ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее пособие предназначено для студентов института кибернетики, но может быть использовано студентами и других инженерных специальностей. В нем рассматриваются три раздела теории обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). В первой главе изучаются уравнения первого порядка. Во второй главе рассматриваются уравнения высших порядков, при этом, наряду с задачей Коши рассматривается краевая задача. В частности, один параграф посвящен задаче Штурма-Лиувилля, как частному случаю краевых задач. В третьей главе изучаются системы дифференциальных уравнений. Здесь же несколько параграфов посвящено линейным уравнениям в частных производных первого порядка. Хотя уравнения в частных производных являются частью курса «уравнения математической физики», авторы считают, что линейные уравнения в частных производных первого порядка полезнее изучать в рамках курса дифференциальных уравнений, так как интегрирование такого типа уравнений сводится к интегрированию системы ОДУ. Кроме того, это позволит студентам привыкнуть к работе с уравнениями, связывающими функцию нескольких переменных и ее частные производные, и подготовит их к решению объемных задач математической физики.

Для удобства работы с пособием авторы использовали в главах сквозную нумерацию параграфов. Нумерация формул, теорем и примеров привязана к параграфам. Использовались символы ■ – доказательство закончено и ◇ – решение примера завершено. Дополнительная информация, уточняющая или поясняющая определения или теоремы, выделена в виде замечаний.

ВВЕДЕНИЕ

Понятия, а вслед за ними и целые разделы, существующие в современной математике, часто кажутся весьма далекими от реального мира. Но именно они позволяют понять и описать строение атомного ядра, движения геологических плит, рассчитать движение объектов вблизи и в далеком космосе, дают возможность строить математические модели экономики, применять математику в изучении общественных явлений.

Один из таких разделов, которые в обязательном порядке изучают студенты младших курсов – дифференциальные уравнения. Особенностью дифференциальных уравнений является их непосредственная связь с приложениями. Чтобы изучить достаточно сложное явление природы, предварительно рассматривают всевозможные связи между величинами, их характеризующими. Затем эти связи выражают математически – функциями и их производными. В результате получают дифференциальное уравнение, а, зачастую, и систему дифференциальных уравнений. Решая такое уравнение (или систему), мы, фактически, восстанавливаем функцию по ее свойствам. Далее, по виду полученной функции можно делать выводы о том, как в дальнейшем будет развиваться изучаемое явление, какие условия надо задать, чтобы достигнуть требуемых результатов.

Как известно, теория обыкновенных дифференциальных уравнений начала развиваться в XVII веке одновременно с возникновением дифференциального и интегрального исчисления. Можно сказать, что необходимость решать дифференциальные уравнения для нужд механики, то есть находить траектории движений, явилась толчком для создания Ньютоном нового исчисления. Законы Ньютона позволяют строить математическую модель механического движения, которая обычно представляет собой дифференциальное уравнение. Рассмотрим, например, подробнее такую задачу.

С некоторой высоты сброшено тело массой m. Требуется установить закон изменения скорости падения тела $v(t)$, если на него действует сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости (коэффициент пропорциональности k). По II закону Ньютона

$$ma = F,$$

где $a = \dfrac{dv}{dt}$ – ускорение движущегося тела, $F = F_T + F_{сопр} = mg - kv$ – сумма сил, действующих на тело – силы тяжести и силы сопротивления воздуха. Таким образом, имеем уравнение, связывающее искомую функцию $v(t)$ и ее производную $\frac{dv}{dt}$:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv,$$

т. е. дифференциальное уравнение.

В настоящее время теория дифференциальных уравнений является одним из самых больших разделов современной математики. Ее разработкой занимались крупнейшие ученые XVIII века, такие как Ж. Даламбер, Ж. Л. Лагранж, А. Клеро и др. Наибольшую роль в развитии этой теории сыграли труды Л. Эйлера. В первых двух томах его «Интегрального исчисления» содержится немало классических примеров интегрирования дифференциальных уравнений, в том числе и решения линейного однородного уравнения любого порядка с постоянными коэффициентами.

