ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"ТОМСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"

ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННЫХ ИСЧИСЛЕНИЙ

Учебное пособие

Издательство ТПУ
Томск 2006

УДК 517
Б 43

Беломестных Л.А., Имас О.Н., Кан Л.А., Новоселова Г.П.
Б 43 Элементы операционных исчислений: учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2006. – 80 с.

Работа состоит из семи параграфов. В первом параграфе даны теоретические обоснования преобразований Лапласа. Во втором – его основные свойства, иллюстрированные примерами применения этих свойств. Третий параграф посвящен практическим вопросам нахождения оригиналов и изображений. В четвертом параграфе подробно разобраны методы решения систем дифференциальных уравнений методами операционного исчисления. В параграфе 4 разобраны примеры решения основных типовых задач. В пятом параграфе приводятся основные сведения о пркобразовании Фурье, как пример одного из многих других интегральных преобразвоаний. В параграфе 6 даны теоретические обоснования возникновения дискретных Z- и D-преобразований, а также их свойства. В конце параграфа приведены примеры использования дискретных преобравзоаний при решении профессиональных задач – задач теории систем. В конце приведен список рекомендуемой литературы. Учебное пособие предназначено для студентов инженерных специальностей дневной формы обучения.

УДК 517

Рекомендовано к печати Редакционно-издательским советом Томского политехнического университета

Рецензенты

Доктор физ.-мат. наук, профессор ТГУ
С.П. Гулько

Кандидат физ.-мат. наук, доцент кафедры теории функций ТГУ
Т.Е. Хмылева

Введение

Возникновение операционного исчисления как самостоятельного раздела в математике относится к концу 19 века, хотя истоки операционного исчисления имеются уже в классических работах Лейбница, Д.Бернулли, Лагранжа, Эйлера, Фурье, Пуассона, Коши.

Сущность операционного исчисления состоит в том, что оператор дифференцирования $\frac{d}{dt}$ рассматривается как алгебраическая величина, благодаря чему можно с ним производить действия, как с обычными числами.

Методы операционного исчисления являются весьма эффективными методами прикладного математического анализа, которые позволяют во многих случаях посредством простых правил решать сложные задачи в различных областях современного естествознания. Эти методы были успешно применены в математической физике, в теории специальных функций, при вычислении интегралов и суммировании функциональных рядов, в некоторых проблемах теории чисел и т.д. Особенно большое значение операционные методы имеют в таких отраслях науки и техники, как автоматика и телемеханика, теория следящих систем, теория регулирования. Успешно применяется операционное исчисление при решении задач механики, электротехники, радиотехники, теплопередачи, теории систем и др.

С целью решения дифференциальных уравнений с данными начальными условиями английский инженер-физик О. Хевисайд (1850−1925 гг.) рассматривал операционное исчисление для функций, определённых на полупрямой, и решил многие прикладные задачи, не заботясь об обосновании применяемых методов. Впервые строгое обоснование операционного исчисления было дано с помощью интегрального преобразования Лапласа (Б. Бромвич, Д. Карсон, П. Леви, Ван-дер-Поль и др.)

Первые два параграфа настоящего пособия можно использовать студентам, знающим раздел «Дифференциальные уравнения», а третий параграф − усвоившим ещё и раздел «Ряды» курса высшей математики. Таблица соответствия оригиналов и изображений содержит интересные формулы и помещена в конце пособия.

§ 1. Оригинал и изображение

I. Определения оригинала и изображения

Будем рассматривать комплексную функцию действительного (вещественного) аргумента t:

$$f(t) = u(t) + iv(t)$$

Определение 1.1. *Функцию* $f(t)$*, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) $f(t)$ *и* $f'(t)$ *или всюду непрерывны, или имеют на любом конечном промежутке лишь конечное число точек разрыва первого рода;*

2) $f(t)$ *=0 для всех точек* $t<0$*;*

3) $f(t)$ *возрастает не быстрее показательной функции, т.е. существуют такие числа* $M>0$ *и* $s_0 \geq 0$*, для которых* $\left|f(t)\right| \leq Me^{s_0 t}$*,*
s_0 *– показатель роста функции* $f(t)$*,*

называют начальной функцией или оригиналом.

Примеры: 1) можно ли функцию $f(t) = \begin{cases} 0, & t<0 \\ e^{(5-4i)t}, & t>0 \end{cases}$ назвать оригиналом? Очевидно, она непрерывна всюду, кроме значения $t=0$ (как и её производная), при $t<0$ $f(t)=0$, $f(t)=e^{5t}$, следовательно, для этой функции $M=1, s_0=5$. Поэтому данная функция – оригинал.

2) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 2t^3, & t \geq 0 \end{cases}$ – так же оригинал, функция непрерывна, при значениях $t<0$ обращается в нуль, а для $t \geq 0$ может быть представлена в виде: $2t^3 = 2e^{3\ln t} < 2e^{3t}$, т.е. для неё $M=2, s_0=3$.

3) $f(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ \dfrac{1}{t-3}, & t \geq 0 \end{cases}$ – не оригинал, так как в точке $t=3$ функция терпит разрыв второго рода.

Простейшая функция – оригинал, так называемая единичная функция $\eta(t)$ (функция Хевисайда рис.1.1), определяется следующим образом

$$\eta(t)=\begin{cases} 0, & t<0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

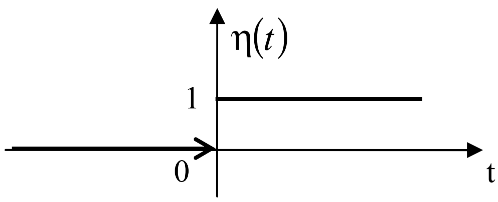


Рис. 1.1.

Будем пользоваться этой функцией в дальнейшем.

Пусть некоторая функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям 1) и 3) определения 1.1, но не удовлетворяет условию 2), т.е. $\varphi(t) \neq 0$ для значений $t < 0$. Умножив эту функцию на $\eta(t)$, мы «гасим» $\varphi(t)$ для значений $t < 0$ и не изменяем её для значений $t \geq 0$. Таким образом, произведение

$$\eta(t) \cdot \varphi(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \varphi(t), & t \geq 0 \end{cases} \text{ – оригинал.}$$

Пользуясь единичной функцией, можно сделать оригиналами такие известные функции, как $\sin t, \cos t, cht, sht, e^{\lambda t}$ и др. Действительно, легко проверить, что, например, функция

$$\eta(t) \cdot \sin t = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sin t, & t \geq 0 \end{cases}$$

будет оригиналом, порядок роста которого $M = 1, s_0 = 0$, так как $|\sin t| \leq 1$, t – вещественная переменная.

Сущность операционного метода заключается в замене оригинала $f(t)$ такой функцией $F(p)$, при которой операция дифференцирования и интегрирования над оригиналом заменяется алгебраическими операциями над функцией $F(p)$. Здесь p– комплексная переменная величина: $p = s + i\tau$. *Такую функцию* $F(p)$ *называют изображением функции* $f(t)$ и обозначают одним из следующих выражений

$$f(t) \risingdotseq F(p), \quad f(t) \to F(p), \quad L\{f(t)\} = F(p)$$

Для перехода от оригинала к изображению (и для обратного перехода) надо знать свойства оригиналов и изображений. Зная эти свойства, мы составим таблицу-каталог, с помощью которого можно совершать указанный переход.

Определение 1.2. *Изображением оригинала* $f(t)$ *называется функция* $F(p)$*, связанная с оригиналом равенством:*

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt, \tag{1.1}$$

где $p = s + i\tau$*, путем интегрирования является вещественная положительная полуось.*

Интеграл в формуле (1) называют *интегралом Лапласа* для функции $f(t)$, переход от оригинала $f(t)$ к изображению $F(p)$ – *преобразованием Лапласа*, а теорию преобразований Лапласа – *операционным исчислением.*

II. Условия существования изображения

Пусть функция $f(t)$ является оригиналом. В какой области комплексной плоскости P существует изображение этого оригинала? Иначе говоря, в какой области плоскости P интеграл Лапласа (1.1) сходится. Ответ на этот вопрос даёт следующая теорема существования.

Теорема 1.1. *Если оригинал $f(t)$ имеет порядок роста s_0, то изображение этого оригинала $F(p)$ существует для всех p, для которых $\operatorname{Re} p = s > s_0$, и является при этом условии аналитической функцией.*

В теореме утверждается, что интеграл Лапласа сходится, и $F(p)$ является аналитической функцией в области, расположенной в комплексной плоскости P справа от прямой $s = s_0$ (рис.1.2). Сходимость интеграла Лапласа, как следует из теоремы, определяется величиной $\operatorname{Re} p = s$ и не зависит от $\operatorname{Im} p = \tau$.

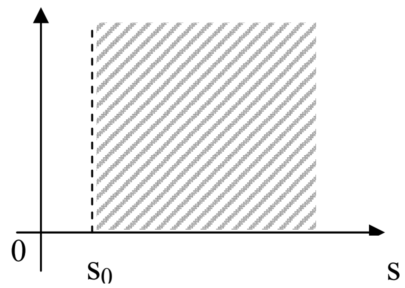


Рис. 1.2.

Докажем существование функции $F(p)$. Пусть $\operatorname{Re} p = s > s_0$. Оценим модуль интеграла Лапласа при этом условии:

$$\left|\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty \left|e^{-pt}\right|\cdot\left|f(t)\right|dt.$$

По свойству показательной функции $\left|e^{-pt}\right| = e^{-st}$, и

$$\left|\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\right| \le \int_0^\infty e^{-st}\cdot Me^{s_0 t}dt,$$

то есть, модуль интеграла Лапласа можно оценить следующим выражением:

$$\left|\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt\right| \le M\int_0^\infty e^{-(s-s_0)t}dt = -M\left.\frac{e^{-(s-s_0)t}}{s-s_0}\right|_0^\infty = \frac{M}{s-s_0}.$$

Так как модуль интеграла (1.1) оказался при значении $s > s_0$ ограниченной величиной, то интеграл сходится, и функция $F(p)$ существует.

Замечание 1.1. Из доказанного неравенства

$$\left|\int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt\right| \le \frac{M}{s - s_0} \qquad (1.2)$$

следует, что если $p \to \infty$ так, что $\operatorname{Re} p = s \to +\infty$, то $F(p) \to 0$. Действительно $\lim\limits_{s \to \infty} \dfrac{M}{s - s_0} = 0$, отсюда в силу неравенства (1.2) получаем требуемое.

Замечание 1.2. В дальнейшем будем полагать $\operatorname{Re} p > s_0$, т.е. рассматривать изображение $F(p)$ лишь для тех p, для которых обеспечено существование этого изображения.

В заключение параграфа приведём вывод двух наиболее часто встречающихся оригиналов.

1. Пусть $f(t) = \eta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$.

Очевидно, что порядок роста этого оригинала $s_0 = 0$. Его изображением будет функция

$$F(p) \risingdotseq \int_0^{\infty} 1 \cdot e^{-pt} dt = -\left.\frac{e^{-pt}}{p}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{p} \text{ при } \operatorname{Re} p > s_0 = 0.$$

Итак, $\eta(t) \risingdotseq \dfrac{1}{p}$ или $1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$.

Замечание 1.3. Для записи соответствия оригинала $f(t)$ изображению $F(p)$ используют знак « $\risingdotseq$ ».

2. Пусть $f(t) = \eta(t) \cdot e^{qt} = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ e^{qt}, & t \ge 0 \end{cases}$, $q -$ комплексное число.

Порядок роста оригинала $f(t)$ равен $s_0 = \operatorname{Re} q$. Его изображение

$$F(p) \risingdotseq \int_0^{\infty} e^{qt} \cdot e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} e^{-(p-q)t} dt = \left.\frac{e^{-(p-q)t}}{-(p-q)}\right|_0^{\infty} = \frac{1}{p-q}$$

в предположении, что $\operatorname{Re}(p-q) > 0$, т.е. $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} q = s_0$.

Замечание 1.4. Условимся в дальнейшем множитель $\eta(t)$ опускать и произведение $\eta(t) \cdot f(t)$ обозначать через $f(t)$. Таким образом, оригинал $\eta(t)e^{qt}$ будем обозначать e^{qt}, оригинал $\eta(t)\cdot\cos t$ – через $\cos t$ и т.д. Итак, $e^{qt} \risingdotseq \dfrac{1}{p-q}$.

§2. Основные свойства преобразования Лапласа

Пусть известны изображения оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$. Как найти изображения для функций $2f(t)$, $2f(t)-3\varphi(t)$, $f'(t)$, $\int_0^\infty f(\tau)d\tau$? Чтобы ответить на эти вопросы, необходимо изучать свойства преобразования Лапласа.

I. Свойство линейности.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, $\varphi(t) \risingdotseq \Phi(p)$ и a, b – любые постоянные, то. $af(t)+b\varphi(t) \risingdotseq aF(p)+b\Phi(p)$

Доказательство этого свойства основано на определении 1.2 преобразования Лапласа и свойстве линейности определённого интеграла:

$$a\cdot f(t)+b\cdot\varphi(t) \risingdotseq \int_0^\infty [af(t)+b\varphi(t)]\cdot e^{-pt}dt = a\int_0^\infty f(t)\cdot e^{-pt}dt + b\int_0^\infty \varphi(t)\cdot e^{-pt}dt =$$

$$= a\cdot F(p)+b\cdot\Phi(p).$$

Пример 1. Пусть $f(t)=\sin\alpha t$. Найти изображение этого оригинала. Эту функцию с помощью формул Эйлера можно представить в виде: $\dfrac{1}{2i}\left(e^{\alpha ti}-e^{-\alpha ti}\right)$. Изображение функции e^{qt} известно. Пользуясь свойством линейности, находим:

$$\sin\alpha t \risingdotseq \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{p-\alpha i}-\frac{1}{p+\alpha i}\right] = \frac{2i\alpha}{2i\left(p^2+\alpha^2\right)} = \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}$$

Точно также можно доказать, что

$$\cos\alpha t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\alpha^2}, \qquad ch\alpha t \risingdotseq \frac{p}{p^2-\alpha^2}, \qquad sh\alpha t \risingdotseq \frac{\alpha}{p^2-\alpha^2}.$$

II. Свойство подобия

Свойство подобия характеризует изменение масштаба вещественной переменной t при преобразовании Лапласа.

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то для любого $\omega > 0$

$$f(\omega\, t) \risingdotseq \frac{1}{\omega} F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

Доказательство. Пусть $f(\omega\, t) \risingdotseq \int\limits_0^{\infty} f(\omega\, t)\cdot e^{-pt}dt$. Заменим $\omega t = \tau$, тогда

$$f(\omega\, t) \risingdotseq \frac{1}{\omega}\int\limits_0^{\infty} f(\tau)\cdot e^{-\frac{p}{\omega}\tau}d\tau = \frac{1}{\omega}F\left(\frac{p}{\omega}\right).$$

Предлагаем поразмышлять, где в доказательстве использовано требование $\omega > 0$?

Пример 2. Найти изображение для $f(t) = \sin^2 t$.

Решение. Прежде всего, заменим $f(t) = \sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t)$, тогда

$$\sin^2 t = \frac{1}{2}(1-\cos 2t) \risingdotseq \frac{1}{2}\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\frac{p}{p^2-4} = \frac{1}{2}\frac{p^2+4-p^2}{p(p^2-4)} = \frac{2}{p(p^2-4)}.$$

III. Дифференцирование оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$, и $f'(t), f''(t), \ldots, f^{(n)}(t)$ – оригиналы, то $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$, $f''(t) \risingdotseq p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$, …, $f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0)$. (Здесь под производной $f^{(k)}(0)$ понимается $\lim\limits_{t\to+0} f^{(k)}(t)$).

Доказательство. Найдём изображение для производной $f'(t)$:

$$f'(t) \risingdotseq \int\limits_0^{\infty} f'(t)\cdot e^{-pt}dt$$

Проинтегрируем интеграл справа по частям:

$$f'(t) \risingdotseq f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{\infty} + p\int\limits_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}dt.$$

Так как предполагается, что $\operatorname{Re} p = s > s_0$, то $\left|e^{-p\,t}\cdot f(t)\right| \le M\cdot e^{-(s-s_0)\,t} \to 0$ при стремлении $t\to\infty$, т.е. $f(t)\cdot e^{-pt}\Big|_0^{\infty} = 0 - f(0)$. Поэтому $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$.

Найдём изображение второй производной: $f''(t)=\left[f'(t)\right]'$. Пользуясь полученным изображением для первой производной, находим

$$f''(t) \risingdotseq p\left[pF(p)-f(0)\right]-f'(0)=p^2F(p)-pf(0)-f'(0),$$

для

$$f'''(t) \risingdotseq p\left[p^2F(p)-pf(0)-f'(0)\right]-f''(0)=p^3F(p)-p^2f(0)-pf'(0)-f''(0).$$

В общем случае для n-ой производной:

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0).$$

В частном случае, если $f(0)=0$, то $f'(t)\risingdotseq pF(p)$, т.е. *операция дифференцирования оригинала* $f(t)$ *сводится к умножению изображения* $F(p)$ *на* p. Если же $f(0)=f'(0)=\ldots=f^{(n-1)}(0)=0$, то $f^{(n)}(t)\risingdotseq p^nF(p)$.

Пример 3. Найти изображение для оригинала $f(t)=x'''-4x''-x'-5$, если $x(0)=1$, $x'(0)=0$, $x''(0)=-1$ и $x(t)=X(p)$.

Решение. Найдём изображение каждого слагаемого

$$x''' \risingdotseq p^3X(p)-p^2x(0)-px'(0)-x''(0)=p^3X-p^2+1,$$

$$x'' \risingdotseq p^2X(p)-px(0)-x'(0)=p^2X-p,$$

$$x' \risingdotseq pX(p)-x(0)=pX-1,\quad 5=5\cdot\frac{1}{p}=\frac{5}{p}.$$

Тогда $f(t)=x'''-4x''-x'-5 \risingdotseq X(p^3-4p^2-p)-p^2+4p+2-\dfrac{5}{p}$.

IV. Интегрирование оригинала

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, то $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$.

