрифуг, используемыми рабочими веществами, компоновкой каскадов, разделительными режимами. Новые компоновочные решения связаны с разработкой эффективных каскадных схем, уменьшением газонаполнения каскадов, увеличением стабильности их гидравлических режимов, повышением эксплуатационной надежности. Совершенствование узлов питания и отбора фракций каскада, систем контроля разделительных режимов по-прежнему остается областью новых инженерных решений.

Повышение требований к изотопной чистоте получаемых продуктов, особенно для медико-биологических приложений, требует осуществления разделительного процесса с максимальным извлечением мешающих изотопных компонентов. Многоэтапные кампании по выделению некрайних изотопов требуют выработки оптимальной последовательности разделительных этапов с учетом переходных режимов в каскаде.

Это приводит к необходимости углубленного исследования вопросов эффективности разделительного процесса, более точной оценки себестоимости получаемых продуктов. Для крупномасштабного производства обогащенных стабильных изотопов актуальны разработки по оптимизации вклада сырьевой составляющей в затраты на основе анализа соотношения себестоимости продукта при глубоком исчерпывании и цены исходного рабочего вещества.

Есть все основания полагать, что центробежный метод будет играть ведущую роль в работах по повышению удельной активности радионуклидов. Центробежная очистка различных продуктов от радиоактивных примесей также является одной из важнейших составляющих безопасных и экологических ядерных технологий и находится под постоянным вниманием специалистов.

## Контрольные вопросы к третьей части

1. Чем определяется ширина ступени?
  2. Можно ли именовать длинным каскад из 20 ступеней при  $\varepsilon = 0,2$ ?
  3. Какое соотношение должно быть между временем работы каскада на разделительном этапе и временем установления?
  4. Можно ли осуществить 3-этапную разделительную кампанию на каскаде с газонаполнением 20 г вещества при наличии 3 кг исходного рабочего соединения и отборе в ценную фракцию 0,1 потока питания?
- 

## Список литературы

1. Artyukhov A.A., Babichev A.P., Knyasev I.Yu. et al. Centrifugal enrichment of cadmium isotopes as the basis for further experiments on physics of weak interactions // Nucl. Instr. Meth. 1997. A401. P. 281-288.
2. Raichura R.C., Al-Janabi M.A.M., Langbein G.M. Some aspects of the separation of multi-isotope mixtures with gas centrifuges // Proc. of 2<sup>nd</sup> Workshop on separation phenomena in liquids and gases, Versailles, July 1989.
3. Борисевич В.Д., Гулиев Д.Ж., Тихомиров А.В. Программный комплекс для исследования каскадных режимов разделения многокомпонентных изотопных смесей // 7-ая Всероссийская научная конференция Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул, г. Звенигород, 30 сент.-4 окт. 2002 г.
4. Прусаков В.Н. Прогресс в разделении изотопов // Материалы юбилейной сессии Учёного совета РИЦ «Курчатовский институт», 30 марта 1993г.
5. Aisen E.M. et al. Computing experiments for study of cadmium isotope separation by gas centrifuges // Nucl. Instr. Meth. 1998. A 417. P. 428-433.

6. Tikhomirov A.V. Enriched stable isotopes for iodine-123 production: Pathways and prospects // 4th Int. Conf. on Isotopes, Cape Town, South Africa, 10-14 March 2002.

7. a) Popov G.E., Prusakov V.N., Rudnev A.I., Tikhomirov A.V., Voronin A.V. Centrifugal enrichment of chromium-50 for experiments on detecting solar neutrinos // Nucl. Instr. and Meth. 1995. A362. 532.

b) Tikhomirov A.V. Practice of centrifugal stable isotope separation for experiments in neutrino physics // Proc. IV Int. Symposium on Weak and Electromagnetic Interactions in Nuclei, Osaka, Japan, June 12-16, 1995. World Scientific. P. 208-211

8. Cribier M. et al. Production of a 62 PBq  $^{51}\text{Cr}$  low energy neutrino source for GALLEX // Nucl. Instr. and Meth. 1996. A378. P. 233.

9. Tikhomirov A.V. Modern tendencies in the enrichment of stable isotopes and their applications in the USSR and elsewhere // Nucl. Instr. and Meth. 1992. B 70. P. 1-4.

10. Калитеевский А.К., Годисов О.Н., Лисейкин В.П., Мязин Л.П. Разработка основ оценки себестоимости производства стабильных изотопов по центробежной технологии // 3-я Всероссийская научная конференция Физико-химические процессы при селекции атомов и молекул, г. Звенигород, 5-9 окт. 1998 г. ЦНИИАТОМИНФОРМ, 1998. С. 128-134.

Г.А. Сулаберидзе, В.А. Палкин, В.Д. Борисевич,  
В.Д. Борман, А.В. Тихомиров

ТЕОРИЯ КАСКАДОВ  
ДЛЯ РАЗДЕЛЕНИЯ БИНАРНЫХ  
И МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ  
ИЗОТОПНЫХ СМЕСЕЙ

Редактор *Т.В. Волвенкова*

Подписано в печать 15.12.2010. Формат 60х84 1/16  
Печ.л. 23,0. Изд. № 1/1/1. Тираж 100 экз. Заказ № 1

---

Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ».  
115409, Москва, Каширское шоссе, 31.  
Типография ООО «Полиграфический комплекс «Курчатовский».