Отметим, что изучение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) на младших курсах обычно остается на уровне открытий XVIII века, и заключается в освоении приемов интегрирования лишь хорошо изученных типов уравнений и некоторых экзотических случаев, ибо "точно" интегрируемые уравнения – это исключительная редкость во множестве возможных уравнений. Переходя к реальным объектам исследования, студенты, инженеры и аспиранты сталкиваются с более сложными моделями и их математической реализацией. Даже в кругах исследователей – «чистых математиков» довольно долго интегрирование уравнений в квадратурах, теоретико-групповой подход к уравнениям считались тупиковой ветвью в науке. Тем не менее, теория обыкновенных дифференциальных уравнений является базой для уравнений математической физики и, кроме того, развитие современной физики показало, что именно те самые редкие и хорошо изученные случаи и представляют наибольший физический интерес. А успехи, достигнутые в ряде разделов математики – в алгебраической топологии, дифференциальной геометрии и коммутативной алгебре, позволяют надеяться на то, что общая теория уравнений с частными производными будет построена.

ГЛАВА I
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 1. Основные понятия

В математике и физике часто встречаются задачи, для решения которых требуется решить уравнение, содержащее не только неизвестную функцию и ее аргумент, но и производную неизвестной функции.

Уравнение вида

$$F(x, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

связывающее независимую переменную x, искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$, называется ***обыкновенным дифференциальным уравнением***. Порядок старшей производной, входящей в дифференциальное уравнение, называется ***порядком дифференциального уравнения***.

Например, уравнения

$$y' + xy - x^2 = 0,$$
$$x(y')^2 + e^x = 0,$$
$$yy' - 1 = 0,$$
$$(y')^5 + e^{y^2} = 0$$

будут дифференциальными уравнениями первого порядка; уравнения

$$xy'' - (y')^3 - y = 0,$$
$$y'' - y' = 1$$

будут дифференциальными уравнениями второго порядка; уравнение

$$y^2 - y''' + x^5 = 0$$

имеет третий порядок.

Функция $y = \varphi(x)$ называется ***решением дифференциального уравнения*** (1.1) на интервале (a, b), если при ее подстановке в это уравнение получается тождество, справедливое для всех x из интервала (a, b).

Например, функция $y = \cos x$ является решением дифференциального уравнения $y'' + y = 0$ на $(-\infty, +\infty)$; функция $y = \sqrt{1 - x^2}$ будет решением уравнения $y' = -\dfrac{x}{y}$ в интервале $(-1; 1)$. Чтобы это проверить, достаточно подставить функцию в соответствующее уравнение.

Уравнение

$$\Phi(x, y) = 0,$$

задающее в неявном виде решение дифференциального уравнения (1.1), называется ***интегралом дифференциального уравнения***.

График решения (интеграла) дифференциального уравнения называется ***интегральной кривой***.

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется ***интегрированием дифференциального уравнения***. Это название не случайно, так как нахождение решений обычно связано с процессом интегрирования. Поскольку процесс интегрирования функции приводит к появлению множества функций, то и решений любое дифференциальное уравнение тоже будет иметь множество. Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений данного дифференциального уравнения в заданной области (в явной или неявной форме). Дифференциальное уравнение называется ***интегрируемым в квадратурах***, если все его решения могут быть получены в результате конечной последовательности элементарных действий над известными функциями и интегрированием этих функций. Таких уравнений сравнительно немного. В нашем курсе мы рассмотрим основные типы дифференциальных уравнений, интегрируемых в квадратурах.

> *Замечание.* В математике рассматриваются также уравнения, которые связывают искомую функцию нескольких переменных, ее аргументы и частные производные. Такие уравнения называются ***дифференциальными уравнениями в частных производных***. Их интегрирование представляет собой значительно более сложную задачу, чем интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений. Позднее мы познакомимся с одним типом дифференциальных уравнений в частных производных.

§ 2. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для уравнения, разрешенного относительно производной

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$\boxed{F(x, y, y') = 0,} \tag{2.1}$$

где x – независимая переменная, y – неизвестная искомая функция, F – заданная функция трех переменных. В §§ 2-10 мы будем рассматривать дифференциальные уравнения первого порядка, которые можно записать в виде

$$\boxed{y' = f(x, y).} \tag{2.2}$$

Уравнение (2.2) называется уравнением первого порядка, ***разрешенным относительно производной***. Для уравнений вида (2.2) справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1 (Коши). *Пусть в уравнении*

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

функция $f(x, y)$ *удовлетворяет двум условиям:*

1) $f(x, y)$ *непрерывна в некоторой области* D *плоскости* xOy*;*

2) *ее частная производная* $f'_y(x, y)$ *в области* D *ограничена.*

Тогда для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ *существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* (2.2)*, определенное в некотором интервале* (a, b)*, содержащем точку* x_0*, и удовлетворяющее условию* $y_0 = \varphi(x_0)$.