Доказательство. Покажем, прежде всего, что $\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau=\varphi(t)$ – оригинал. Действительно, условие 1) определения 1.1 выполнено по свойству определённого интеграла – функция $\varphi(t)$ непрерывна всюду, где непрерывна функция $f(t)$ или имеет конечное число точек разрыва первого рода. Очевидно, что $\varphi(t)=0$ при значениях $t<0$, так как $f(t)=0$ при $t<0$. Кроме того,

$$\left|\varphi(t)\right| = \left|\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right| \le \int_0^t \left|f(\tau)\right| d\tau .$$

В силу того, что $f(t)$ – оригинал, существуют $M > 0$ и $s_0 > 0$, для которых $\left|f(t)\right| \le M \cdot e^{s_0 t}$; тогда и $\left|\varphi(t)\right| \le M \cdot e^{s_0 t} \cdot t$ или $\left|\varphi(t)\right| \le M \cdot e^{s_0 t} \cdot e^{\ln t} \le M \cdot e^{(s_0 - 1)t}$. Итак, $\int_0^t f(\tau)\,d\tau = \varphi(t)$ удовлетворяет всем требованиям, которые были наложены на функцию - оригинал.

Найдём изображение этого оригинала. Пусть

$$\varphi(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \Phi(p).$$

Очевидно, что $\varphi(0) = 0$, и по свойству **III**

$$\varphi'(t) \risingdotseq p \cdot \Phi(p).$$

Но $\varphi'(t) = f(t)$, поэтому $f(t) \risingdotseq p \cdot \Phi(p) = F(p),\ \Phi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$.

Операции интегрирования в пространстве оригиналов соответствует операция деления в пространстве изображений.

Пример 4. Найти изображение $\int_0^t d\tau$.

Решение. Здесь $f(t) = 1, F(p) = \dfrac{1}{p}$, поэтому $\int_0^t d\tau \risingdotseq \dfrac{F(p)}{p} = \dfrac{1}{p^2}$. Отмечая, что $\int_0^t d\tau = t$, заключаем: $t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2}$. Продолжая, получаем $\int_0^t \tau\,d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p^3}$ или $\dfrac{t^2}{2} \risingdotseq \dfrac{1}{p^3}$, $\int_0^t \dfrac{\tau^2}{2} d\tau \risingdotseq \dfrac{1}{p^4}$ или $\dfrac{t^3}{2 \cdot 3} \risingdotseq \dfrac{1}{p^4}, \ldots, \dfrac{t^n}{n!} \risingdotseq \dfrac{1}{p^{n+1}}$.

V. Дифференцирование изображения

Если $F(p) \risingdotseq f(t)$, то $F'(p) \risingdotseq (-t) f(t)$, $F''(p) \risingdotseq (-t)^2 f(t), \ldots,$ $F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t)$

Доказательство. По теореме о производной от интеграла по параметру:

$$\frac{d}{d\alpha}\int_a^b \varphi(t,\alpha)\,dt = \int_a^b \frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\,dt$$

для $\forall\alpha\in[c,d]$, если $\varphi(t,\alpha)$, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial\alpha}$ непрерывны при $a\le t\le b, c\le\alpha\le d$.

По определению преобразования Лапласа

$$F(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\cdot f(t)dt, \text{ а } F'(p)=\int_0^\infty (-t)e^{-pt}\cdot f(t)dt.$$

Дифференцированию в пространстве изображений соответствует операция умножения оригинала на аргумент с отрицательным знаком в пространстве оригиналов.

Пример 5. Найти изображения функций $e^t, te^t,\ldots,t^n e^t$.

Решение. Известно, что $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$, по свойству **V**

$$-te^t \risingdotseq -\frac{1}{(p-1)^2},, \; t^2e^t \risingdotseq \frac{2}{(p-1)^3}, \;\ldots,\; t^n e^t \risingdotseq \frac{n!}{(p-1)^{n+1}}.$$

Можно показать так же, что

$$t\cdot\sin(\alpha t) \risingdotseq \frac{2p\alpha}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}, \quad t\cdot\cos(\alpha t) \risingdotseq \frac{p^2-\alpha^2}{\left(p^2+\alpha^2\right)^2}.$$

VI. Интегрирование изображения

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\dfrac{f(t)}{t}$ – оригинал, а интеграл $\int_p^\infty F(z)dz$ сходится, то $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(z)\,dz$.

Доказательство. Функция $\dfrac{f(t)}{t}$ – оригинал, пусть $\dfrac{f(t)}{t} \risingdotseq \Phi(p)$. По свойству **V** $f(t) \risingdotseq -\Phi'(p)$. Но $f(t)\risingdotseq F(p)$, поэтому $F(p)=-\Phi'(p)$ или $d\Phi=-F(p)dp$. Имеется дифференциальное уравнение с разделенными переменными. Проинтегрируем его в пределах от значения p до значения η:

$$\int_p^\eta d\Phi = \Phi(\eta)-\Phi(p) = -\int_p^\eta F(z)dz.$$

Положим $\eta \to \infty$, тогда согласно замечанию 1.1

$$\lim_{\eta\to\infty}\Phi(p)=0, \quad \lim_{\eta\to\infty}\int_p^{\eta} F(z)\,dz=\int_p^{\infty} F(z)\,dz .$$

Следовательно, $\Phi(p)=\int_p^{\infty} F(z)dz$, но $\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \Phi(p)$, поэтому

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty} F(z)\,dz .$$

Это соответствие существует, если $\operatorname{Re} p > s_1 > s_0$, где s_0 и s_1 – показатели роста функций $f(t)$ и $\frac{f(t)}{t}$ соответственно.

Итак, *операции деления на аргумент в пространстве оригиналов соответствует операция интегрирования в пределах от* ρ *до* ∞ *в пространстве изображений.*

Пример 6. Найти изображения функции $\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau$.

Решение. Известно, что $\sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}$, тогда $\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int_p^{\infty}\frac{dz}{z^2+1}=\frac{\pi}{2}-arctg(p)$. По свойству **IV** $\int_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}d\tau \risingdotseq \frac{1}{p}\left(\frac{\pi}{2}-arctg(p)\right)$.

VII. Смещение в аргументе изображения

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и α – комплексное число, то

$$e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq F(p+\alpha).$$

Доказательство. Применим преобразование Лапласа к оригиналу $e^{-\alpha t} f(t)$:

$$e^{-\alpha t} f(t) \risingdotseq \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} f(t)\cdot e^{-pt}dt=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-(p+\alpha)t}dt=F(p+\alpha)$$

Показатель роста оригинала $f(t)$ есть s_0, а показателем роста оригинала $e^{-\alpha t}f(t)$ будет $(s_0-\operatorname{Re}\alpha)$. В связи с этим утверждение **VII** справедливо, если $\operatorname{Re} p > (s_0-\operatorname{Re}\alpha)$ или $\operatorname{Re}(p+\alpha) > s_0$.

Пример 7. Найти изображения функций $e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t)$.

Решение. Известно, что $\cos\beta t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\beta^2}$, тогда $e^{\alpha t}\cdot\cos(\beta t) \risingdotseq \dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$, аналогично из соответствия $\sin\beta t \risingdotseq \dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$ по свойству **VII** следует $e^{\alpha t}\cdot\sin(\beta t) \risingdotseq \dfrac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$.

VIII. Смещение в аргументе оригинала (запаздывание)

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f(t-a)=0$ при значениях $t<a$, то для всякого $a>0$ $f(t-a) \risingdotseq e^{-pa}F(p)$. Иначе говоря, *если процесс, описываемый оригиналом $f(t-a)$, опаздывает на время a по сравнению с первоначальным $f(t)$, то изображение, соответствующее этому процессу, получается из изображения первоначального оригинала умножением на функцию* $e^{-p\alpha}$.

Используем определение преобразования Лапласа для оригинала $f(t-a)$ и свойство аддитивности определённого интеграла относительно отрезка интегрирования.

$$f(t-a) \risingdotseq \int_0^a f(t-a)e^{-pt}dt + \int_a^\infty f(t-a)\cdot e^{-pt}dt .$$

Первый интеграл равен нулю, так как по условию $f(t-a)=0$ при значениях $t<a$ по условию теоремы. Ко второму интегралу применим замену переменной: $t-a=\tau$, $dt=d\tau$, при значении $t=a \Rightarrow \tau=0$, при значении $t=\infty \Rightarrow \tau=\infty$. Тогда

$$f(t-a) \risingdotseq \int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-p(a-\tau)}d\tau = \int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-pa}\cdot e^{-p\tau}d\tau = e^{-pa}\int_0^\infty f(\tau)\cdot e^{-p\tau}d\tau = e^{-pa}F(p)$$

Графически:

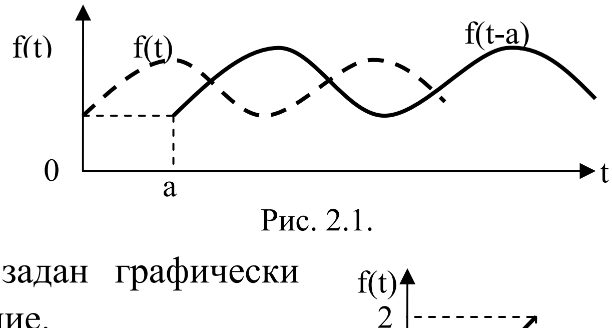


Рис. 2.1.

Пример 8. Оригинал $f(t)$ задан графически (рис. 2.2), найти его изображение.

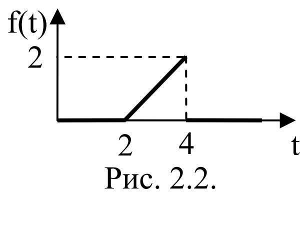


Рис. 2.2.

Решение. Очевидно, что $f(t)=\begin{cases}0, & t\le 2\\ t-2, & 2<t\le 4\\ 0, & t>4\end{cases}$. Функцию $f(t)=t-2$ можно записать и так («гасим» функцию): $f(t)=(t-4)+2$.

Используя единичные функции $\eta(t-2)$ и $\eta(t-4)$, запишем

$$f(t)=(t-2)\eta(t-2)-(t-4)\eta(t-4)-2\eta(t-4)\fallingdotseq\frac{e^{-2p}}{p^2}-e^{-4p}\left(\frac{1}{p^2}+\frac{2}{p}\right).$$

Теорема запаздывания имеет особое значение в теории регулирования. Пользуясь ею, можно исследовать системы с запаздывающими звеньями и вообще кусочно-непрерывные функции.

Рассмотрим вначале «ступенчатые функции» (практически характеризующие сброс или присоединение постоянных нагрузок). *Ступенчатые функции – это кусочно-непрерывные функции, которые на каждом участке непрерывности имеют постоянные значения.*

Функция $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ A, & 0<t<T_0\\ 0, & t>T_0\end{cases}$ (рис. 2.3) может быть записана в виде:

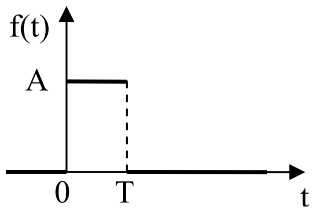


Рис. 2.3.

$$f(t)=A\cdot[\eta(t)-\eta(t-T)]\fallingdotseq\frac{A}{p}\cdot[1-e^{-pT}].$$

Для функции, изображённой на рис. 2.4, имеем

$$f(t)=A\eta(t)+(B-A)\eta(t-T_1)+(C-B)\eta(t-T_2)-(C-D)\eta(t-T_3)-D\eta(t-T_4)$$

$$\fallingdotseq(A+(B-A)e^{-pT_1}+(C-B)e^{-pT_2}-(C-D)e^{-pT_3}-De^{-pT_4})\cdot\frac{1}{p}$$

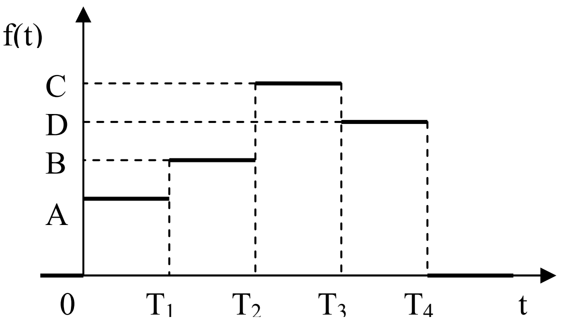


Рис 2.4.

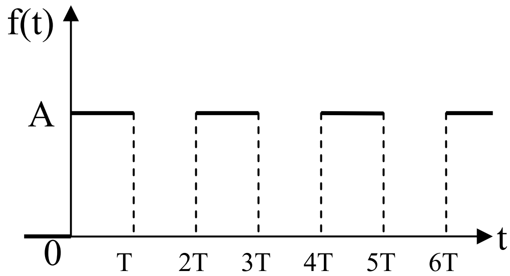


Рис 2.5.

Рассмотрим периодически-ступенчатую функцию, изображённую на рис. 2.5. Для неё

$$f(t) = A\left[\eta(t) - \eta(t-T) + \eta(t-2T) - \eta(t-3T) + \eta(t-4T) - \eta(t-5T) + \ldots\right] \doteqdot$$

$$\doteqdot \frac{A}{p}\left[1 - e^{-pT} + e^{-2pT} - e^{-3pT} + e^{-4pT} - e^{-5pT} + \ldots\right] = \frac{1}{p} \cdot \frac{A}{1 + e^{-pT}}.$$

Для определения изображения функции, заданной на рис. 2.6(а), построим график её производной (рис. 2.6(б)).

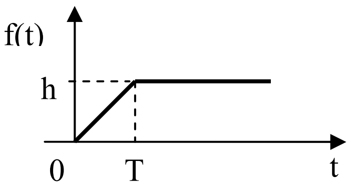


Рис. 2.6(а)

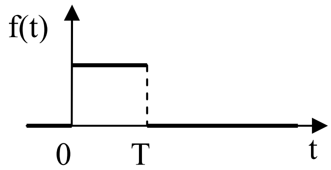


Рис. 2.6(б)

Тогда $f'(t) \doteqdot \frac{h}{pT}\left(1 - e^{-pT}\right)$, следовательно $f(t) \doteqdot \frac{h}{p^2 T}\left(1 - e^{-pT}\right)$.

Для заданной на рис. 2.7(а) графически функции для определения изображения также воспользуемся графическим построением её производной (рис. 2.7(б)):

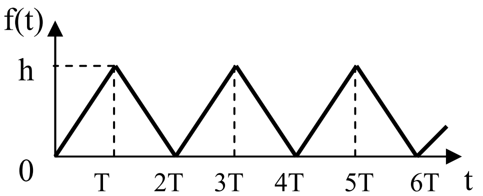


Рис. 2.7(а)

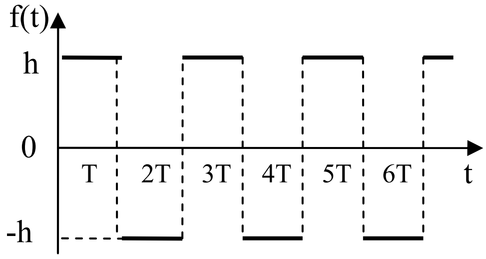


Рис. 2.7(б)

Тогда $f'(t) \doteqdot \frac{h}{pT}\left[1 - 2e^{-pT} + 2e^{-2pT} - 2e^{-3pT} + 2e^{-4pT} - \ldots\right] = \frac{h}{pT} \cdot \frac{1 - e^{-pT}}{1 + e^{-pT}}$.

Так как $\frac{1 - e^{-pT}}{1 + e^{-pT}} = \frac{e^{p\frac{T}{2}} - e^{-p\frac{T}{2}}}{e^{p\frac{T}{2}} + e^{-p\frac{T}{2}}} = th\frac{pT}{2}$; $f'(t) \doteqdot \frac{h}{T} th\frac{pT}{2}$, то

$$f(t) \doteqdot \frac{h}{p^2 T} th\frac{pT}{2}.$$

Рассмотрим графики ещё трёх функций:

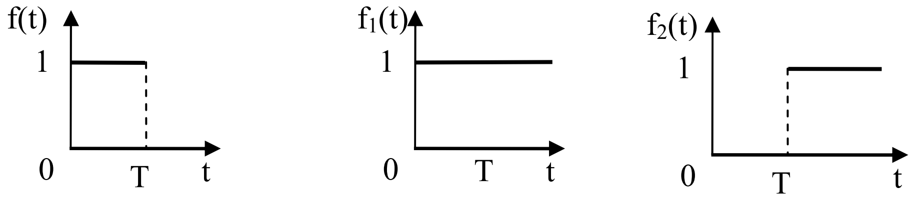


Рис. 2.8.

Функция $f(t)$ может быть представлена как разность двух единичных функций $f_1(t) - f_2(t)$, где $f_1(t) = \eta(t) \risingdotseq 1$, а $f_2(t) = \eta(t-T) \risingdotseq e^{-pT}$, следовательно, $f(t) \risingdotseq 1 - e^{-pT}$.

IX. Изображение периодического оригинала

Если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f(t)$ – периодическая функция с периодом $T > 0$, то

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Доказательство. По определению 1.2 преобразования Лапласа

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt = \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt + \int_T^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Применим ко второму интегралу замену переменной $t = \tau + T, dt = d\tau$, при значении $t = T \Rightarrow \tau = 0$, при значении $t = \infty \Rightarrow \tau = \infty$;

$$F(p) = \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt + \int_0^\infty f(\tau) \cdot e^{-p\tau} \cdot e^{-pT} d\tau = \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt + e^{-pT} F(p)$$

Отсюда
$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-pT}} \int_0^T f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Пример 9. Найти изображение периодической функции (рис. 2.9).

$$f(t) = f(t+2\pi) = \begin{cases} \sin t, & 2n\pi < t < (2n+1)\pi \\ 0, & (2n+1)\pi < t < (2n+2)\pi \end{cases}.$$

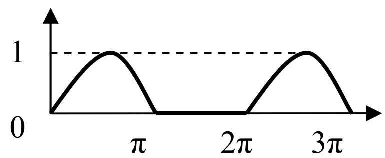


Рис. 2.9.

Решение. Имеем

$$F(p) = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \int_0^\pi e^{-pt} \sin t dt = \frac{1}{1-e^{-2\pi p}} \cdot \frac{e^{-pt}}{p^2+1} (-p \sin t - \cos t) \Big|_0^\pi =$$

$$= \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1+e^{-\pi p}}{1-e^{-2\pi p}} = \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{1-e^{-\pi p}}$$

Заметим, что по свойству **VIII**

$$f(t) = \sin t \cdot \eta(\sin t) \risingdotseq \frac{1}{p^2+1} \cdot \frac{1}{1-e^{-2\pi p}}.$$

X. Свёртка функций. Теорема умножения

Пусть две функции $f(t)$ и $\varphi(t)$ непрерывны для значений $t>0$. *Свёрткой этих функций называется интеграл* $f*\varphi=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau$.