Числа x_0, y_0 называются ***начальными значениями (данными)*** для решения $y = \varphi(x)$, а условие $y_0 = \varphi(x_0)$ – ***начальным условием*** решения. Задача нахождения решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющего начальному условию $y_0 = \varphi(x_0)$, называется ***задачей Коши***. Поэтому теорему 2.1 называют ***теоремой существования и единственности решения задачи Коши***.

Геометрически задание начального условия означает, что на плоскости xOy задается точка $M_0(x_0, y_0)$, через которую проходит интегральная кривая. Согласно теореме 2.1, через каждую точку области D проходит, и притом единственная, интегральная кривая уравнения (2.2). Закрепляя значение x_0 и изменяя в некоторых пределах значение y_0 (так, чтобы точка (x_0, y_0) принадлежала области D), для каждого числа y_0 будем получать свое решение. В результате, вся область D будет покрыта интегральными кривыми, которые нигде между собой не пересекаются (рис.2.1).

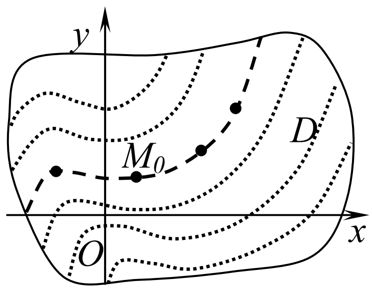

Рис.2.1.

Таким образом, теорема 2.1 подтверждает высказанное нами ранее предположение о том, что дифференциальное уравнение имеет множество решений и говорит о том, что эта совокупность решений зависит от произвольной постоянной.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ***Общим решением*** *дифференциального уравнения* (2.2)

$$y' = f(x, y)$$

в области D *существования и единственности решения задачи Коши называется функция* $y = \varphi(x, C)$*,* *зависящая от* x *и одной произвольной постоянной* C*, которая удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *при любом допустимом значении постоянной C она удовлетворяет уравнению* (2.1);
2) *каково бы ни было начальное условие* $y_0 = y(x_0)$ *(где* $(x_0, y_0) \in D$*), можно найти единственное значение* C_0 *такое, что функция* $y = \varphi(x, C_0)$ *удовлетворяет данному начальному условию.*

Уравнение $\Phi(x, y, C) = 0$, задающее общее решение в неявном виде, называется ***общим интегралом уравнения***.

С геометрической точки зрения общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых, зависящих от одного параметра. Решение уравнения, удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$ (где $(x_0, y_0) \in D$), будет изображаться определенной кривой этого семейства (рис.2.1).

> *Замечание*. Теорема 2.1 дает достаточные условия существования (1 условие теоремы) и единственности (2 условие теоремы) решения задачи Коши. Поэтому возможно, что в точке (x_0, y_0) условия теоремы 2.1 не выполняются, а решение $y = y(x)$ уравнения (2.2), удовлетворяющее условию $y_0 = y(x_0)$, существует и единственно.

ПРИМЕР 2.1. Рассмотрим уравнение $y' = \frac{1}{y^2}$. Имеем $f(x, y) = \frac{1}{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2}{y^3}$. В точках $(x_0, 0)$ оси Ox функция $f(x, y)$ разрывна и, следовательно, условия теоремы 2.1 не выполняются. Но через каждую точку $(x_0, 0)$ проходит единственная интегральная кривая $y = \sqrt[3]{3(x - x_0)}$ (рис. 2.2). ◇

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим уравнение $y' = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$. Имеем $f(x, y) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{y^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$. Во всех точках плоскости xOy функция $f(x, y)$ определена и непрерывна. Однако в точках $(x_0, 0)$ производная функции $\frac{\partial f}{\partial y} \to \infty$. Так как в точках оси Ox нарушается второе условие теоремы 2.1, то возможно нарушение единственности решения. Легко проверить, что функция $y = \dfrac{(x+C)^3}{8}$ является общим решением данного уравнения. Кроме того, очевидно, что уравнение имеет решение $y \equiv 0$. Таким образом, через каждую точку $(x_0, 0)$ проходит две интегральные кривые (рис. 2.3), и в этих точках действительно нарушается единственность решения. ◇

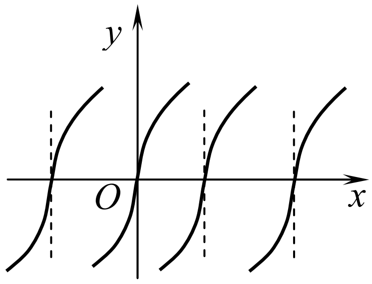

Рис.2.2.

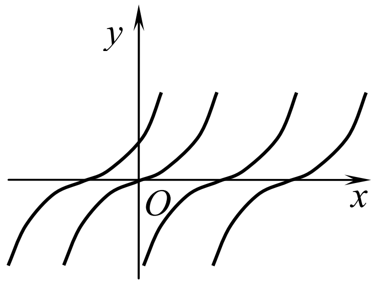

Рис.2.3.

Решение (интеграл), в каждой точке которого выполняется условие единственности, называется ***частным***. Очевидно, что любое частное решение (интеграл) получается из общего решения (интеграла) при конкретном значении постоянной C (включая $C = \pm\infty$).

Общее решение не всегда описывает все множество решений дифференциального уравнения (см. пример 2.2). Решение (интеграл) $y = \psi(x)$, в каждой точке которого нарушено условие единственности (т. е. через каждую точку интегральной кривой $y = \psi(x)$, проходит помимо $y = \psi(x)$ еще хотя бы одна интегральная кривая), называется ***особым***. Особое решение, очевидно, не входит в общее решение дифференциального уравнения. График особого решения называют ***особой интегральной кривой уравнения***. С геометрической точки зрения особая интегральная кривая является огибающей семейства интегральных кривых

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Линия ℓ называется **огибающей** однопараметрического семейства кривых, если она в каждой своей точке касается одной кривой семейства, причем в различных точках она касается различных кривых.*

ПРИМЕР 2.3. Прямые $y = \pm R$ являются огибающими семейства окружностей $(x+C)^2 + y^2 = R^2$ (рис. 2.4). ◇

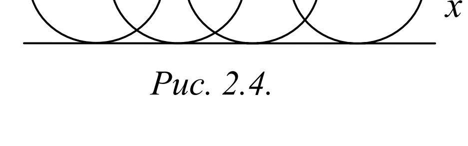

Рис. 2.4.

ПРИМЕР 2.4. Прямая $y = 0$ являются огибающей семейства кривых $y = \dfrac{(x+C)^3}{8}$ (рис. 2.3). ◇

Интегрируя дифференциальное уравнение, необходимо всегда проверять, не были ли потеряны в процессе преобразования какие-нибудь решения. Если уравнение имеет особое решение, оно всегда «теряется» и обладает тем свойством, что оно могло бы быть включено в общее решение, если бы допускалось $C = C(x)$ (так как огибающая касается в разных точках разных кривых семейства).

Вопросы, связанные с существованием и нахождением особых решений в нашем курсе подробно рассматриваться не будут.

§ 3. Уравнения с разделенными переменными

Заметим, что дифференциальное уравнение первого порядка, разрешенное относительно производной, всегда можно записать в виде

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \tag{3.1}$$

(иногда эту форму записи называют ***дифференциальной формой уравнения***).

Действительно, так как $y' = \dfrac{dy}{dx}$, то уравнение (2.2) можно переписать следующим образом:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} - f(x, y) = 0.$$

Умножая каждое слагаемое на dx, находим

$$dy - f(x, y)dx = 0.$$

Это уравнение вида (3.1), где $P(x, y) = -f(x, y)$, $Q(x, y) = 1$.

Обратно, всякое уравнение вида (3.1), если $Q(x, y) \neq 0$, можно разрешить относительно производной:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

или

$$y' = f(x, y), \text{ где } f(x, y) = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)}.$$

В дальнейшем мы будем использовать ту форму записи уравнения, разрешенного относительно производной (форму (2.2) или (3.1)), которая нам более удобна в конкретном случае. При этом, если уравнение записано в виде (3.1), то обычно предполагают, что переменные x и y равноправны.

Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{f(x)dx + \varphi(y)dy = 0,} \tag{3.2}$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ – непрерывные функции, называется ***уравнением с разделенными переменными.***

Найдем общий интеграл уравнения (3.2). Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, $\Phi(y)$ – первообразная функции $\varphi(y)$. Тогда

$$f(x)dx = dF, \quad \varphi(y)dy = d\Phi,$$

$$\Rightarrow \quad f(x)dx + \varphi(y)dy = d(F + \Phi).$$

Из (3.2) следует, что $d(F+\Phi)=0$. Тогда

$$F(x)+\Phi(y)=C, \tag{3.3}$$

где C – произвольная постоянная.