Вычисление этого интеграла называется «свёртыванием функций».

Покажем, что введённая операция обладает свойством симметрии: $f*\varphi=\varphi*f$. Действительно

$$\varphi*f=\int\limits_0^t\varphi(\tau)\cdot f(t-\tau)\,d\tau=\left|\begin{array}{l}t-\tau=u\\ -d\tau=du\end{array}\right.$$

$$=-\int\limits_t^0\varphi(t-u)\cdot f(u)\,du=\int\limits_0^t f(u)\cdot\varphi(t-u)\,du=f*\varphi.$$

В физике интегралу $\int\limits_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau$ даётся следующий смысл. Если, например, в течение времени, длящегося от $\tau=0$ до $\tau=t$, действуют некоторые факторы $f(\tau)$, то их суммарный эффект в простейшем случае равен $\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$. Но если к каждому фактору применять весовой коэффициент φ, зависящий от промежутка времени, прошедшего между моментом возникновения фактора и моментом t наблюдения (следовательно, от $t-\tau$), то свёртка функций определяет суммарный эффект всех факторов.

Можно показать, что если $f(t)$ и $\varphi(t)$ – оригиналы, то их свёртка также оригинал. Точнее, если $f(t)$ и $\varphi(t)$ – оригиналы с показателями роста s_0 и $s_1(s_0>s_1)$, то $f*\varphi$ – оригинал с показателем роста s_0.

Рассмотрим часто встречающийся случай, когда изображение неизвестного оригинала разлагается на множители $F(p)\cdot\Phi(p)$, причём известны оригиналы, соответствующие множителям $F(p)\risingdotseq f(t)$, $\Phi(p)\risingdotseq\varphi(t)$. Можно ли найти неизвестный оригинал? Ответ даёт теорема умножения (Эмиль Борель 1871–1956 гг.):

Теорема 2.1. *Если* $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$, *то произведение изображений* $F(p)\cdot\Phi(p)$ *является изображением свёртки оригиналов*: $F(p)\cdot\Phi(p)\risingdotseq f(t)*\varphi(t)$.

Иначе говоря, *умножение изображений равносильно свёртыванию оригиналов этих изображений.*

Доказательство. По определению изображения

$$f(t)*\varphi(t) \risingdotseq \int_0^\infty f*\varphi\cdot e^{-pt}dt = \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(t-\tau)\cdot\varphi(\tau)\,d\tau$$

Как известно, интеграл Лапласа абсолютно сходится при значениях $\operatorname{Re} p > s_0$, поэтому можно изменить порядок интегрирования:

$$f*\varphi \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)\,d\tau\int_\tau^\infty e^{-pt}\cdot f(t-\tau)\,dt\,.$$

Совершим замену переменной во внутреннем интеграле: $t-\tau=u, dt=du$. Тогда

$$f*\varphi \risingdotseq \int_0^\infty \varphi(\tau)\cdot d\tau\cdot e^{-p\tau}\int_0^\infty f(u)\cdot e^{-pu}du = \int_0^\infty \varphi(\tau)e^{-p\tau}d\tau\cdot\int_0^\infty f(u)e^{-pu}du = \Phi(p)\cdot F(p)$$

Пример 10. Найти оригинал, соответствующий изображению $\dfrac{p^2}{p^4+13p^2+36}$.

Решение. Очевидно

$$\frac{p^2}{p^4+13p^2+36} = \frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+9};\quad \frac{p}{p^2+4}\risingdotseq\cos 2t\,,\ \frac{p}{p^2+9}\risingdotseq\cos 3t\,.$$

Следовательно,

$$\frac{p^2}{p^4+13p^2+36} = \frac{p}{p^2+4}\cdot\frac{p}{p^2+9}\risingdotseq\cos 3t*\cos 2t = \int_0^t \cos 3\tau\cdot\cos 2(t-\tau)\,d\tau =$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(2t+\tau)+\cos(5\tau-2t)\right]d\tau = \frac{1}{5}(3\sin 3t-2\sin 2t)\,.$$

XI. Интеграл Дюамеля

(Жан Мари Констан Дюамель 1797-1872 гг.)

Эта формула является следствием теоремы умножения и имеет важные приложения при расчёте переходных процессов в электрических цепях.

Если $f(t)\risingdotseq F(p)$, $\varphi(t)\risingdotseq\Phi(p)$,

то $$p\cdot F\cdot\Phi \risingdotseq f(t)\cdot\varphi(0)+\int_0^t f(\tau)\cdot\varphi'(t-\tau)\,d\tau\,.$$

Доказательство. Из теоремы Бореля $f*\varphi\risingdotseq F(p)\cdot\Phi(p)$. Из правил дифференцирования следует

$$[f*\varphi]'_t \risingdotseq pF\cdot\Phi - [f*\varphi]_{t=0}$$

Но $\quad [f*\varphi]_{t=0} = \left[\int_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau\right]\Bigg|_{t=0} = 0$, $\quad$ поэтому $[f*\varphi]_t' \risingdotseq pF\cdot\Phi$.

Найдём производную свёртки

$$[f*\varphi]_t{}' = \frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau.$$

Интеграл справа – сложная функция от t, так как содержит t как параметр в подынтегральном выражении и зависит от переменного верхнего предела t.

Рассмотрим более общий случай: пусть верхним пределом интегрирования будет функция $u = u(t)$. Тогда $\int_0^u f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau = X(u,t)$. По правилу дифференцирования сложной функции $\dfrac{dX}{dt} = \dfrac{\partial X}{\partial t} + \dfrac{\partial X}{\partial u}\cdot\dfrac{du}{dt}$, где

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \int_0^u \left[f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\right]_t{}' d\tau = \int_0^u f(\tau)\cdot\varphi'(t-\tau)\,d\tau,$$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \left[\int_0^u f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau\right]_u' = f(u)\cdot\varphi(t-u).$$

Следовательно,

$$\frac{dX}{dt} = \int_0^u f(\tau)\cdot\varphi'(t-\tau)\,d\tau + f(u)\cdot\varphi(t-u)\frac{du}{dt}.$$

Полагая $u = t$, получим

$$\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)\cdot\varphi(t-\tau)\,d\tau = \int_0^t f(\tau)\cdot\varphi'(t-\tau)\,d\tau + f(t)\cdot\varphi(0) \risingdotseq p\cdot F\cdot\Phi.$$

Интеграл в правой части и называется интегралом Дюамеля.

Эта формула может быть использована для решения линейных неоднородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях, когда левая часть не меняется, а правая меняется неоднократно или, когда для правой части трудно подобрать изображение.

Пусть дано неоднородное дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_nx=f(t)$$

и требуется найти частное решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям: $x(0)=0, x^1(0)=0,\ldots,x^{(n-1)}(0)=0$. Решение соответствующего уравнения в пространстве изображений имеет вид:

$$X(p)=\frac{F(p)}{D_n(p)},$$

где $F(p)\risingdotseq f(t)$, $D_n(p)=p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n$.

Рассмотрим уравнения с такой же левой частью, что и исходное уравнение, но с правой частью, равной оригинальной функции $\eta(t)$ и нулевыми начальными условиями

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_ny=\eta(t).$$

Вспомогательному уравнению соответствует решение в пространстве изображений: $Y(p)=\dfrac{1}{p\cdot D_n(p)}$, отсюда $X=pF\cdot Y$, или, используя формулу Дюамеля, имеем

$x(t)=f(t)\cdot y(0)+\int\limits_0^t f(\tau)\cdot y'(t-\tau)d\tau$, где $y=Y(p)$ – решение вспомогательного уравнения. С учётом нулевых начальных условий

$$x(t)=\int\limits_0^t f(\tau)\cdot y'(t-\tau)\,d\tau.$$

Таким образом, по решению уравнения в виде единичной функции можно найти решение, когда правая часть – есть любая непрерывная функция-оригинал.

Пример 11. Найти частное решение дифференциального уравнения $x''=arctgt$, $x(0)=0$, $x'(0)=0$.

Решение. Вспомогательное уравнение $y''=1$, $y(t)$ – частное решение. Операторное уравнение $p^2Y=\dfrac{1}{p},\quad Y=\dfrac{1}{p^3}\risingdotseq\dfrac{t^2}{2}=y(t),\ y(0)=0$.

Тогда искомое решение

$$x(t)=\int\limits_0^t arctg\tau\cdot(t-\tau)\,d\tau+arctgt\cdot 0=\left(t\tau-\frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_0^t-\int\limits_0^t\left(t\tau-\frac{\tau^2}{2}\right)\frac{d\tau}{1+\tau^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right)arctgt-\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right)+\frac{t}{2}.$$

Если начальные условия исходного уравнения не нулевые, то заменой искомой функции задачу можно свести к задаче с нулевыми начальными условиями, при этом лишь несколько изменится правая часть уравнения, функция $f(t)$.

§ 3. Нахождение оригинала по изображению

I. Теорема единственности

В предыдущем параграфе были найдены изображения многих оригиналов. Для практических целей (так же как для интегралов) существуют обширные таблицы соответствий между оригиналами и изображениями. Для учебных целей некоторые соответствия упорядочены и приведены в таблице в конце пособия. Использование подобной таблицы упрощает процесс нахождения оригиналов и изображений. Однако при этом необходимо знать следующее.

Каждому оригиналу $f(t)$ *соответствует единственное изображение* $F(p)$. Обратное не всегда верно, т.е. одна и та же функция может служить изображением различных оригиналов. В самом деле, если изменить значение функции $f(t)$ в конечном числе точек, то, поскольку такое изменение не влияет на результат вычисления интеграла Лапласа, изображение не изменится.

Теорема 3.1. (единственности). *Если функция* $F(p)$ *является изображением оригиналов* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$, *то эти оригиналы равны во всех точках* t, *где функции* $f_1(t)$ *и* $f_2(t)$ *непрерывны.*

Из теоремы следует, что если $F(p)$ – изображение непрерывного оригинала $f(t)$, то этот оригинал единственный. Так как в приложениях оригиналы предполагаются дифференцируемыми функциями, а, следовательно, и непрерывными функциями, то обычно находят по изображению непрерывный оригинал при помощи таблицы соответствия. Так, $F(p)=\dfrac{p}{p^2-4} \risingdotseq \cos 2t$ – единственный непрерывный при значениях $t>0$ оригинал.

II. Линейная комбинация изображений

Когда в таблице соответствий нужное изображение отсутствует, то это изображение стремятся выразить через линейную комбинацию или произведение изображений, имеющихся в таблице.

Пример 1. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{4p-3}{p^2-4p+3}$

Решение. Используем разложение дроби на элементарные и таблицу соответствий:

$$F(p)=\frac{4p-3}{p^2-4p+3}=-\frac{1}{2}\frac{1}{p-1}+\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{p-3}\fallingdotseq-\frac{1}{2}e^t+\frac{9}{2}e^{3t}=f(t).$$

Пример 2. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{p+5}{p^2-2p+10}$.

Решение.

$$F(p)=\frac{p+5}{p^2-2p+10}=\frac{p-1+6}{(p-1)^2+9}=\frac{p-1}{(p-1)^2+3^2}+2\frac{3}{(p-1)^2+3^2}$$

$$\fallingdotseq e^t(\cos 3t+2\sin 3t)=f(t).$$

Пример 3. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{1}{(p^2+1)^2}$

Решение.

$$F(p)=\frac{1}{\left(p^2+1\right)^2}=\frac{1}{p^2+1}\cdot\frac{1}{p^2+1}\fallingdotseq\sin t*\sin t=\int_0^t\sin\tau\cdot\sin(t-\tau)\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t\left[\cos(2\tau-t)-\cos t\right]d\tau=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\tau-t)}{2}-\tau\cos t\right]\Bigg|_0^t=\frac{1}{2}(\sin t-t\cdot\cos t)=f(t)$$

Пример 4. Найти оригинал для изображения $F(p)=\dfrac{-6p^2+15p+14}{20(p-2)^2\left(p^2+1\right)}$.

Решение. $F(p)=\dfrac{-6p^2+15p+14}{20(p-2)^2\left(p^2+1\right)}=\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{(p-2)^2}-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{p-2}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{p}{p^2+1}\fallingdotseq$

$$\fallingdotseq\frac{1}{5}t\cdot e^{2t}-\frac{1}{4}e^{2t}+\frac{1}{4}\cos t=f(t).$$

III. Первая теорема разложения

В некоторых случаях для нахождения оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ последнее представляют в виде ряда, члены которого являются изображениями известных оригиналов.

Теорема 3.2. *Если функция $F(p)$ аналитическая в бесконечно удалённой точке $(p=\infty)$, и разложение её в ряд Лорана в окрестности указанной точки имеет вид:*

$$F(p)=\frac{a_0}{p}+\frac{a_1}{p^2}+\frac{a_2}{p^3}+\ldots\frac{a_n}{p^{n+1}}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{p^{n+1}},$$

то $F(p)$ *является изображением оригинала* $f(t)$, *определяемого степенным рядом*

$$f(t)=a_0+\frac{a_1}{1!}t+\frac{a_2}{2!}t^2+\ldots+\frac{a_n}{n!}t^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}t^n,$$

сходящимся для всех $t>0$.

Пример 5. Найти оригинал по изображению $F(p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$.

Решение. Разложим $F(p)$ в ряд Лорана по степеням p в окрестностях точки $p=\infty$. Известно разложение

$$\ln(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots, \text{ сходящееся для } |z|<1.$$

Положим $z=\frac{1}{p}$, тогда будем иметь

$$F(p)=\ln\left(1+\frac{1}{p}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{2p^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{np^n}+\ldots \quad \text{для } |p|>1.$$

Отсюда

$$f(t)=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{1!}+\ldots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots=\frac{1}{t}\left[t-\frac{t^2}{2!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n!}+\ldots\right]=$$

$$=\frac{1}{t}\left\{1-\left[1-\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}-\ldots+(-1)^n\frac{t^n}{n!}+\ldots\right]\right\}=\frac{1}{t}\left(1-e^{-t}\right).$$

IV. Вторая теорема разложения

Пусть дана правильная несократимая рациональная дробь

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{b_0p^m+b_1p^{m-1}+\ldots+b_m}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n} \quad (n>m).$$

Получим общую формулу для нахождения соответствующего оригинала.

Теорема 3.3. *Если* $F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}$ *– правильная несократимая рациональная дробь, и знаменатель имеет корни* $p_1,\ p_2,\ \cdots p_e$ *кратностей* $r_1, r_2, \ldots, r_l$ $(r_1+r_2+\ldots+r_l=n)$, *то оригиналом служит функция*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\frac{1}{(r_k-1)!}\lim_{p\to p_k}\frac{d^{r_k-1}}{dp^{r_k-1}}\left[(p-p_k)^{r_k}\frac{F_1(p)}{F_2(p)}e^{pt}\right]. \qquad (3.1)$$

Если среди корней знаменателя есть корень первой кратности (простой корень), например, $p_s(r_s=1)$, то ему соответствует слагаемое

$$\lim_{p\to p_s}(p-p_s)\frac{F_1(p)}{F_2(p)}\cdot e^{pt},$$

которое с учётом того, что $F_2(p_s)=0$, можно записать так

$$\lim_{p\to p_s}\frac{F_1(p)}{\dfrac{F_2(p)-F_2(p_s)}{p-p_s}}e^{pt}=\frac{F_1(p_s)}{F_2'(p_s)}e^{p_s t}.$$

В случае, когда все корни знаменателя простые, формула (1) примет вид

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}e^{p_k t} \qquad (3.1^*)$$

Докажем теорему для этого частного случая

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\frac{A_1}{p-p_1}+\frac{A_2}{p-p_2}+\ldots+\frac{A_n}{p-p_n} \qquad (3.2)$$

Чтобы найти неопределённые коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$, умножим почленно равенство (3.2) на двучлен $(p-p_k)$:

$$(p-p_k)\frac{F_1}{F_2}=A_1\frac{p-p_k}{p-p_1}+A_2\frac{p-p_k}{p-p_2}+\ldots+A_n\frac{p-p_k}{p-p_n}.$$

Перейдя в последнем равенстве к пределу при $p\to p_k$, найдём

$$A_k=\lim_{p\to p_k}\frac{(p-p_k)F_1}{F_2}=\lim_{p\to p_k}\frac{F_1(p)}{\dfrac{F_2(p)-F_2(p_k)}{p-p_k}}=\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)},\quad k=1,2,\ldots,n.$$

Тогда

$$F(p)=\frac{F_1(p)}{F_2(p)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}\cdot\frac{1}{p-p_k}\risingdotseq\sum_{k=1}^{n}\frac{F_1(p_k)}{F'_2(p_k)}e^{p_k t}.$$

Пример 6. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{2p+1}{(p-3)(p-1)(p+2)}$.

Решение. Все корни знаменателя простые, обозначим $p_1=3,\ p_2=1,\ p_3=-2,\ F_1(p)=2p+1,\ F_2(p)=(p-3)(p-1)(p+2)$.
Найдём $F'_2(p)=(p-1)(p+2)+(p-3)(p+2)+(p-3)(p-1)$,

$$\frac{F_1(3)}{F'_2(3)}=\frac{7}{10},\quad \frac{F_1(1)}{F'_2(1)}=-\frac{1}{2},\quad \frac{F_1(-2)}{F'_2(-2)}=-\frac{1}{5}.$$

Следовательно, $F(p)\risingdotseq f(t)=\frac{7}{10}e^{3t}-\frac{1}{2}e^{t}-\frac{1}{5}e^{-2t}$.