Итак, мы получили соотношение (3.3), связывающее решение y, независимую переменную x и произвольную постоянную C, т. е. получили общий интеграл уравнения (3.2). Его принято записывать в виде

$$\int f(x)dx + \int \varphi(y)dy = C, \tag{3.4}$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. В (3.4), как и всюду в теории дифференциальных уравнений, символом $\int f(x)dx$ обозначают одну из первообразных функции (а не все множество первообразных, как это принято в математическом анализе).

ПРИМЕР 3.1. Найти общий интеграл уравнения $xdx + 3y^2dy = 0$.
РЕШЕНИЕ. Это уравнение с разделенными переменными. Интегрируя, получаем:

$$\int xdx + 3\int y^2dy = C \;\Rightarrow\; \frac{x^2}{2} + y^3 = C \;\Rightarrow\; x^2 + 2y^3 = 2C.$$

Обозначим $2C = \widetilde{C}$ и получим, что общий интеграл данного уравнения имеет вид

$$x^2 + 2y^3 = \widetilde{C}. \diamond$$

§ 4. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{M_1(x)\cdot N_1(y)dx + M_2(x)\cdot N_2(y)dy = 0,} \qquad (4.1)$$

называется ***уравнением с разделяющимися переменными*** (функции $M_1(x)$, $N_1(y)$, $M_2(x)$, $N_2(y)$ предполагаются непрерывными).

Иначе говоря, *уравнение с разделяющимися переменными, это уравнение, в котором коэффициенты при дифференциалах распадаются на множители, зависящие только от x и только от y .*

Уравнение (4.1) может быть приведено к уравнению с разделенными переменными путем деления обеих его частей на выражение $N_1(y)\cdot M_2(x)$. Действительно, в этом случае имеем

$$\frac{M_1(x)\cdot N_1(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}dx + \frac{M_2(x)\cdot N_2(y)}{N_1(y)\cdot M_2(x)}dy = 0.$$

После сокращения получим уравнение с разделенными переменными

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0.$$

Замечания. 1) Деление на $N_1(y)\cdot M_2(x)$ может привести к потере решений, обращающих в нуль произведение $N_1(y)\cdot M_2(x)$. Поэтому чтобы получить полное решение, необходимо рассмотреть корни уравнений $N_1(y)=0$, $M_2(x)=0$.

2) Уравнение, разрешенное относительно y', является уравнением с разделяющимися переменными, если оно имеет вид:

$$y' = f(x)\cdot\varphi(y).$$

Действительно, разделим уравнение (4.1) на $M_2(x)\cdot N_2(y)dx$

$$\frac{M_1(x)\cdot N_1(y)}{M_2(x)\cdot N_2(y)} + \frac{dy}{dx} = 0$$

и получим
$$y' = f(x)\cdot\varphi(y),$$
где
$$f(x) = -\frac{M_1(x)}{M_2(x)},\ \varphi(y) = \frac{N_1(y)}{N_2(y)}.$$

ПРИМЕР 4.1. Найти все решения уравнения

$$2x\cdot\sqrt{y}dx + (1-x^2)dy = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, так как коэффициенты при dx и dy представляет собой произведение двух функций, одна из которых зависит только от *x*, а другая – только от *y*. Разделим обе части уравнения на $(1-x^2)\cdot\sqrt{y}$:

$$\frac{2x}{(1-x^2)}dx+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0 \qquad (\text{где } (1-x^2)\cdot\sqrt{y}\neq 0).$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Его общий интеграл

$$\int\frac{2x}{(1-x^2)}dx+\int\frac{dy}{\sqrt{y}}=C,$$

$$-\ln\left|1-x^2\right|+2\sqrt{y}=C.$$

Найдем общее решение. Имеем:

$$\sqrt{y}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|1-x^2\right|+C\right) \qquad \text{или} \qquad y=\left(\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}+\frac{1}{2}C\right)^2.$$

Так как C – произвольная постоянная, то $\frac{1}{2}C$ можно переобозначить через C. Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y=\left(\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}+C\right)^2.$$

При делении на $(1-x^2)\cdot\sqrt{y}$ мы могли потерять решения. Поэтому необходимо рассмотреть корни уравнений $1-x^2=0$, $\sqrt{y}=0$.