Пример 7. Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}$**.**

Решение. Корень $p_1=-1$ кратности $r_1=1$, корень $p_2=-3$ кратности $r_2=3$. Воспользуемся формулой (3.1):

$$f(t)=\lim_{p\to-1}(p+1)\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}e^{pt}+\frac{1}{2!}\lim_{p\to-3}\frac{d^2}{dp^2}\left[(p+3)^3\frac{1}{(p+1)(p+3)^3}e^{pt}\right]$$

Найдём

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=\frac{t(p+1)-1}{(p+1)^2}e^{pt},\quad \frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{e^{pt}}{p+1}\right)=\frac{t^2(p+1)^2-2t(p+1)+2}{(p+1)^3}e^{pt}.$$

Теперь

$$f(t)=\lim_{p\to-1}\frac{e^{pt}}{(p+3)^3}+\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\frac{t^2(p+1)^2-2t(p+1)+2}{(p+1)^3}e^{pt}=\frac{1}{8}e^{-t}-\frac{1}{8}(2t^2+2t+1)e^{-3t}$$

Пример 8. Найти оригинал по изображению $F(p)=\frac{1}{p^3+2p^2+2p}$**.**

Решение. Корни знаменателя**:** $p_1=0,\ p_{2,3}=-1\pm i$. Для нахождения оригинала используем формулу (3.1*). Найдем

$$F_2'(p)=3p^2+4p+2.$$

Так как

$$F_1(p)=1=const\text{, то }\frac{F_1(0)}{F_2'(0)}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{F_1(-1+i)}{F_2'(-1+i)}=-\frac{1}{4}(1-i),\ \frac{F_1(-1-i)}{F_2'(-1-i)}=-\frac{1}{4}(1+i).$$

Отсюда, с использованием формулы Эйлера

$$f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}(1-i)e^{(-1+i)t}-\frac{1}{4}(1+i)\cdot e^{(-1-i)t}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos t+\sin t)\cdot e^{-t}.$$

V. Теорема обращения

Теорема 3.4. *Если функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0 и $F(p)$ – её изображение, то в любой точке непрерывности $f(t)$ имеет место формула*

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_c F(p)\cdot e^{pt}dp\ , \tag{3.3}$$

где c – любая прямая, параллельная мнимой оси и отстоящая от неё на расстоянии $s > s_0$.

Доказательство. Для функции $f(t)$, заданной на интервале $(-\infty,+\infty)$, удовлетворяющей на любом конечном интервале условиям Дирихле (кусочно-монотонна, кусочно-непрерывна и ограничена) и абсолютно интегрируемой в R (сходится $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|dt$), во всех точках непрерывности существует представление интегралом Фурье

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(\tau)\cdot e^{-\omega(\tau-t)i}d\tau. \tag{3.4}$$

В точках разрыва $f(t)$ интеграл Фурье равен $\frac{1}{2}[f(t-0)+f(t+0)]$. Если справедлива формула (3.4), то имеет место прямое

$$F(\omega)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot e^{-\omega\tau i}d\tau \tag{3.5}$$

и обратное

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\cdot e^{\omega\tau i}d\omega \tag{3.6}$$

преобразования Фурье.

Пусть теперь функция $f(t)$ – оригинал с показателем роста s_0, а $F(p)=\int\limits_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-pt}dt$ – её изображение.

Рассмотрим функцию $e^{-st}f(t)$, где $s>s_0\geq 0$. Эта функция во всех точках непрерывности допускает представление интегралом Фурье, так как, очевидно, удовлетворяет условиям Дирихле и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\left|e^{-st}f(t)\right|dt=\int\limits_0^{+\infty}\left|e^{-st}\right|\cdot\left|f(t)\right|\cdot dt\leq M\int\limits_0^{\infty}e^{-(s-s_0)}dt=-\frac{M}{s}e^{-(s-s_0)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{M}{s},$$

т.е. $f(t)$ абсолютно интегрируема на интервале $(-\infty,+\infty)$.

По формуле (3.4) имеем

$$e^{-st} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s\tau} \cdot f(\tau) \cdot e^{-\omega(\tau - t)i} d\tau \cdot$$

Умножим все выражение на e^{st}. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{(s+i\omega)t - (s+i\omega)\tau} d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(s+i\omega)t} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-(s+i\omega)\tau} d\tau \right) d\omega.$$

Во внутреннем интеграле обозначим $s + i\omega = p$ и учтём, что $f(t)$ – оригинал, тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-(s+i\omega)\tau} d\tau = \int_{0}^{\infty} f(\tau) \cdot e^{-p\tau} d\tau.$$

Правая часть данного выражения есть не что иное, как изображение $F(p)$ функции $f(t)$. Таким образом,

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(p) e^{pt} d\omega.$$

Заменим переменную интегрирования ω на $p = s + i\omega$. Так как s – фиксированное число, то $dp = id\omega$. При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ путём интегрирования в комплексной плоскости p будет прямая c, параллельная мнимой оси и отстоящая от неё на величину $s > s_0$. После замены переменной интегрирования во всех точках непрерывности функции $f(t)$ будем иметь

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c} F(p) \cdot e^{pt} dp.$$

Замечание. Так как интеграл вычисляется по прямой, то формулу (3.3) записывают в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp$$

или

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp \qquad (3.7)$$

и называют формулой обращения преобразования Лапласа (Меллин Р.Х. (1854–1933)).

Если заранее известно, что $F(p) \doteq f(t)$, то на основании теоремы обращения 3.4 для нахождения оригинала $f(t)$ по изображению $F(p)$ можно воспользоваться формулой (3.7). Этой же формулой пользуются и тогда, когда заранее неизвестно, что $F(p)$ – изображение некоторой функции $f(t)$. В этом случае полученный результат требует проверки выполнения равенства для интеграла Лапласа:

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt}\, dt \,.$$

Так же, как не всякая функция $f(t)$ может быть оригиналом, так и не любая функция $F(p)$ может служить изображением, т.е. иметь оригинал.

Функция $F(p)$ будет изображением оригинала, если:

1) $F(p)$ – аналитическая функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p = s > s_0$, где s_0 – некоторое положительное число;

2) $F(p) \to 0$ при значениях $\operatorname{Re} p = s > s_0$ и $|p| \to +\infty$;

3) сходится интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |F(s + i\omega)|\, d\omega$.

Для непосредственного вычисления оригинала формула (3.7) мало пригодна, но из неё следует ряд практических выводов.

В правой части формулы обращения стоит интеграл от аналитической функции $F(p)$, взятой в плоскости комплексного переменного p. В некоторых случаях удаётся путь интегрирования заменить другим, допускающим вычисление интеграла с помощью теоремы Коши о вычетах. Пусть изображение $F(p)$ есть аналитическая функция всюду за исключением конечного числа изолированных особых точек: $p_1, p_2, \ldots, p_l$ и $\lim\limits_{p \to \infty} F(p) = 0$, тогда при всех $t > 0$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{s-i\omega}^{s+i\omega} F(p) \cdot e^{pt} dp = \sum_{k=1}^{l} \underset{p=p_k}{res} \left[F(p) \cdot e^{pt}\right], \tag{3.8}$$

т.е. *оригинал находится как сумма вычетов функции $F(p) \cdot e^{pt}$ в изолированных особых точках.*

В частности, формула (3.8) имеет место, если $F(p)$ – правильная рациональная дробь и $p_1, p_2, \ldots, p_e$ – корни её знаменателя кратности $r_1, r_2, \ldots, r_e$, соответственно.

Из теории функций комплексного переменного известно, что, если z_0 – полюс порядка r функции $f(z)$, то

$$res\, f(z)=\frac{1}{(r-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{r-1}}{dz^{r-1}}\left[(z-z_0)^r f(z)\right].$$

С учётом этого для изображения $F(p)$, являющегося правильной рациональной дробью, из формулы (3.8) сразу следует формула (3.1), т.е. получено доказательство второй теоремы разложения в общем случае.

Теорема 3.5. *Если* $F(p)=\dfrac{F_1(p)}{F_2(p)}$ *– правильная несократимая дробь, и знаменатель имеет корни* $p_1, p_2, \ldots, p_l$, *то оригиналом служит функция*

$$f(t)=\sum_{k=1}^{l}\underset{p=p_k}{res}\left[F(p)\cdot e^{pt}\right].$$

Пример 9. Найти оригинал по изображению $F(p)=\dfrac{1}{(p-1)^2(p-2)}$.

Решение. Корни знаменателя: $p_1=1$ кратности $r_1=2$ и $p_2=-2$ кратности $r_2=1$. Обозначим

$$\Phi(p)=F(p)\cdot e^{pt}=\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}.$$

Тогда

$$f(t)=res\Phi(1)+res\Phi(-2).$$

По формуле (3.8)

$$res\Phi(1)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{p\to 1}\frac{d}{dp}\left[(p-1)^2\frac{e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}\right]=\lim_{p\to 1}\frac{(tp+2t-1)e^{pt}}{(p+2)^2}=\frac{1}{9}(3t-1)\cdot e^t$$

$$res\Phi(-2)=\lim_{p\to -2}\frac{(p+2)e^{pt}}{(p-1)^2(p+2)}=\frac{1}{9}e^{-2t},$$

следовательно, $f(t)=\dfrac{1}{3}te^t-\dfrac{1}{9}e^t+\dfrac{1}{9}e^{-2t}$.

§4. Приложения операционного исчисления

I. Решение линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами

Назовём основные этапы реализации операционного метода:

1) искомой функции $f(t)$ ставят в соответствие другую функцию $F(p)$ – изображение функции $f(t)$;
2) над функцией $F(p)$ проводят операции, соответствующие заданным операциям над функцией $f(t)$, и получают вспомогательное уравнение относительно $F(p)$;
3) последнее уравнение разрешают относительно функции $F(p)$, что обычно значительно проще, чем нахождение $f(t)$ из исходного уравнения;
4) по решению $F(p)$ вспомогательного уравнения находят функцию $f(t)$, которая является искомой.

Рассмотрим последовательное выполнение этих этапов.

Пусть дано неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$x''+a_1x'+a_2x = f(t) \qquad (4.1)$$

и требуется найти его частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0, \quad x'(0)=x'_0 \qquad (4.2)$$

Будем считать, что искомым решением является $x(t)$, причем его производные x', x'', а также функция $f(t)$ – оригиналы.

Введём в рассмотрение новые функции

$$X(p) \risingdotseq x(t),\ F(p) \risingdotseq f(t),$$

тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p)-x_0,\ x''(t) \risingdotseq p^2X(p)-px_0-x'_0.$$

Используя теорему линейности и единственности изображения, перейдём в уравнении (4.1) от оригиналов к изображениям

$$p^2X-px_0-x'_0+a_1[pX-x_0]+a_2X = F(p). \qquad (4.3)$$

Уравнение (4.3) называют вспомогательным или уравнением в изображениях, соответствующим дифференциальному уравнению (4.1) при начальных условиях (4.2). Таким образом, решение дифференциального уравнения относительно оригинала $x(t)$ сводится к решению линейного алгебраического уравнения относительно изображения $X(p)$:

$$X(p)=\frac{px_0+x'_0+a_1x_0+F(p)}{p^2+a_1p+a_2} \qquad (4.4)$$

Заметим, что, полагая $x(t), x'(t), x''(t)$ оригиналами, мы тем самым условились, что нас интересует решение уравнения (4.1) при $t\geq 0$. При решении конкретных задач получившееся решение часто оказывается справедливым и при $t<0$, но это требует дополнительной проверки.

Пример 1. Найти решение уравнения $x''-x'=2$, удовлетворяющего начальным условиям $x(0)=1, x'(0)=-1$.

Решение. Обозначим $X(p)\risingdotseq x(t)$ по правилу дифференцирования оригинала

$$x'(t)\risingdotseq pX-1,\ x''(t)\risingdotseq p^2X-p+1.$$

Тогда операторное уравнение выглядит следующим образом:

$$p^2X-p+1-pX+1=\frac{2}{p}$$

или
$$X\left(p^2-p\right)=\frac{2}{p}+p-2$$

Отсюда $X=\dfrac{-2(p-1)+p^2}{p^2(p-1)}=-\dfrac{2}{p^2}+\dfrac{1}{p-1}\risingdotseq -2t+e^t=x(t)$ при $t\geq 0$.

Пример 2. Найти решение уравнения $x''+4x'+4x=e^{-2t}(\cos t+2\sin t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0)=-1, x'(0)=1$.

Решение. Обозначим $x(t)\risingdotseq X(p)$, найдём $x'\risingdotseq pX+1$, $x''\risingdotseq p^2X+p-1$,

$\cos t+2\sin t\risingdotseq\dfrac{p}{p^2+1}+2\dfrac{1}{p^2+1}=\dfrac{p+2}{p^2+1}$, по теореме смещения

$$e^{-2t}(\cos t+2\sin t)\risingdotseq\frac{(p+2)+2}{(p+2)^2+1}.$$

Операторное уравнение имеет вид

$$p^2X+p-1+4[pX+1]+4X=\frac{p+4}{(p+2)^2+1}.$$

Отсюда

$$X=-\frac{p^3+7p^2+16p+11}{\left[(p+2)^2+1\right]\cdot(p+2)^2}=\frac{1}{(p+2)^2}-\frac{p+2}{(p+2)^2+1}-\frac{2}{(p+2)^2+1}\risingdotseq$$

$\risingdotseq t\cdot e^{-2t}-e^{-2t}\left(\cos t+2\sin t\right)$

Пример 3. Решить дифференциальное уравнение

$$x''+x=f(t),\ f(t)=\begin{cases}0,\ t<0\\ 1,\ 0\le t<\pi,\\ 0,\ t\ge\pi\end{cases}\quad x(0)=0,\ x'(0)=0.$$

Решение. В данном уравнении правая часть представляет собой кусочно-непрерывную функцию, заданную на разных участках различными аналитическими выражениями, поэтому $f(t)=\eta(t)-\eta(t-\pi)\risingdotseq\dfrac{1-e^{\pi p}}{p}$.

Операторное уравнение запишется в виде

$$p^2X+X=\frac{1-e^{-\pi p}}{p},\quad X=\frac{1-e^{-\pi p}}{p\left(p^2+1\right)}.$$

Для нахождения оригинала $x(t)$ заметим, что

$$\frac{1}{p\left(p^2+1\right)}=\frac{1}{p}-\frac{p}{p^2+1}\risingdotseq\left(1+\cos t\right)\cdot\eta\left(t\right).$$

Тогда по теореме запаздывания

$$\frac{e^{-\pi p}}{p\left(p^2+1\right)}\risingdotseq\left[1-\cos\left(t-\pi\right)\right]\cdot\eta\left(t-\pi\right).$$

Следовательно,

$$x\left(t\right)=\left(1-\cos t\right)\cdot\eta\left(t\right)-\left[1-\cos\left(t-\pi\right)\right]\cdot\eta\left(t-\pi\right).$$

При $t\in[0,\pi]$ $\quad x(t)=1-\cos t$,

при $t\ge\pi$ $\quad x(t)=1-\cos t-1+\cos(t-\pi)=-2\cos t$.

Таким образом, решение имеет различный вид для разных значений переменной t:

$$x\left(t\right)=\begin{cases}1-\cos t,\ 0\le t<\pi\\ -2\cos t,\ t\ge\pi\end{cases}.$$

II. Решение линейных дифференциальных уравнений n–го порядка с постоянными коэффициентами

Пусть дано уравнение

$$x^{(n)}+a_1x^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}x'+a_nx=f\left(t\right)\qquad(4.5)$$

и требуется решить задачу Коши, т.е. найти решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0)=x_0,\, x'(0)=x_0',\ldots,\, x^{(n-1)}(0)=x_0{}^{n-1}. \qquad (4.6)$$

Операторное уравнение запишем в виде

$$D(p)X(p)-N(p)=F(p),$$

где $X(p) \risingdotseq x(t)$, $F(p) \risingdotseq f(t)$, $D(p)=p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n$,

$N(p)=\left(p^{n-1}x_0+\ldots+x_0^{n-1}\right)+a_1\left(p^{n-2}x_0+\ldots+x_0^{n-2}\right)+\ldots+a_{n-1}x_0$.

Здесь многочлен $D(p)$ – характеристический полином уравнения (4.5), многочлен $N(p)$ степени $(n-1)$получен за счёт начальных условий (4.6). Решение операторного уравнения

$$X(p)=\frac{N(p)+F(p)}{D(p)}.$$

Обозначим $x_1(t) \risingdotseq \dfrac{N(p)}{D(p)}$, $x_2(t) \risingdotseq \dfrac{F(p)}{D(p)}$, тогда решение уравнения (4.5), удовлетворяет условиям (4.6):

$$x=x_1(t)+x_2(t).$$

Рассмотрим подробнее полученное решение. Пусть $f(t)\equiv 0$, тогда $F(p)\equiv 0$, и $x(t)=x_1(t)$, т.е. x_1– решение однородного уравнения (4.5) при начальных условиях (4.6). Если же $x_0=0, x_0'=0,\ldots, x_0^{(n-1)}=0$, т.е. начальные условия нулевые, то $N(p)\equiv 0$ и $x(t)=x_2(t)$. Следовательно, $x_2(t)$ – решение неоднородного уравнения (4.5) при нулевых начальных условиях.

Для линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами рациональная дробь $\dfrac{N(p)}{D(p)}$ всегда правильная, и соответствующий оригинал $x_1(t)$ может быть найден, например, по второй теореме разложения. Для нахождения оригинала $x_2(t)$ можно использовать теорему о свёртке. Покажем это. Рассмотрим сначала частный случай. Пусть $f(t)=\delta(t)$, дельта-функция или единичная импульсная функция, принято считать, что $\delta(t)=1$. Тогда обозначим $x_2(t) \risingdotseq \dfrac{1}{D(p)}=\Phi(p) \risingdotseq \varphi(t)$. Оригинал $\varphi(t)$ может быть всегда найден, так как $\Phi(p)$ – рациональная дробь.

Пусть теперь $f(t)$ произвольная функция-оригинал. Запишем

$$x_2(t) \risingdotseq \frac{1}{D(p)}\cdot F(p)=\Phi(p)\cdot F(p) \risingdotseq \varphi(t) * f(t).$$

Получили, что *решение неоднородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами при нулевых начальных условиях и правой части в виде любой функции оригинала* $f(t)$ *может быть выражено через свёртку двух функций: решения того же уравнения при нулевых начальных условиях, когда в правой части стоит дельта-функция, и функции* $f(t)$.

Пример 4. Найти решение уравнения

$$x''' + 6x'' + 11x' + 6x = 0, \quad x(0) = 5, x'(0) = 0, x''(0) = 0.$$

Решение. Операторное уравнение имеет вид

$$\left(p^3 + 6p^2 + 11p + 6\right)X - \left(5p^2 + 30p + 55\right) = 0,$$

отсюда
$$X(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{5\left(p^2 + 6p + 11\right)}{(p+1)(p+2)(p+3)}.$$

Воспользуемся формулой (3.1). Найдём

$$F_2'(p) = 3p^2 + 12p + 11,$$

тогда
$$\frac{F_1(-1)}{F_2'(-1)} = 15, \frac{F_1(-2)}{F_2'(-2)} = -15, \frac{F_1(-3)}{F_2'(-3)} = 5,$$

следовательно,

$$x(t) = \sum_{k=1}^{3} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k)} e^{p_k t} = 15e^{-t} - 15e^{-2t} + 5e^{-3t}.$$

Пример 5. Найти решение уравнения $x'' - x' = \dfrac{e^{2t}}{1+e^t}$ при $x(0) = 0, x'(0) = 0$.

Решение. Сначала найдём решение уравнения $y'' - y' = \eta(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$

Тогда операторное уравнение $\left(p^2 - p\right) Y(p) = 1$, откуда

$$Y(p) = \frac{1}{p(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \risingdotseq e^t - 1 = y(t)$$

Теперь для нахождения решения исходного уравнения при нулевых начальных условиях следует вычислить свёртку функций

$$x(t) = \frac{e^{2t}}{1+e^t} * \left(e^t - 1\right) = \int_0^t \frac{e^{2\tau}}{1+e^\tau}\left(e^{t-\tau} - 1\right) d\tau = \int_0^t \frac{\left(e^t - e^\tau\right) \cdot e^\tau}{1+e^\tau} d\tau =$$

$$=\int_0^t \frac{e^t+1-\left(1+e^\tau\right)}{1+e^\tau}de^\tau=\left(e^t+1\right)\ln\left(1+e^\tau\right)\Big|_0^t-e^\tau\Big|_0^t=\left(1+e^t\right)\ln\frac{1+e^t}{2}-e^t+1.$$

Пример 6. Найти решение уравнения $x''-x'-2x=4e^{3t}$, при $x(0)=0,\quad x'(0)=0$.

Решение. Решим вспомогательное уравнение $y''-y'-2x=1$ при нулевых начальных условиях:

$$\left(p^2-p-2\right)\cdot Y(p)=\frac{1}{p},\quad Y(p)=\frac{1}{p(p-2)(p+1)}.$$

Применяя вторую теорему разложения 3.3, найдём оригиналы

$$y(t)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t},\quad y'(t)=\frac{1}{3}e^{2t}-\frac{1}{3}e^{-t}.$$

Воспользуемся формулой Дюамеля

$$x(t)=\int_0^t f(\tau)\cdot y'(t-\tau)d\tau=\int_0^t 4e^{3\tau}\left(\frac{1}{3}e^{2(t-\tau)}-\frac{1}{3}e^{-(t-\tau)}\right)d\tau=$$

$$=\frac{4}{3}\left[e^{2t}\int_0^t e^\tau d\tau-e^{-t}\int_0^t e^{4\tau}d\tau\right]=\frac{4}{3}\left[e^{2t}\left(e^t-1\right)-e^{-t}\left(\frac{e^{4t}-1}{4}\right)\right]=e^{3t}-\frac{4}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}.$$

III. Решение системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Пусть дана система из n линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, содержащая n неизвестных функций $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$:

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}+a_{11}x_1+\ldots+a_{1n}x_n=f_1(t),\\ \dfrac{dx_2}{dt}+a_{21}x_1+\ldots+a_{2n}x_n=f_2(t),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \dfrac{dx_n}{dt}+a_{n1}x_1+\ldots+a_{nn}x_n=f_n(t)\end{cases}\tag{4.7}$$

Найдём решение задачи Коши для системы (4.7), удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(0)=x_{10},\ x_2(0)=x_{20},\ldots,x_n(0)=x_{n0}\tag{4.8}$$

Для этого будем полагать, что функции $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ и их первые производные, а также функции $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ являются оригиналами.

Обозначим

$$X_1(p) \risingdotseq x_1(t),\ X_2(p) \risingdotseq x_2(t),\ \ldots,\ X_n(p) \risingdotseq x_n(t),$$

$$F_1(p) \risingdotseq f_1(t),\ F_2(p) \risingdotseq f_2(t),\ \ldots,\ F_n(p) \risingdotseq f_n(t).$$

Учитывая правило дифференцирования оригинала и свойство линейности преобразования Лапласа, запишем операторный ряд системы (4.6)

$$\begin{cases} pX_1(p) - x_1(0) + a_{11}X_1(p) + a_{12}X_2(p) + \ldots + a_{1n}X_n(p) = F_1(p), \\ pX_2(p) - x_2(0) + a_{21}X_1(p) + a_{22}X_2(p) + \ldots + a_{2n}X_n(p) = F_2(p), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ pX_n(p) - x_n(0) + a_{n1}X_1(p) + a_{n2}X_2(p) + \ldots + a_{nn}X_n(p) = F_n(p) \end{cases}$$

или с учётом начальных условий (4.8):

$$\begin{cases} (a_{11} + p)X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = F_1(p) + x_{10} \\ a_{21}X_1 + (a_{22} + p)X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = F_2(p) + x_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}X_1 + a_{n2}X_2 + \ldots + (a_{nn} + p)X_n = F_n(p) + x_{n0} \end{cases} \qquad (4.9)$$

Система (4.9) является системой линейных алгебраических уравнений относительно $X_1(p), X_2(p), \ldots, X_n(p)$, и её решение можно найти, к примеру, по методу Крамера.

Далее, как и в случае одного дифференциального уравнения, следует представить каждое изображение в виде суммы изображений, оригиналы которых известны или могут быть составлены из известных на основе теорем смещения, запаздывания, подобия и др., и перейти затем от изображений к оригиналам.

Пример 7. Решить систему уравнений.

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} + 3x + y = e^{-t}, \quad x(0) = -1 \\ \dfrac{dy}{dt} - x + y = e^{-2t}, \quad y(0) = -2 \end{cases}$$

Решение. Обозначим $X(p) \risingdotseq x(t), Y(p) \risingdotseq y(t)$ и перейдём к изображениям

$$\begin{cases} pX+1+3X+Y=\dfrac{1}{p+1} \\ pY+2-X+Y=\dfrac{1}{p+2} \end{cases}$$

или

$$+\begin{cases} (p+3)X+Y=-\dfrac{p}{p+1} \\ -X+(p+1)Y=-\dfrac{2p+3}{p+2}\Bigg|_{\times(p+3)} \end{cases}\Bigg|^{\times[-(p+1)]}$$

Применим метод исключения, сначала умножим второе уравнение на $(p+3)$ и сложим с первым, имеем

$$Y\left(p^2+4p+4\right)=-\frac{2p^3+12p^2+20p+9}{(p+2)(p+1)},\quad Y=-\frac{2p^3+12p^2+20p+9}{(p+2)^3(p+1)}$$

затем умножим первое уравнение на выражение $-(p+1)$ и, складывая со вторым, получим

$$-X\left(p^2+4p+4\right)=\frac{p^2-3}{p+2},\quad X=-\frac{p^2-3}{(p+2)^3}$$

Разложение дробей на простейшие даёт

$$X(p)=-\frac{1}{p+2}+\frac{4}{(p+2)^2}-\frac{1}{(p+2)^3}$$

$$Y(p)=-\frac{3}{p+2}-\frac{3}{(p+2)^2}+\frac{1}{(p+2)^3}+\frac{1}{p+1}$$

После перехода к оригиналам имеем

$$x(t)=\left(-1+4t-\frac{1}{2}t^2\right)e^{-2t},$$

$$y(t)=\left(-3-3t+\frac{1}{2}t^2\right)e^{-2t}+e^{-t}.$$

IV. Решение уравнений в частных производных

Рассмотрим частный случай на примере уравнения теплопроводности.

Пусть дано уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\quad \left(0\le x\le l,\, t\ge 0\right) \tag{4.10}$$

и требуется найти решение $u(x,t)$, удовлетворяющее начальному условию $u(x,0)=f(x)$ и граничным условиям $u(0,t)=\varphi_1(t),\quad u(l,t)=\varphi_2(t)$.

Предположим, что $u(x,t)$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$, $\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, рассматриваемые как функции t, являются оригиналами.

Оригиналу $u(x,t)$ при значениях $t>0$ и $0\le x\le l$ соответствует изображение $U(x,p)=\int\limits_0^\infty u(x,t)\cdot e^{-pt}dt$. По правилу дифференцирования оригинала с учётом начального условия имеем

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \risingdotseq pU(x,p)-f(x).$$

Поскольку операции интегрирования и дифференцирования по переменной x при преобразовании Лапласа можно менять местами, то

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}=\int\limits_0^\infty \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}e^{-pt}dt=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^\infty u(x,t)\cdot e^{-pt}dt=\frac{\partial U(x,p)}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\int\limits_0^\infty \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\cdot e^{-pt}dt=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_0^{+\infty} u(x,t)\cdot e^{-pt}dt=\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2}$$

При сделанных допущениях и обозначениях уравнению (4.10) относительно оригинала $u(x,t)$ соответствует операторное уравнение

$$pU(x,p)-f(x)=a^2\frac{\partial^2 U(x,p)}{\partial x^2} \qquad (4.11)$$

Так как в данном уравнении p рассматривается как постоянная, то запишем уравнение (4.11) в виде:

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2}-\frac{p}{a^2}U(x,p)=-\frac{1}{a^2}f(x). \qquad (4.12)$$

Применяя изображение Лапласа к граничным условиям

$$u(0,t)=\varphi_1(t)\risingdotseq\Phi_1(p) \text{ и } u(l,t)=\varphi_2(t)\risingdotseq\Phi_2(p),$$

получим соответствующие граничные условия для уравнения (4.12)

$$U(0,p)=\Phi_1(p),\quad U(l,p)=\Phi_2(p). \qquad (4.13)$$

Таким образом, решение уравнения в частных производных (4.10) с начальным и граничными условиями свелось к решению обыкновенного дифференциального уравнения (4.12) при граничных условиях (4.13).

Найдя решение $U(x,p)$ уравнения (4.12) при выполнении условий (4.13) и перейдя от изображения к оригиналу, получим решение исходной задачи.

Пример 8. Найти решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальному условию $u(x,0) = A\sin\frac{n\pi x}{l}$ и граничным условиям $u(0,t) = 0, u(l,t) = 0$.

Решение. Обозначим $u(x,t) \risingdotseq U(x,p)$, тогда

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = pU(x,p) - A\sin\frac{n\pi x}{l}, \quad \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U(x,p)}{dx^2}.$$

Уравнение в пространстве изображений, соответствующее исходному уравнению и начальному условию, имеет вид

$$\frac{d^2U(x,p)}{dx^2} - \frac{p}{a^2}U(x,p) = -\frac{A}{a^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Граничные условия для полученного уравнения в изображениях имеют вид $u(0,t) = U(0,p)$, $u(l,t) = U(l,p)$, следовательно, $U(0,p) = 0, U(l,p) = 0$.

Решим неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами методом подбора частного решения.

Характеристическое уравнение $k^2 - \frac{p}{a^2} = 0$ имеет корни $k_1 = \frac{\sqrt{p}}{a}$, $k_2 = -\frac{\sqrt{p}}{a}$. Следовательно, общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид:

$$\overline{U}(x,p) = C_1 \cdot e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x} + C_2 \cdot e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

Частное решение неоднородного уравнения подберём в виде

$$\overset{*}{U} = A\cos\frac{n\pi x}{l} + B\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Подставляя это решение в неоднородное уравнение, имеем

$$-B\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\cos\frac{n\pi x}{l}-C\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{p}{a^2}B\cos\frac{n\pi x}{l}-\frac{p}{a^2}C\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{A}{a^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Приравнивая коэффициенты при $\cos\frac{n\pi x}{l}$ и $\sin\frac{n\pi x}{l}$ в обеих частях полученного равенства, находим $B=0,\quad C=\dfrac{A}{p+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}$.

Таким образом,

$$U(x,p)=C_1e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+C_2e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+\frac{A}{p+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

Используем граничные условия: $U(0,p)=U(l,p)=0$, чтобы определить произвольные постоянные C_1 и C_2:

$$\begin{cases}0=C_1+C_2\\ 0=C_1e^{\frac{\sqrt{p}}{a}l}+C_2e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}l}\end{cases}$$

Отсюда $C_1=0, C_2=0$ и

$$U(x,p)=\frac{A}{p+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Оригиналом для функции $U(x,p)$ является функция

$$u(x,t)=A\cdot e^{-\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2t}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Таблица оригиналов и изображений

№	f(t)	$F(p)$	№	f(t)	$F(p)$
1	$\eta(t)$	$\frac{1}{p}$	13	$t^{n-1}e^{\alpha t}$	$\frac{(n-1)!}{(p-\alpha)^n}$
2	t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$	14	$\cos^2\beta t$	$\frac{p^2+2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$
3	$e^{\alpha t}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	15	$\sin^2\beta t$	$\frac{2\beta^2}{p(p^2+4\beta^2)}$
4	$\cos\beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	16	$\frac{1}{\alpha}\left(e^{\alpha t}-1\right)$	$\frac{1}{p(p-\alpha)}$
5	$\sin\beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	17	$1-e^{-\frac{t}{\alpha}}$	$\frac{1}{p(1+\alpha p)}$
6	$ch\,\beta t$	$\frac{p}{p^2-\beta^2}$	18	$\sqrt{t}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}}$
7	$sh\,\beta t$	$\frac{\beta}{p^2-\beta^2}$	19	$\frac{e^{\alpha t}}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p-\alpha}}$
8	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	$\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{p}}$	20	$-\ln t-C$	$\frac{\ln p}{p}$
9	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	21	$\frac{\ln t}{\sqrt{t}}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{p}}\cdot(\ln 4p+C)$
10	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2+\beta^2}$	22	$\frac{e^{\beta t}-e^{\alpha t}}{t}$	$\ln\left\vert\frac{p-\alpha}{p-\beta}\right\vert$
11	$e^{\alpha t}ch\beta t$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$	23	$\frac{\sin\alpha t}{t}$	$arctg\,\frac{\alpha}{p}$
12	$e^{\alpha t}sh\beta t$	$\frac{\beta}{(p-\alpha)^2-\beta^2}$	24	$\frac{sh\alpha t}{t}$	$\frac{1}{2}\ln\left\vert\frac{p+\alpha}{p-\alpha}\right\vert$

§ 5. Преобразование Фурье

Пусть $f(x)$ – непериодическая функция, определенная на R и удовлетворяющая условиям Дирихле на любом конечном промежутке. Кроме того, будем предполагать, что несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|f(x)|dx$ сходится. на промежутке $[-l,l]$ ряд Фурье функции $f(x)$:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\omega_n x+b_n\sin\omega_n x\right), \qquad (5.1)$$

где $\omega_n=\dfrac{n\pi}{l}$, $a_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cdot\cos\omega_n tdt$, $b_n=\dfrac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\cdot\sin\omega_n tdt$.

Подставляя выражения для a_n и b_n в ряд Фурье, получим

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\omega_n t\cos\omega_n x+\sin\omega_n t\sin\omega_n x\right)dt\ .$$

Обозначим разность частот $\omega_{n+1}-\omega_n=\dfrac{\pi}{l}$ через $\Delta\omega$. Тогда ряд запишется

$$\frac{1}{2l}\int\limits_{-l}^{l}f(t)dt+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\Delta\omega\int\limits_{-l}^{l}f(t)\left(\cos\omega_n t\cos\omega_n x+\sin\omega_n t\sin\omega_n x\right)dt \qquad (5.2)$$

Устремим $l\to\infty$ тогда предел (5.2) равен (обозначим $J(x)$)

$$J(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)[\cos\omega t\cos\omega x+\sin\omega t\sin\omega x]dt \quad\Rightarrow$$

$$J(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cos\omega tdt\right)\cos\omega x+\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(t)\sin\omega tdt\right)\sin\omega x\right]d\omega$$

или
$$J(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x\right]d\omega, \qquad (5.3)$$

Интеграл (5.3) называется ***интегралом Фурье***. Справедлива следующая теорема

ТЕОРЕМА 5.1. *Пусть функция* $f(x)$ *удовлетворяет условиям:*

1) удовлетворяет условиям Дирихле на любом конечном промежутке.

2) определена и абсолютно интегрируема на всей числовой оси;

Тогда функция $f(x)$ *представима своим интегралом Фурье, т.е. ее интеграл Фурье* $J(x)$ *сходится в каждой точке* x *и справедливо равенство*

$$J(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x-\text{точка непрерывности } f(x), \\ \dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}, & \text{если } x-\text{точка разрыва функции } f(x). \end{cases}$$

Чаще используется комплексная форма интеграла (5.3).

По формулам Эйлера

$$A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x=A(\omega)\frac{e^{i\omega x}+e^{-i\omega x}}{2}+B(\omega)\frac{e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}}{2i}=$$

$$=\frac{A(\omega)-iB(\omega)}{2}e^{i\omega x}+\frac{A(\omega)+iB(\omega)}{2}e^{-i\omega x}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(C(\omega)e^{i\omega x}+C(-\omega)e^{-i\omega x}\right).$$

Запишем получившийся интеграл в виде суммы двух интегралов и во втором сделаем замену $t=-\omega$. Получим:

$$J(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{-\infty}C(t)e^{itx}dt=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}C(t)e^{itx}dt.$$

Переходя от промежутка интегрирования (0,∞) к (-∞,∞) $J(x)$ перепишется в виде

$$J(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad (5.4)$$

где

$$C(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad (5.5)$$

Определение. Функция (5.5) называется *преобразованием Фурье* (*Фурье-образом*) функции *f(x)*. Используется обозначение $\mathcal{F}$ [*f(x)*] =*C(w)*.

$\mathcal{F}$ – оператор Фурье.

Формула (5.4) позволяет делать обратный переход: $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega$, т.е, по спектральной функции *C(w)* можно восстановить исходную функцию $f(x)$.

Величина $|C(w)|$ называется *амплитудным спектром,* $-\arg C(w)$ – *фазовым спектром*.

(5.4) и (5.5) являются формулами симметричной формы преобразования Фурье. Симметричность возникает за счет формирования коэффициентов $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ в обеих формулах (5.4) и (5.5). Если в (5.3) коэффициент $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ не выносить перед интегралом, а оставить его внутри *A(w)* и *B(w)*, для преобразования Фурье получим вид $C(w)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$, а для обратного преобразования $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega$. С другой стороны, в (5.3) можно вынести за знак интеграла коэффициент $\frac{1}{\pi}$. Тогда обратное и прямое преобразования Фурье будут иметь вид

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega \qquad (5.4^*)$$

$$C(w)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \qquad (5.5^*)$$

Замечание: периодическая функция, определенная на $(-l,l)$ и периодически продолженная, имеет дискретный спектр (ряд Фурье); непериодическая функция, определенная на $(-\infty,\infty)$ имеет непрерывный спектр.

Физически это означает, что исследуемый процесс нельзя построить из гармонических колебаний только с определенными изолированными частотами $w_n=\dfrac{n\pi}{l}$, для описания процесса нужны гармонические колебания всех частот.