1) $1-x^2=0 \;\Rightarrow\; x=\pm 1$.

   Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $x=\pm 1$ являются решениями. Проверим, входят ли они в общий интеграл. Имеем: $$2\sqrt{y}-\ln\left|1-x^2\right|=C.$$

$$\Rightarrow \quad 1-x^2=\pm e^{-C}\cdot e^{2\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \quad x=\pm\sqrt{1-\widetilde{C}\cdot e^{2\sqrt{y}}}\,, \quad \text{где } \widetilde{C}=\pm e^{-C}\neq 0.$$

   Решения $x=\pm 1$ могут быть включены в общее решение, если снять ограничение на $\widetilde{C}$.

2) $\sqrt{y}=0 \;\Rightarrow\; y=0$.

   Подставляя в исходное дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению и в общее решение (интеграл) не входит, но могло бы входить, если бы допускалось $C=C(x)=-\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}$. Это означает, что через каждую точку кривой $y=0$ проходит еще одна интегральная кривая, входящая в общее решение и, следовательно, мы имеем дело с особым решением.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенствами:

$$y=\left(\ln\sqrt{\left|1-x^2\right|}+C\right)^2,\ y=0,$$

причем решение $y=0$ – особое. ◇

ПРИМЕР 4.2. Найти все решения уравнения $ydx-xdy=0$ и указать частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=2$.

РЕШЕНИЕ. Разделим обе части уравнения на $x\cdot y$:

$$\frac{dx}{x}-\frac{dy}{y}=0 \quad (\text{где } x\cdot y\neq 0).$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Его общий интеграл

$$\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dy}{y}=C \quad \text{или} \quad \ln|x|-\ln|y|=C.$$

Найдем общее решение. Так как функция $y=\ln x$ может принимать любое действительное значение, то произвольную постоянную можно представить в виде $\ln C$, где $C>0$. Получим:

$$\ln|x|-\ln|y|=\ln C \quad \text{или} \quad |y|=C\cdot|x|,$$

откуда

$$y=\pm C\cdot x.$$

Так как C – произвольная постоянная, то $\pm C$ можно переобозначить через C. Следовательно, общее решение уравнения будет иметь вид:

$$y=C\cdot x, \quad \text{где } C\neq 0.$$

При делении на $x\cdot y$ мы могли потерять решения. Поэтому необходимо рассмотреть функции $x=0$ и $y=0$.

1) Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=0$ является решением. В общее решение оно войдет при $C=0$. Следовательно, ограничение на значения константы необходимо снять.
2) $x=0$ – удовлетворяет дифференциальному уравнению и в общее решение входит при $\frac{1}{C}=0$, т. е. при $C=\infty$.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенством:

$$y=C\cdot x, \quad \text{где } C \text{ – любое число.}$$

Найдем решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=2$. Подставим значения $x_0=1$, $y_0=2$ в общее решение и найдем значение C:

$$2=C\cdot 1 \quad \Rightarrow \quad C=2.$$

Таким образом, при $C=2$ получаем частное решение

$$y=2x,$$

которое удовлетворяет начальному условию $y(1)=2$. ◇

В заключение параграфа рассмотрим следующее уравнение:

$$y' = f(ax+by+c), \tag{4.2}$$

где a, b и c – некоторые числа. Оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой $z(x)=ax+by+c$.

Действительно, в этом случае имеем:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right).$$

Тогда уравнение (4.2) примет вид

$$\frac{1}{b}\cdot\left(\frac{dz}{dx} - a\right) = f(z) \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx} = bf(z) + a.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, интегрируя которое получаем

$$\frac{dz}{bf(z)+a} = dx \qquad (\text{где } bf(z)+a \neq 0);$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{bf(z)+a} = x + C.$$

ПРИМЕР 4.3. Найти общее решение уравнения $y' = 2x - y$.