Связь между преобразованием Лапласа и Фурье.

1. Рассмотрим функцию $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ f(t), & t\geq 0.\end{cases}$ Тогда, согласно (5.5*)

$$C(w)=\int_{0}^{+\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx \ (*).$$

Если в интеграле Лапласа $F(p)=\int_{0}^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$ (**) положить $p=iw$, т.е. считать комплексную переменную p чисто мнимой, то правые части выражений в точности совпадают. Кроме того, совпадают первые два условия существования изображений по Лапласу (опр.5.1) и по Фурье (теорема 5.1):

1) $f(t)$ и $f'(t)$ или всюду непрерывны, или имеют на любом конечном промежутке лишь конечное число точек разрыва первого рода;

2) $f(t)$=0 для всех точек $t<0$;

Однако, третье условие для преобразования Лапласа: $|f(t)| \le Me^{s_0 t}$, а для преобразования Фурье: абсолютная интегрируемость функции $f(t)$ на всей числовой оси. Очевидно, третье условие для преобразования Фурье сильнее. Это приводит к тому, что ряд функций, имеющих изображения по Лапласу не имеют Фурье образов.

Пример. Проверить, является ли функция оригиналом по Лапласу и по Фурье?

а) $f(t) = \eta(t)$

проверяем третье условие.

L: $|1| \le 1e^{0t}$; $s_0 = 0$, $F(p) = \dfrac{1}{p}$ ДА $\mathscr{F}$: $\int\limits_0^\infty 1dt = \infty$ НЕТ

б) $f(t) = t \cdot \eta(t)$

L: $|t| \le |e^{\ln t}| \le 1 \cdot e^{1 \cdot t}$; $s_0 = 1$, $F(p) = \dfrac{1}{p^2}$ ДА $\mathscr{F}$: $\int\limits_0^\infty tdt = \infty$ НЕТ

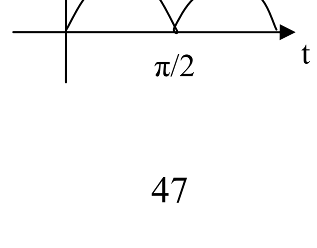
в) $f(t) = \sin t \cdot \eta(t)$

L: $|\sin t| \le |1|$; $s_0 = 0$, $F(p) = \dfrac{1}{p^2+1}$ ДА $\mathscr{F}$: $\int\limits_0^\infty |\sin t|\, dt = \infty$ НЕТ

г) $f(t) = \cos t \cdot \eta(t)$

L: $|\cos t| \le |1|$; $s_0 = 0$, $F(p) = \dfrac{p}{p^2+1}$ ДА $\mathscr{F}$: $\int\limits_0^\infty |\cos t|\, dt = \infty$ НЕТ

Геометрически:



Для обратного перехода преобразования Лапласа имеем

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}F(p)\cdot e^{pt}dp \quad (2.3).$$

Положив $s=0,\ p=iw,\ dp=idw$ получим $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}F(iw)e^{iwt}dw$ – совпадает с (5.4*). Различие в подынтегральной функции $F(iw)$ (вместо $F(w)$) объясняется тем, что для точного соответствия обозначений преобразование Фурье следовало бы писать в виде $F(iw)$, считая в интеграле Лапласа p чисто мнимой величиной. Часто так и делают.

Таким образом, если оригинал $f(t)$ при преобразовании Лапласа дополнительно удовлетворяет условию преобразования Фурье (Т. 5.1.) – абсолютной интегрируемости $f(t)$, то для него существует и преобразование Фурье, и все свойства преобразования Фурье получаются из свойств преобразования Лапласа.

Свойства Фурье-преобразования.

Если $F(w)\overset{\mathcal{F}}{\leftarrow}f(t)$ и $G(w)\overset{\mathcal{F}}{\leftarrow}g(t)$, то

1. $af(t)+bg(t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}a\,F(w)+b\,G(w)$
2. $f(\alpha t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}\frac{1}{\alpha}F\left(\frac{w}{\alpha}\right)$ (α≠0)
3. $f(t+c)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}e^{-icw}F(w)$
4. $e^{ict}f(t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}F(w+c)$
5. $(it)^n f(t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}F^{(n)}(w)$
6. $f^{(n)}(t)\overset{\mathcal{F}}{\rightarrow}(-iw)^n F(w)$

7. $f(t)*g(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)\cdot G(w)$

8. $f(t)\cdot g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(w)*G(w)$

9. $\overline{f(t)} \xrightarrow{\mathcal{F}} \overline{F(-w)}$

Синус- и косинус - преобразования.

Так как интеграл (5.4) получен как предельный переход суммы Фурье, то для преобразований Фурье будут справедливы свойства ряда Фурье для четных и нечетных функций. Это удобно, когда изучаемый процесс ограничен полупрямой $(0,+\infty)$. Тогда рассматривают пару преобразований:

$$F_c(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\cos wt\,dt \quad \text{− косинус преобразование} \qquad (5.6)$$

обратно: $f(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_c(w)\cos wt\,dw$

$$F_s(w)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^{\infty} f(t)\sin wt\,dt \quad \text{− синус преобразование} \qquad (5.6^*)$$

обратно: $f(t)=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F_s(w)\sin wt\,dw$.

Пример. $f(t)=\begin{cases} e^{-\alpha t}, & t\ge 0 \\ 0, & t<0 \end{cases}$

$L[f(t)]=\dfrac{1}{p+\alpha}$. Заменяем $p=iw$, $\mathcal{F}[f(t)]=\dfrac{1}{iw+\alpha}$.

То же самое получим по определению:

$$F(w)=\int_0^{\infty} e^{-iwt}e^{-\alpha t}dt=\left.\frac{e^{-(\alpha+iw)t}}{-(\alpha+iw)}\right|_0^{\infty}=\frac{1}{\alpha+iw}.$$

Амплитудный спектр $|F(w)|=\dfrac{1}{\sqrt{w^2+\alpha^2}}$, фазовый спектр

$\psi(w)=-\arg F(w)=arctg\dfrac{w}{\alpha}$.

Пример. $f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ 1, & 0\le t\le \tau\\ 0, & t>\tau\end{cases}$ – импульс, длящийся время τ.

$$f(t)=\eta(t)-\eta(t-\tau)$$

$$L[f(t)]=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}e^{-\tau p}=\frac{1}{p}(1-e^{-\tau p})$$

$\mathcal{F}[f(t)]=\dfrac{1}{iw}(1-e^{-iw\tau})=\dfrac{2e^{-iw\tau}}{w}\cdot\dfrac{e^{\frac{iw\tau}{2}}-e^{-\frac{iw\tau}{2}}}{2i}=\dfrac{2\sin\frac{w\tau}{2}}{w}e^{-\frac{iw\tau}{2}}$. Такая форма записи позволяет легко записать амплитудный и фазовый спектр:

$$|F(w)|=2\left|\frac{\sin\frac{w\tau}{2}}{w}\right| \text{ и } \psi(w)=\frac{w\tau}{2}$$

§ 6. Дискретные преобразования

Z – преобразование

Пусть дана последовательность действительных или комплексных чисел

$$a_0,a_1,a_2,...,a_n,...=\{a_n\}$$

Определение 6.1. Z − преобразованием последовательности $\{a_n\}$ называется функция комплексного переменного $F(z)$, определенная рядом

$$F(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots + \frac{a_n}{z^n} + \ldots \qquad (6.1)$$

Обозначают $\mathscr{L}[\{a_n\}]$.

Если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию

$$|a_n| \le Me^{\alpha n} \qquad (6.2)$$

то ряд (6.1) сходится при $|z| > R$, где $R = e^{\alpha}$. Действительно, ряд 6.1 мажорируется геометрической прогрессией $\left|\frac{a_n}{z^n}\right| \le M\left(\frac{e^{\alpha}}{|z|}\right)^n$, которая сходится, если $|z| > e^{\alpha}$. Т.о., функция $F(z)$ − аналитическая при $|z| > R$, а разложение (6.1) – ее ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки. Ясно, что z= ∞ – правильная точка ($F(z)$ – ограничена) и $F(\infty) = a_0$.

Пример. $\{a_n\} = 1, b, b^2, \ldots, b^n, \ldots \Rightarrow a_n = b^n = e^{n\ln b}$ $(b \ne 0)$. Так как $|a_n| = |b^n| = |b|^n = e^{n\ln|b|}$ $(\alpha = \ln|b|)$, то согласно (6.2) ряд 6.1. сходится для $|z| > |b|$.

Z – преобразование: $F(z) = 1 + \frac{b}{z} + \frac{b^2}{z^2} + \ldots + \frac{b^n}{z^n} + \ldots = \frac{1}{1 - \frac{b}{z}} = \frac{z}{z - b}$ (6.3)

Правило. Если Z – преобразование некоторой последовательности $\{a_n\}$ является заданной функцией $F(z)$, аналитической в бесконечности, то, чтобы найти саму последовательность $\{a_n\}$ т.е. найти обратное Z –

преобразование, нужно разложить функцию $F(z)$ в ряд Лорана в окрестности z = ∞; этот ряд будет содержать только правильную часть. Коэффициенты ряда будут составлять искомую последовательность.

Для нахождения $\{a_n\}$ можно использовать полученную для вычисления коэффициентов ряда Лорана формулу: $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C F(z)\, z^{n-1} dz$

(Сравнить с формулой ФКП (8.6) $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C'} \frac{f(t)dt}{(t-a)^{n+1}}$. a_n обозначалась c_{-n}, C – любой замкнутый контур достаточно большого радиуса, окружающий все особые точки).

D − преобразование Лапласа

Введем новую переменную в (6.3) $z = e^q$ и обозначим $F(z) = F(q)$. Тогда получим ряд

$$F(q) = a_0 + a_1 e^{-q} + a_2 e^{-2q} + \ldots + a_n e^{-nq} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-nq}$$

Функция $F(q)$ называется дискретным преобразованием Лапласа (D − преобразование) последовательности $\{a_n\}$. Но последовательность − это функция целочисленного аргумента $a_n = f(n)$.

Определение 6.2. Рассмотрим функцию *f(t)* действительного аргумента *t*, определенную для $t \ge 0$. Будем предавать переменной *t* только целые значения. Тогда получим последовательность $\{f(n)\}$. Последовательность $\{f(n)\}$ называется ***решетчатой*** функцией. Обозначают просто $f(n)$.

Таким образом, всякая функция $f(t)$, являющаяся оригиналом для обычного преобразования Лапласа, «порождает» решетчатую функцию $f(n)$, для которой определено дискретное преобразование Лапласа

$$F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq} \qquad (6.4)$$

Записывают: $f(n) \risingdotseq F(q)$

По аналогии с оригиналом $f(t)$, функция $f(n)$ определена для n = 0,1,2,… и равна нулю для $n = -1, -2, \ldots$

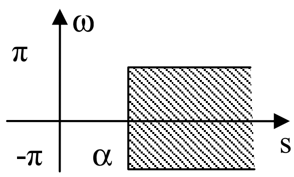
О сходимости ряда

а) так как $z = e^q = e^{q+2\pi ki}$, то $F(q)$ − периодическая с мнимым периодом $2\pi i$.

б) из сходимости z – преобразования: $|z| > e^{\alpha} \;\Rightarrow\; |z| = \left|e^q\right| = \left|e^{s+iw}\right| > \left|e^{\alpha}\right|$

$\Rightarrow F(q)$ аналитична в полуплоскости $s > \alpha$

Из а) и б) $\Rightarrow$ $F(q)$ аналитична в полуполосе



$$\begin{cases} -\pi < w < \pi \\ s > \alpha \end{cases}$$

Пример. $f(n) = 1 = \eta(n)$

а) Воспользуемся предыдущим примером $\mathscr{L}[\{b^n\}] = \dfrac{z}{z-b}$. Положим b=1 и используем связь D – преобразования с Z – преобразованием ($z = e^q$) $\Rightarrow . F(q) = \dfrac{e^q}{e^q - 1}$

б) Найдем изображение функции по определению. $F(q) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) e^{-nq} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 e^{-nq} = \dfrac{1}{1-e^{-q}} = \dfrac{e^q}{e^q - 1}$

Пример. $f(n) = e^{\alpha n}$. Воспользуемся

$$\mathscr{L}[\{b^n\}]=\frac{z}{z-b}=\left|\begin{matrix} z=e^q \\ b=e^{\alpha} \end{matrix}\right|=\frac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}\Rightarrow F(q)=\frac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}.$$

Свойства дискретного преобразования Лапласа

Пусть решетчатым функциям $f(n)$ и $g(n)$ соответствуют изображения $F(q)$ и $G(q)$, т.е. $f(n) \doteqdot F(q)$ и $g(n) \doteqdot G(q)$.

1. Свойство линейности

   $af(n)+bg(n) \doteqdot aF(q)+bG(q)$.

Доказательство – из определения.

2. Свойство затухания (смещение в аргументе изображения)

   $$e^{\alpha n}f(n) \doteqdot F(q-\alpha) \qquad (6.5)$$

Доказательство – из определения.

3. Свойство запаздывания и опережения (смещение в аргументе оригинала)

   $$f(n-k) \doteqdot e^{-qk}F(q) \qquad (6.6)$$

   $$f(n+k) \doteqdot e^{qk}\left[F(q)-\sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-qm}\right] \qquad (6.6^*)$$

Доказательство.

(6.6): по определению $f(n-k) \doteqdot \sum\limits_{n=k}^{\infty} f(n-k)e^{-nq} = |n-k=m| =$

$$=\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-q(m+k)}=e^{-qk}\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-qm}=e^{-qk}F(q).$$

(6.6*): по определению:

$$f(n+k) \doteqdot \sum_{n=0}^{\infty} f(n+k)e^{-nq} = |n+k=m| = \sum_{m=k}^{\infty} f(m)e^{-q(m-k)}=$$

$$e^{-qk}\left[\sum_{m=0}^{\infty} f(m)e^{-qm}-\sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-qm}\right]=e^{qk}\left[F(q)-\sum_{m=0}^{k-1} f(m)e^{-qm}\right].$$

Пример. Найти изображение решетчатой функции $f(n)=\eta(n-k)$.

Известно: $\eta(n) \doteqdot \dfrac{e^q}{e^q-1}$. По свойству (6.6)

$$\eta(n-k) \doteqdot e^{-qk}\frac{e^q}{e^q-1}=\frac{1}{(e^q-1)e^{q(k-1)}}$$

4. Свойство дифференцирования изображения

$$-nf(n) \doteqdot F'(q)$$

в общем случае: $(-n)^k f(n) \doteqdot F^{(k)}(q)$ (6.7)

(Доказательство из возможности почленного дифференцирования ряда) САМОСТОЯТЕЛЬНО

Пример. $\eta(n) \doteqdot \dfrac{e^q}{e^q-1}$, $n \doteqdot -\left(\dfrac{e^q}{e^q-1}\right)'=\dfrac{e^q}{(e^q-1)^2}$,

$$n^2 \doteqdot -\left(\frac{e^q}{(e^q-1)^2}\right)'=\frac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}\dots$$

5. Свойство интегрирования изображения

Пусть $f(0)=0$ и $\left.\dfrac{f(n)}{n}\right|_{n=0}=0$, тогда $\dfrac{f(n)}{n} \doteqdot \displaystyle\int_q^\infty F(q)\,dq$ (6.8)

Доказательство.

Рассмотрим $\displaystyle\int_q^\infty F(q)\,dq=\int_q^\infty \sum_{n=0}^\infty f(n)e^{-qn}\,dq=\sum_{n=0}^\infty f(n)\int_q^\infty e^{-qn}\,dq=$

$$=\sum_{n=0}^\infty \frac{f(n)}{n}e^{-qn} \doteqdot \frac{f(n)}{n}.$$

В общем случае, если выполняется $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t^k}=0$, то

$$\frac{f(n)}{n^k} \risingdotseq \underbrace{\int_q^\infty \dots \int_q^\infty}_{k \text{ раз}} F(q)\, dq \dots dq$$

Пример. Найти изображение решетчатой функции $f(n) = \frac{\eta(n-1)}{n}$.

$$\eta(n) \risingdotseq \frac{e^q}{e^q - 1},\ \eta(n-1) \risingdotseq e^{-q}\frac{e^q}{e^q - 1} = \frac{1}{e^q - 1} \Rightarrow$$

$$\frac{\eta(n-1)}{n} = \int_q^\infty \frac{dq}{e^q - 1} = \int_q^\infty \frac{de^q}{e^q(e^q - 1)} = \ln\frac{e^q}{e^q - 1}.$$

6. Дифференцирование по параметру.

Если $f(n,x) \risingdotseq F(q,x)$, то $\frac{\partial f(n,x)}{\partial x} \risingdotseq \frac{\partial F(q,x)}{\partial x}$ (6.9)

7. Интегрирование по параметру.

Если $f(n,x) \risingdotseq F(q,x)$, то $\int_{x_0}^{x} f(n,x)dx \risingdotseq \int_{x_0}^{x} F(q,x)dx$ (6.10)

Конечные разности

Пусть $f(t)$ – заданная функция, $\Delta t{=}h$ – фиксированное приращение (шаг) независимого переменного t.

Определение 6.3. Первой разностью, или разностью первого порядка называется выражение

$$\Delta f(t) = f(t+h) - f(t) \qquad (6.11)$$

Разностью второго порядка называется выражение

$$\Delta^2 f(t) = \Delta(\Delta f(t)) = \Delta f(t+h) - \Delta f(t) = f(t+2h) - f(t+h) - f(t+h) + f(t) \Rightarrow$$

$$\Delta^2 f(t) = f(t+2h) - 2f(t+h) + f(t)) \qquad (6.11^*)$$

– –

$$\Delta^k f(t) = \Delta(\Delta^{k-1} f(t)) = \Delta^{k-1} f(t+h) - \Delta^{k-1} f(t) = f(t+kh) - C_k^1 f(t+(k-1)h) + \dots + (-1)^k f(t)$$

– все последующие разности выражаются через $f(t+kh)$, C_k^r - биномиальные коэфф.

Конечные разности для решетчатой $f(n)$ функции будут считаться с шагом h=1.

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n).$$

Очевидно, если $f(n) = an$, то $\Delta f(n) = a$, $\Delta^2 f(n) = \Delta^3 f(n) = ... = 0$.

Если $f(n) = n^2$, то

$$\Delta f(n) = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1,\ \Delta^2 f(n) = 2(n+1)+1-2n-1 = 2.\ \Delta^3 f(n) = \Delta^4 = ... = 0.$$

т. е. последовательные разности функции $f(n) = n^k$ являются многочленами понижающихся степеней, и $\Delta^k f(n) = k!$

Пример. Найти разности функции $f(n) = e^{\alpha n}$ до k-го порядка.

$$\Delta f(n) = e^{\alpha(n+1)} - e^{\alpha n} = e^{\alpha n}(e^{\alpha} - 1);$$

$$\Delta^2 f(n) = e^{\alpha(n+2)} - 2e^{\alpha(n+1)} + e^{\alpha n} = e^{\alpha n}(e^{2\alpha} - 2e^{\alpha} + 1) = e^{\alpha n}(e^{\alpha} - 1)^2;$$

– –

$$\Delta^k f(n) = e^{\alpha n}(e^{\alpha} - 1)^k.$$

Для решетчатой функции $f(n)$ конечные разности играют роль, аналогичную той, которую играют производные для непрерывной функции. Это свойство отражается и на D-преобразовании конечных разностей. Формально это свойство аналогично свойству дифференцирования оригинала для обычного преобразования Лапласа.

8. Изображение разностей решетчатой функции.

Если $f(n) \doteqdot F(q)$, то

$$\Delta f(n) \doteqdot (e^q - 1)F(q) - e^q f(0) \qquad (6.12)$$

Доказательство.

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n) \doteqdot e^q\left[F(q) - f(0)\right] - F(q) = (e^q - 1)F(q) - e^q f(0).$$

Аналогично продолжая, получим:

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq$$
$$(e^q-1)^k F(q) - e^q\left[(e^q-1)^{k-1} f(0) + (e^q-1)^{k-2}\Delta f(0) + \ldots + (e^q-1)\Delta^{k-2} f(0) + \Delta^{k-1} f(0)\right]$$

Если $f(0)=\Delta f(0)=\Delta^2 f(0)=\ldots=\Delta^{k-1} f(0)=0$, то последнее выражение значительно упрощается:

$$\Delta^k f(n) \risingdotseq (e^q-1)^k F(q) \qquad (6.12^*)$$

Обратной операцией к образованию первой разности является операция суммирования (аналогия: дифференцирование – обратно – интегрирование).

Определение 6.4. Суммой решетчатой функции $f(n)$ называется решетчатая функция $g(n)$, определенная следующим образом:

$$g(0)=0,\ g(n)=\sum_{k=0}^{n-1} f(k)\ \ (n=1,2,\ldots) \qquad (6.13)$$

Подробно:

$$g(1)=f(0),$$
$$g(2)=f(0)+f(1),$$
$$g(3)=f(0)+f(1)+f(2)=g(2)+f(2).$$

Очевидно, исходная функция $f(n)$ служит для $g(n)$ первой разностью:

$$\Delta g(n)=g(n+1)-g(n)=f(n).$$

9. Изображение суммы решетчатой функции

Если $f(n) \risingdotseq F(q)$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \risingdotseq \frac{F(q)}{e^q-1} \qquad (6.14)$$

Доказательство. Обозначим сумму решетчатой функции

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) = g(n) \risingdotseq G(q).$$

Так как $\Delta g(n) = f(n)$, то $\Delta g(n) = F(q)$. По свойству 8, формула (6.12*)

$$\Delta g(n) \risingdotseq (e^q - 1)G(q) \;\; (g(0) = 0) \Rightarrow$$

$$F(q) = (e^q - 1)G(q) \;\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} f(k) \risingdotseq G(q) = \frac{F(q)}{e^q - 1}.$$ ч.т.д.

Определение 6.5. Сверткой решетчатых функций $f(n)$ и $g(n)$ называется

$$f(n) * g(n) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)g(k) \qquad (6.15)$$

Замечание $f(n) * g(n) = g(n) * f(n)$.

10. Теорема умножения изображений.

Произведению изображений соответствует свертка оригиналов

$$f(n) * g(n) \risingdotseq F(q)\,G(q) \qquad (6.16)$$

Доказательство. По определению изображения

$$G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)e^{-kq}.$$

Домножим обе стороны равенства на $F(q)$:

$$F(q)\,G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kq} F(q) g(k).$$

По свойству запаздывания $e^{-kq}F(q) \risingdotseq f(n-k)$, тогда

$$F(q)\,G(q) = \sum_{k=0}^{\infty} f(n-k)g(k).$$

Так как $f(n-k) = 0$ *при* $k > n$ то

$$F(q)\,G(q) = \sum_{k=0}^{n} f(n-k)g(k).$$

Пример. Найти оригинал функции $F(q) = \dfrac{e^{2q}}{(e^q - 1)(e^q - e)}$.

Решение. $\dfrac{e^{2q}}{(e^q-1)(e^q-e)}=\dfrac{e^q}{(e^q-1)}\cdot\dfrac{e^q}{(e^q-e)}\risingdotseq\eta(n)*e^n=\sum_{k=0}^{\infty}1\cdot e^n=\dfrac{1-e^n}{1-e}$

Определение 4.6. Сверткой изображений называется функция

$$F(n)*G(n)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\pi}^{\gamma+i\pi}F(s)\cdot G(q-s)ds.$$

Предполагается, что функции $F(n)$ и $G(n)$ аналитичны в полуплоскости $\mathrm{Re}\,q>\alpha$ и $\gamma>\alpha$. Тогда свертка аналитична в полуплоскости $\mathrm{Re}\,q>\alpha+\gamma$. В этой полуплоскости $\mathrm{Re}(q-s)>\alpha$, когда точка s находится на отрезке интегрирования $[\gamma-i\pi,\gamma+i\pi]$, и поэтому обе функции, стоящие под знаком интеграла – аналитические.

Замечание $F(n)*G(n)=G(n)*F(n)$.

11. Теорема умножения оригиналов.

$$f(n)\ g(n)\risingdotseq F(q)*G(q)$$

Предельные значения оригинала и изображения.

Между значениями решетчатой функции-оригинала и ее изображения в нуле и на бесконечности имеют место соотношения, подобные установленным для обычного преобразования Лапласа (замечание 1.2).

Поскольку функция $F(z)$, являющаяся Z-преобразованием последовательности $f(n)$, аналитична в бесконечности и $\lim\limits_{z\to\infty}F(z)=a_0=f(0)$, то и

$$\lim_{q\to\infty}F(q)=f(0)\ (\text{т.к. } z=e^q) \qquad (6.17)$$

Рассмотрим изображение первой разности:

$$\Delta f(n)=\varphi(n)\risingdotseq\Phi(q)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nq}\varphi(n).$$

Пусть $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\varphi(n)$ сходится, тогда при $q=0$

$$\Phi(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) \ \ (*).$$

Если существует предел $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = f(\infty)$, то можно записать

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \Delta f(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[f(n+1) - f(n) \right] = f(\infty) - f(0)$$

$\Rightarrow$ для (*) запишем $\qquad \Phi(0) = f(\infty) - f(0) \qquad$ (**)

Если $f(n) \doteqdot F(q)$, то

$$\Delta f(n) = \varphi(n) \doteqdot (e^q - 1)F(q) - f(0)e^q = \Phi(q). \qquad (***)$$

Переходя к пределу

$$\lim_{q \to 0} (e^q - 1)F(q) = \lim_{q \to 0} \left[\Phi(q) + f(0)e^q \right] = f(\infty).$$

Т.О. если $q = 0$ - правильная точка для изображения $F(q)$, то

$$f(\infty) = 0. \qquad (6.18)$$

Формулы соответствия для D-преобразования Таблица 6.2.

№	Оригинал *f(n)*	Изображение *F*(q)*
1	$\eta(n)$	$\dfrac{e^q}{e^q-1}$
2	n	$\dfrac{e^q}{(e^q-1)^2}$
3	n^2	$\dfrac{e^q(e^q+1)}{(e^q-1)^3}$
4	n^3	$\dfrac{e^q(e^{2q}+4e^q+1)}{(e^q-1)^4}$
5	n^4	$\dfrac{e^q(e^{3q}+11e^{2q}+11e^q+1)}{(e^q-1)^5}$
6	$e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q}{e^q-e^\alpha}$
7	$ne^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q e^\alpha}{(e^q-e^\alpha)^2}$
8	$n^2 e^{\alpha n}$	$\dfrac{e^q e^\alpha(e^q+e^\alpha)}{(e^q-e^\alpha)^3}$
9	$\sin\omega\, n$	$\dfrac{e^q\sin\omega}{e^{2q}-2e^q\cos\omega+1}$
10	$\cos\omega\, n$	$\dfrac{(e^q-\cos\omega)e^q}{e^{2q}-2e^q\cos\omega+1}$
11	$sh\omega\, n$	$\dfrac{e^q sh\omega}{e^{2q}-2e^q ch\omega+1}$
12	$ch\omega\, n$	$\dfrac{(e^q-ch\omega)e^q}{e^{2q}-2e^q ch\omega+1}$
13	$e^{\alpha n}\sin\omega\, n$	$\dfrac{e^q e^\alpha\sin\omega}{e^{2q}-2e^q e^\alpha\cos\omega+e^{2\alpha}}$
14	$e^{\alpha n}\cos\omega\, n$	$\dfrac{(e^q-e^\alpha\cos\omega)e^q}{e^{2q}-2e^q\cos\omega+e^{2\alpha}}$

Переход от изображения к оригиналу

1. Функция-изображение – рациональная функция от e^q

$$F(q)=\frac{C(q)}{B(q)}=\frac{c_0e^{qm}+c_1e^{q(m-1)}+...+c_m}{b_0e^{qr}+b_1e^{q(r-1)}+...+b_r}. \qquad (6.19)$$

В терминах Z-преобразования эта формула имеет вид:

$$F(z)=\frac{C(z)}{B(z)}=\frac{c_0z^m+c_1z^{(m-1)}+...+c_m}{b_0z^r+b_1z^{(r-1)}+...+b_r} \qquad (6.19^*)$$

причем степень числителя не может превышать степени знаменателя ($m<r$), так как $z=\infty$ – правильная точка для функции $F(z)$ (условие существования оригинала). Если $m=r$, то можно выделить целую часть, и, согласно (6.17) $F(z)=a_0=f(0)$.

В случае простых корней знаменателя дробей (6.19), их можно разложить на простейшие множители: $F(z)=\dfrac{C(z)}{B(z)}=\sum\limits_{k=1}^{r}\dfrac{d_k}{z-z_k}$ или $F(q)=\dfrac{C(q)}{B(q)}=\sum\limits_{k=1}^{r}\dfrac{d_k}{e^q-e^{q_k}}$, где коэффициенты d_k – вычеты в простых полюсах. $d_k=\left.\dfrac{C(z)}{B'(z)}\right|_{z=z_k}$.

Рассмотрим знаменатель $\dfrac{1}{e^q-e^{q_k}}$. Известно, $e^{\alpha n}\risingdotseq\dfrac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}$. По теореме запаздывания $e^{-q}\cdot F(q)\risingdotseq f(n-1)$. Тогда,

$$e^{-q}\cdot\frac{e^q}{e^q-e^{\alpha}}=\frac{1}{e^q-e^{\alpha}}\risingdotseq e^{\alpha(n-1)}.$$

Обозначая $e^{\alpha}=e^{q_k}=z_k$, для случая простых полюсов функции $F(z)$ можно записать оригинал:

$$F(z)=\frac{C(z)}{B(z)} \div \sum_{k=1}^{r} d_k \cdot z_k^{n-1}=\sum_{k=1}^{r} \operatorname*{Res}_{z=z_k} F(z) \cdot z_k^{n-1} \qquad (6.20)$$

В общем случае кратных корней знаменателя дробей (6.19) для вычисления оригинала применима формула

$$f(n)=\sum_{k=1}^{l} \operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[F(z) \cdot z^{n-1}\right] \qquad (6.21)$$

где $\operatorname*{Res}_{z=z_k}\left[F(z) \cdot z^{n-1}\right]=\frac{1}{(\gamma-1)!} \lim_{z \to z_k} \frac{d^{\gamma-1}}{dz^{\gamma-1}}\left[F(z) \cdot (z-z_k)^{\gamma} \cdot z^{n-1}\right]$ (6.21*)

Пример. Найти оригинал функции $F(q)=\frac{e^q}{e^{2q}-3e^q+2}$.

Решение. Пусть $e^q=z$. $F(z)=\frac{z}{z^2-3z+2}=\frac{z}{(z-1)(z-2)}$. Знаменатель имеет два простых корня $z_1=1,\ z_2=2$.

По формуле (6.20):

$$B'(z)=2z-3 \quad d_1=\left.\frac{C(z)}{B'(z)}\right|_{z=1}=\frac{1}{2-3}=-1,\ d_2=\left.\frac{C(z)}{B'(z)}\right|_{z=2}=\frac{2}{2\cdot 2-3}=2.$$

$$f(n)=\sum_{k=1}^{2} d_k \cdot z_k^{n-1}=-1\cdot(1)^{n-1}+2\cdot 2^{n-1}=2^n-1.$$

По формуле (6.21):

$$f(n)=\sum_{k=1}^{2} \lim_{z \to z_k}\left[F(z)\cdot(z-z_k)\cdot z^{n-1}\right]=\lim_{z\to 1}\frac{z(z-1)z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}+\lim_{z\to 2}\frac{z(z-2)z^{n-1}}{(z-1)(z-2)}=$$

$$\frac{1}{1-2}1^{n-1}+\frac{2}{2-1}2^{n-1}=2^n-1.$$

§ 7. Решение разностных уравнений

Уравнение вида

$$\Phi[n, f(n), f(n+1), \dots, f(n+k)]=0$$

или $\overline{\Phi}[n, f(n), \Delta f(n), \dots, \Delta^k f(n)]=0$ (7.1)

где $f(n)$ – искомая решетчатая функция, называется ***разностным уравнением*** или ***уравнением в конечных разностях***. Так как $\Delta^k f(n)$

всегда можно выразить через $f(n+k)$, оба уравнения (7.1) равнозначны.

Рассмотрим линейное разностное уравнение k-го порядка с постоянными коэффициентами

$$f(n+k)+a_1 f(n+k-1)+\ldots+a_k f(n)=\varphi(n) \tag{7.2}$$

здесь $f(n)$ – искомая, $\varphi(n)$ − заданная решетчатая функция.

Если $\varphi(n)\equiv 0$, то (7.2) – однородное уравнение, при $\varphi(n)\neq 0$ – (7.2) не однородное.

Пусть заданы начальные условия

$$f(0)=f_0,\ f(1)=f_1,\ldots,f(r-1)=f_{k-1} \tag{7.3}$$

Применяя к (7.2) D-преобразование Лапласа (таблица 2) и пользуясь формулой опережения (6.6), переходим к операторному уравнению.

Если (7.2) задано в виде

$$\Delta^k f(n)+b_1\Delta^{k-1} f(n)+\ldots+b_k f(n)=\varphi(n) \tag{7.4}$$

то метод решения тот же, но для построения операторного уравнения пользуются изображением разностей (6.12)

Пример. Решить задачу Коши $f(n+2)-5f(n+1)+6f(n)=0$, $f(0)=f_0$, $f(1)=f_1$.

Решение. Пусть $f(n)\doteqdot F(q)$. Тогда

$$f(n+2)\doteqdot e^{2q}\left[F(q)-f_0-f_1\, e^{-q}\right],$$

$$f(n+1)\doteqdot e^{q}\left[F(q)-f_0\right].$$

Переходим к операторному уравнению

$$e^{2q}\left[F(q)-f_0-f_1\, e^{-q}\right]-5e^{q}\left[F(q)-f_0\right]+6F(q)=0 \;\Rightarrow$$

$$(e^{2q}-5e^{q}+6)F(q)=f_0 e^{2q}-f_1\, e^{q}+5f_0\, e^{q} \;\Rightarrow$$

$$F(q)=\frac{f_0e^{2q}-f_1\,e^q+5f_0\,e^q}{e^{2q}-5e^q+6}=f_0+\frac{f_1e^q-6f_0}{(e^q-3)(e^q-2)}.$$

Введем обозначения $e^q=z$. Тогда

$$F(z)=f_0+\frac{f_1z-6f_0}{(z-3)(z-2)}.$$

Оригинал от f_0=*const* равен нулю ($\forall n\ge 1$). Второе слагаемое – правильная дробь с простыми полюсами. По формуле (6.20)

$$d_1=\frac{C(3)}{B'(3)}=\frac{3f_1-6f_0}{2\cdot 3-5}=3f_1-6f_0,$$

$$d_2=\frac{C(2)}{B'(2)}=\frac{2f_1-6f_0}{2\cdot 2-5}=6f_0-2f_1\ \Rightarrow$$

$$f(n)=(3f_1-6f_0)3^{n-1}-(f_1-3f_0)2^n.$$

Пример. Решить задачу Коши $\Delta^2f(n)-2\Delta f(n)+f(n)=2$, $f(0)=0$, $\Delta f(0)=1$.

Решение. Пусть $f(n)\risingdotseq F(q)$. Тогда

$$\Delta^2f(n)\risingdotseq(e^q-1)^2F(q)-e^q\left[(e^q-1)f(0)+\Delta f(0)\right]=(e^q-1)^2F(q)-e^q,$$

$$\Delta f(n)\risingdotseq(e^q-1)F(q)-e^qf(0)=(e^q-1)F(q),$$

$$2\risingdotseq 2\frac{e^q}{e^q-1}$$

Переходим к операторному уравнению

$$(e^q-1)^2F(q)-e^q-2(e^q-1)F(q)+F(q)=2\frac{e^q}{e^q-1}\ \Rightarrow$$

$$(e^{2q}-2e^q+1-2e^q+2+1)F(q)=2\frac{e^q}{e^q-1}+e^q\ \Rightarrow$$

$$F(q)=\frac{2e^q+e^{2q}-e^q}{(e^q-1)(e^{2q}-4e^q+4)}=\frac{e^{2q}+e^q}{(e^q-1)(e^q-2)^2}=\left|e^q=z\right|=$$

$$= \frac{z^2 + z}{(z-1)(z-2)^2} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-2} + \frac{6}{(z-2)^2}.$$

Вычисляя оригиналы для $\frac{2}{z-1}, \frac{1}{z-2}, \frac{6}{(z-2)^2}$ по формуле (6.21) находим

$$\frac{2}{z-1} \doteqdot \lim_{z \to 1} \frac{2(z-1)z^{n-1}}{(z-1)} = 2,$$

$$\frac{1}{z-2} \doteqdot \lim_{z \to 2} \frac{(z-2)z^{n-1}}{(z-2)} = 2^{n-1},$$

$$\frac{6}{(z-2)^2} \doteqdot \lim_{z \to 2} \left[\frac{6(z-2)^2 z^{n-1}}{(z-2)^2} \right]_z' = 6(n-1)2^{n-2}. \Rightarrow$$

$$f(n) = 2 - 2^{n-1} + 6(n-1)2^{n-2}.$$

п.1. Анализ входных процессов линейных стационарных динамических систем.

В теории автоматического регулирования и управления важную роль играет ниже сформулированная задача: на вход динамической системы, математическая модель которой описана, поступает сигнал. Требуется найти сигнал на выходе, т.е., реакцию динамической системы на входной сигнал.

Типы динамических систем:

а) непрерывные − описываются дифференциальными уравнениями;

б) дискретные − описываются разностными уравнениями;

в) линейные – задаются линейными уравнениями;

г) нелинейные − задаются нелинейными уравнениями;

д) стационарные − описываются уравнениями с постоянными коэффициентами;

е) нестационарные − имеют уравнения с переменными коэффициентами;

ж) одномерные – суммарное число входов и выходов ≤ 2;

з) многомерные – суммарное число входов и выходов больше двух;

Применение преобразования Лапласа для задач анализа непрерывных стационарных систем имеет свои особенности. Как было показано выше, Z– и D–преобразования связаны друг с другом простой зависимостью $e^q = z$. Поэтому, все подробно доказанные в §4 для D–преобразования свойства могут быть легко применены и для Z–преобразования.

1. Одномерная система (дискретный процесс).

Пусть известен входной сигнал $g(k)$, k=0,1, … . Поведение линейной дискретной стационарной динамической системы задано разностным уравнением

$$a_n \cdot x(k+n) + a_{n-1} \cdot x(k+n-1) + ... + a_0 \cdot x(k) =$$
$$= b_m \cdot g(k+m) + b_{m-1} \cdot g(k+m-1) + ... + b_0 \cdot g(k),$$

где коэффициенты $a_i, b_j, i = \overline{0,n},\ j = \overline{0,m}$ заданы, $n \geq m$. Начальные условия: $x(0)=x_0,\ x(1)=x_1,\ ...,\ x(n-1)=x_{n-1}$.

Будем искать выходной сигнал $x(k)$. Считаем, что входной сигнал $g(k)$, k=0,1, … принадлежит пространству оригиналов.

Применим Z–преобразование к обеим частям уравнения с учетом формулы опережения (6.6*):

$$[a_n \cdot z^n + ... + a_0] \cdot X(z) - x_0[a_n \cdot z^n + ... + a_1 \cdot z] - x_1[a_n \cdot z^{n-1} + ... + a_2 \cdot z] - ... - x_{n-1} \cdot a_n \cdot z =$$
$$[b_m z^m + ... + b_0] \cdot G(z) - g(0)[b_m z^m + ... + b_1 \cdot z] - g(1)[b_m z^{m-1} + ... + b_2 z] - ... - g(m-1) \cdot b_m z.$$

Введем обозначения:

$$D(z) = a_n \cdot z^n + ... + a_0,\ M(z) = b_m z^m + ... + b_0,$$

$$D_1(z) = x_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot z^i + x_1[a_n \cdot z^{n-1} + ... + a_2 \cdot z] + ... + x_{n-1} \cdot a_n \cdot z$$

$$D_2(z) = g(0) \cdot \sum_{j=1}^{m} b_j \cdot z^j + g(1) \cdot [b_m \cdot z^{m-1} + ... + b_2 \cdot z] + ... + g(m-1) \cdot b_m \cdot z.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$D(z) \cdot X(z) = M(z) \cdot G(z) + D_1(z) - D_2(z),$$

откуда находим изображение выходного сигнала:

$$X(z) = \frac{D_1(z)}{D(z)} + \frac{M(z)}{D(z)} \cdot G(z) - \frac{D_2(z)}{D(z)}.$$

Выходной сигнал системы определяем с помощью обратного Z–преобразования, где первое слагаемое описывает свободное движение (с ненулевыми начальными условиями и нулевым входным сигналом), а второе и третье – вынужденное (под действием входного сигнала при нулевых начальных условиях).

Пример.1. Найти реакцию динамической системы, которая описывается уравнением $x(k+2)–2x(k+1)+x(k)=2g(k)$, на входной сигнал $g(k)=2^k$ при $x(0)=x(1)=0$.

Решение. Находим Z–преобразование входного сигнала:

$$G(z)=Z[2^k]=\frac{z}{z-2};\ D(z)=z^2–2z–1;$$

определяем передаточную функцию:

$$W(z)=\frac{M(z)}{D(z)}=\frac{2}{z^2-2z+1}=\frac{2}{(z-1)^2}.$$

Из начальных условий $x_0=x_1=0$, $m=0$, отсюда $D_1(z)=0$, $D_2(z)=0$. Далее находим Z–преобразование выходного сигнала:

$$X(z)=\frac{2}{(z-1)^2}\cdot\frac{z}{z-2}.$$

Разлагая в ряд Лорана

$$X(z)=\frac{2z}{z^3-4z^2+5z-2},$$

получим

$$X(z)=2z^{-2}+8x^{-3}+22z^{-4}+\ldots,$$

коэффициенты ряда Лорана являются значениями искомой решетчатой функции

$$x(k):\ x(0)=x(1)=0,\ x(2)=2,\ x(3)=8,\ x(4)=22,\ \ldots$$

Пример 2. Дискретная динамическая система задана уравнением $x(k+2)–5x(k+1)+6x(k)=g(k)$. Найти ее реакцию на входной сигнал $g(k)=1$ при начальных условиях $x(0)=1$, $x(1)=2$.

Решение. Найдем $Z[g(k)]=Z[1]=\frac{z}{z-1}$. Тогда

$$W(z)=\frac{1}{z^2-5z+6},$$

$$D_1(z) = x_0 \cdot [a_2 \cdot z^2 + a_1 \cdot z] + x_1 \cdot a_2 \cdot z = 1 \cdot [z^2 - 5z] + 2 = z^2 - 3z .$$

Так как m=0 $\Rightarrow$ D_2=0.

Находим Z–преобразование выходного сигнала:

$$X(z) = \frac{z^2 - 3z}{z^2 - 5z + 6} + \frac{1}{z^2 - 5z + 6} \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\text{или } X(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)},$$

где $X_c(z) = \dfrac{z}{z-2}$, $X_b(z) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{z}{z-1} - \dfrac{z}{z-2} + \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{z}{z-3}$.

По таблице находим выходной сигнал:

$$x(k) = 2^k + \frac{1}{2} - 2^k + \frac{1}{2} \cdot 3^k = \frac{1}{2} + \frac{3^k}{2}.$$

2. Многомерные системы

Пусть задан входной сигнал $g(k) = \begin{pmatrix} g_1(k) \\ \vdots \\ g_s(k) \end{pmatrix}$, и многомерная дискретная стационарная система задана уравнением состояния:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bg(k)$$

и уравнением выхода:

$$y(k) = Cx(k),$$

где x – n-мерный вектор состояния, y – m-мерный вектор выхода, $A[n \text{ x } n]$, $B[n \text{ x } s]$, $C[s \text{ x } n]$ − матрицы.

Вектор начальных состояний

$$x_0 = \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{pmatrix} \equiv [x_{10}, \ldots, x_{n0}]^T$$

задает начальные условия. Требуется найти законы изменения векторов состояния $x(k)$ и выхода $y(k)$.

Считаем, что входной и выходной сигналы и вектор состояния принадлежат пространству оригиналов. Обозначим $X(z)=Z[x(k)]$, $G(z)=Z[g(k)]$. Применим Z−преобразование к уравнению $x(k+1)=Ax(k)+Bg(k)$:

$$zX(z)-zx_0=AX(z)+BG(z) \text{ или } [zE-A]\,X(z)=zx_0+BG(z),$$

где E – единичная матрица.

Решаем последнее уравнение относительно $X(z)$:

$$X(z)=[zE-A]^{-1}z\,x_0+[zE-A]^{-1}BG(z).$$

Из уравнения выхода $y(k)=Cx(k)$ следует: $Y(z)=C\,X(z)$, то есть

$$Y(z)=C[zE-A]^{-1}z\,x_0+C[zE-A]^{-1}BG(z).$$

Обозначим

$$Y_c(z)=C[zE-A]^{-1}z\,x_0,\quad Y_b(z)=C[zE-A]^{-1}BG(z),$$

где $Y_c(z)$ описывает свободное движение (при ненулевых начальных условиях и нулевом входном сигнале), а $Y_b(z)$ − вынужденное движение (под действием входного сигнала при нулевых начальных условиях).

Пример 1. Найти закон изменения векторов состояния и выхода многомерной динамической системы:

$$\begin{cases} x_1(k+1)=4x_1(k)-x_2(k)+g(k), \\ x_2(k+1)=x_1(k)+2x_2(k), \\ \quad y(k)=-x_1(k)+x_2(k); \end{cases}$$

при входном сигнале $g(k)=1$ и начальных условиях $x_1(0)=\frac{3}{4},\ x_2(0)=\frac{9}{4}$.

Решение. Изображение входного сигнала $Z(1)=\dfrac{z}{z-1}$,

$$A=\begin{bmatrix}4 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix},\ C=[-1,1],\ x_0=\left[\frac{3}{4},\frac{9}{4}\right]^T.$$

Тогда $$[zE-A]^{-1}=\begin{bmatrix} z-4 & 1 \\ -1 & z-2 \end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{(z-3)^2}\cdot\begin{bmatrix} z-2 & -1 \\ 1 & z-4 \end{bmatrix};$$

$$\mathrm{C}[zE-A]^{-1}=\frac{1}{(z-3)^2}\cdot[-1\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix} z-2 & -1 \\ 1 & z-4 \end{bmatrix}=\frac{1}{(z-3)}\cdot[-1\ \ 1],$$

откуда

$$W_x(z)=\frac{1}{(z-3)^2}\cdot\begin{bmatrix} z-2 & -1 \\ 1 & z-4 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{1}{(z-3)^2}\cdot\begin{bmatrix} z-2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$W_y(z)=W_x(z)\cdot B=\frac{1}{(z-3)}\cdot[-1\ \ 1]\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\frac{-1}{z-3}.$$

Получили изображение законов изменения векторов состояния и выхода:

1. $$X(z)=\begin{bmatrix} \frac{3z^2}{4(z-3)^2}- & \frac{15z}{4(z-3)^2} \\ \frac{9z^2}{4(z-3)^2}- & \frac{33z}{4(z-3)^2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} \frac{z^2}{(z-3)^2(z-1)}- & \frac{2z}{(z-3)^2(z-1)} \\ & \frac{z}{(z-3)^2(z-1)} \end{bmatrix};$$

2. $$Y(z)=\frac{1}{(z-3)}\cdot[-1\ \ 1]\cdot z\cdot\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{9}{4} \end{bmatrix}^T-\frac{z}{(z-3)(z-1)}=\frac{3}{2}\cdot\frac{z}{(z-3)}-\frac{z}{(z-3)(z-1)}.$$

Для нахождения законов изменения векторов состояния и выхода разлагаем дроби на элементарные:

$$\frac{1}{(z-3)(z-1)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-3)}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-1)},$$

$$\frac{1}{(z-3)^2(z-1)}=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{(z-3)}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(z-3)^2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(z-1)},$$

отсюда получаем

$$X(z)=\begin{bmatrix} \frac{3z^2}{4(z-3)^2}- & \frac{15z}{4(z-3)^2} \\ \frac{9z^2}{4(z-3)^2}- & \frac{33z}{4(z-3)^2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{z^2}{4(z-3)}+\frac{z^2}{2(z-3)^2}+\frac{z^2}{4(z-1)}+\frac{z}{2(z-3)}-\frac{z}{(z-3)^2}-\frac{z}{2(z-1)} \\ \frac{z}{(z-3)^2(z-1)} \end{bmatrix}$$

$$Y(z)=\frac{3z}{2(z-1)}+\frac{z}{2(z-1)}-\frac{z}{2(z-3)}.$$

Используем таблицу для нахождения оригиналов и алгебраические преобразования:

$$X(z)=\begin{bmatrix} \frac{3z^2}{4(z-3)^2}- & \frac{15z}{4(z-3)^2} \\ \frac{9z^2}{4(z-3)^2}- & \frac{33z}{4(z-3)^2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -\frac{z^2}{(z-3)}+ \\ \frac{z}{(z-3)^2(z-1)} \end{bmatrix}$$

Устойчивость решений линейных дискретных стационарных динамических систем

1. Одномерные системы.

Пусть задана линейная дискретная стационарная динамическая система

$$a_n \cdot x(k+n)+a_{n-1}\cdot x(k+n-1)+...+a_0\cdot x(k)=b_m\cdot g(k+m)+...+b_0\cdot g(k),$$

k=0,1,…и начальные условия

$x(0)=x_0$, $x(1)=x_1$, …, $x(n-1)=x_{.n-1}$. Требуется исследовать асимптотическую устойчивость системы.

Определение: динамическая система называется асимптотически устойчивой, если при ненулевых ограниченных начальных значениях свободное движение $x_c(k)$ [при $g(k)=0$] также ограничено при всех k=0,1,2,… и выполняется условие $x_c(k)\to 0$ при $k\to\infty$.

Критерий устойчивости: чтобы динамическая система была асимптотически устойчива необходимо и достаточно, чтобы корни характеристического уравнения

$$a_n\cdot\lambda^n+a_{n-1}\cdot\lambda^{n-1}+...+a_0=0$$

были по модулю меньше единицы: $|\lambda i|<1, i=\overline{1,n}$.

Замечания:1. Согласно критерию, все корни должны располагаться внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат.

2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения по модулю больше единицы или равен единице, то решение $\mathbf{x(n)\equiv 0}$ неустойчиво.

3. Если характеристическое уравнение имеет простые корни с модулём, равным единице, а остальные корни, если они есть, по модулю меньше единице, то решение x(n)=0 устойчиво, но не асимптотически.

Пример 1: Исследовать устойчивость дискретной динамической системы

$$x(k+2)-2x(k+1)+5x(k)=0$$

Решение: составим характеристическое уравнение:

$\lambda^2-2\lambda+5=0$; его корни $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$

$|\lambda_1|=|\lambda_2|=\sqrt{5}$, это означает, что решение x(k)=0 неустойчиво.

Пример 2. Найти необходимые и достаточное условия того, что корни характеристического уравнения $\lambda^2+a_1\cdot\lambda+a_2=0$ находятся в единичном круге $|\lambda|<1$.

Решение. Для этого следует выполнить конформное отображение плоскости комплексного переменного λ на плоскость комплексного переменного w так, чтобы окружность $|\lambda|=1$ перешла в мнимую ось, а внутренность круга $|\lambda|<1$ отобразилась на левую полуплоскость Re(W)<0. Такое отображение мы получаем, используя дробно-линейное преобразование

$$\lambda=\frac{1+w}{w-1}.$$

Далее используем **Условие Рауса-Гурвица**: чтобы корни характеристического уравнения $f(\lambda)\equiv a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_n=0$ имели отрицательные вещественные части, необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры матрицы Гурвица

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}$$

были положительны $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots \Delta_n > 0$.

Главные миноры матрицы Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \dots \Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}.$$

В нашей задаче матрица Гурвица имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 2-2a_2 & 1+a_1+a_2 \\ 0 & 1-a_1+a_2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{matrix} \Delta_1 = 2-2a_2 \\ \Delta_2 = (2-2a_2)\cdot(1-a_1+a_2) \end{matrix}.$$

Тогда при: $1+a_1+a_2 > 0; 1-a_2 > 0$; $1-a_1+a_2 > 0$ исходное характеристическое уравнение имеет в круге $|\lambda| < 1$ корни.

2. Многомерные системы.

Пусть линейная дискретная стационарная динамическая система задана уравнением состояния $x(k+1) = A\cdot x(k) + B\cdot g(k)$ и начальным условием $x(0) = x_0; x_0$ -начальное состояние системы.

Определение: динамическая система называется асимптотически устойчивой, если ее свободное движение $x_c(k); k = 0,1,\dots[npu. g(k) = 0]$

ограничено при ограниченных начальных состояниях x_0, и выполняется условие: $\|x_c(k)\| \to 0$ при $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\,2}}$.

Критерий устойчивости: Для асимптотической устойчивости многомерной динамической системы необходимо и достаточно чтобы корни λi характеристического уравнения $\det[A - \lambda E] = 0$ были по модулю меньше единицы: $|\lambda i| < 1, i = \overline{1, n}.$

Геометрически, все корни λi должны быть расположены внутри круга единичного радиуса с центром в начале координат. Для анализа устойчивости многомерных систем также применяют метод Рауса-Гурвица.

Пример 1. Исследовать устойчивость дискретной динамической системы, если задано уравнение ее состояния:

$$x_1(k+1) = -\frac{1}{2} x_2(k) + g \cdot (k),$$

$$x_2(k+1) = x_1(k) - g(k).$$

Решение: составим матрицу Гурвица:

$$A = \begin{bmatrix} 0 - 1 \\ 1 \;\; 0 \end{bmatrix}.$$

Найдем корни характеристического уравнения:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}[-1 \pm i],$$

отсюда $|\lambda_1| = |\lambda_2| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, т.е система асимптотически устойчива.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
2. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразований Лапласа и Z-преобразования. – М.: Наука, 1971. – 288 с.
3. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц А.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. – М.: Наука, 1968. – 416 с.
4. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. (Задачи и упражнения). – М.: Наука, 1971. – 256 с.
5. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. Преобразование Лапласа. – М.: Физматгиз, 1961. – 304 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. Т 2. – М.: Наука, 1965. – 548 с.
7. Ефремова О.Н., Харлова А.Н. Операционное исчисление. Учебное пособие. – Томск: Изд-во ТПУ, 2005. – 72 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Людмила Афанасьевна Беломестных
Ольга Николаевна Имас
Лилия Александровна Кан
Галина Павловна Новоселова

ОПРЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Научный редактор
доктор физико-математических наук, профессор К.П. Арефьев

Редактор Е.О. Фукалова

Подписано к печати 12.03.2006
Формат 60х84/16. Бумага офсетная.
Печать RISO. Усл. печ. л. 6.16. Уч.-изд. л. 5.58.
Тираж 100 экз. Заказ . Цена свободная.
Издательство ТПУ. 634050, Томск, пр. Ленина, 30.