РЕШЕНИЕ. Положим $z = 2x - y$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = 2 - \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{dz}{dx}.$$

Подставляя эти выражения в исходное уравнение, получим:

$$2 - \frac{dz}{dx} = z \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dx} = 2 - z.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{2-z} = dx \qquad (\text{где } 2 - z \neq 0).$$

Проинтегрируем:

$$\int \frac{dz}{2-z} = \int dx - \ln C, \text{ где } C>0;$$

$$\ln|2-z| = -x + \ln C, \text{ где } C>0;$$

$$\Rightarrow \quad 2 - z = e^{-x}\cdot C, \quad \text{где } C\neq 0;$$

$$\Rightarrow \quad z = 2 + C\cdot e^{-x}.$$

Возвращаясь к старой переменной, получим:

$$2x-y=2+C\cdot e^{-x}, \quad \text{где } C\neq 0.$$

В процессе преобразований потеряно решение $z=2$ (т. е. $y=2x-2$), которое может быть включено в общее при $C=0$. Таким образом, общее решение

$$y=2x-2-C\cdot e^{-x},\ \forall C.\ \diamond$$

§ 5. Однородные уравнения

К уравнению с разделяющимися переменными всегда можно привести уравнения, которые получили название однородных.

Функция $M(x,y)$ называется ***однородной измерения m*** (или ***однородной степени m***), если при любом $t\neq 0$ справедливо равенство

$$\boxed{M(t\cdot x,t\cdot y)=t^m\cdot M(x,y).}$$

Например, функция $f(x,y)=\sqrt[4]{x^8+y^8}$ – однородная измерения 2, так как

$$f(t\cdot x,\,t\cdot y)=\sqrt[4]{t^8x^8+t^8y^8}=t^2\cdot\sqrt[4]{x^8+y^8}=t^2\cdot f(x,y);$$

функция $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{xy}$ – однородная измерения 0, так как

$$f(t\cdot x,\,t\cdot y)=\frac{t^2x^2+t^2y^2}{t^2xy}=\frac{x^2+y^2}{xy}=t^0\cdot f(x,y).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Уравнение первого порядка*

$$y'=f(x,y)$$

называется ***однородным*** *относительно x и y, если $f(x,y)$ – однородная функция нулевого измерения.*

Покажем, как уравнение, однородное относительно x и y, можно привести к уравнению с разделяющимися переменными.

По определению имеем $f(t\cdot x,t\cdot y)=f(x,y)$ для любого $t\neq 0$. Положим в этом тождестве $t=\dfrac{1}{x}$ и получим

$$f(x,y)=f\left(1,\frac{y}{x}\right),$$

т. е. однородная функция нулевого измерения зависит от отношения $\dfrac{y}{x}$.

Следовательно, уравнение (5.1) можно записать в виде

$$y' = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Сделаем замену $\frac{y}{x} = z$. Тогда $y = xz$ и $\frac{dy}{dx} = z + x\frac{dz}{dx}$. Подставим эти выражения в уравнение $y' = f(x, y)$ и получим уравнение с разделяющимися переменными:

$$z + x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) \quad \text{или} \quad x\frac{dz}{dx} = \varphi(z) - z.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dz}{\varphi(z) - z} = \frac{dx}{x} \quad (\text{где } \varphi(z) - z \neq 0);$$

$$\Rightarrow \int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C.$$

Подставив после интегрирования вместо z отношение $\frac{y}{x}$, получим общий интеграл исходного уравнения.

Замечание. Дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

является однородным относительно x и y, если функции $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одного и того же измерения.

Действительно, в этом случае

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

а отношение двух однородных функций одного и того же измерения, очевидно, является функцией нулевого измерения.

ПРИМЕР 5.1. Найти общее решение уравнения $y' + \frac{x + y}{x + 2y} = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' = -\frac{x + y}{x + 2y}.$$

Функции $x + y$ и $x + 2y$ – однородные первого измерения. Тогда функция $f(x, y) = -\frac{x + y}{x + 2y}$ – однородная нулевого измерения. Действительно,

$$f(tx, ty) = -\frac{tx + ty}{tx + 2ty} = -\frac{x + y}{x + 2y} = t^0 \cdot f(x, y), \quad m = 0.$$

Следовательно, имеем однородное уравнение.

Делаем замену $\frac{y}{x}=z$. Тогда $y=xz$ и $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$. Подставляя в уравнение, получаем

$$z+x\frac{dz}{dx}+\frac{1+z}{1+2z}=0 \quad \text{или} \quad x\frac{dz}{dx}+\frac{2z^2+2z+1}{1+2z}=0.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{(2z+1)dz}{2z^2+2z+1}+\frac{dx}{x}=0 \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{d(2z^2+2z+1)}{2z^2+2z+1}+\frac{dx}{x}=0,$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot\ln\left|2z^2+2z+1\right|+\ln|x|=\ln C,\ C>0;$$

$$\Rightarrow \ln\left|2z^2+2z+1\right|+\ln|x|^2=\ln C^2,\ C>0;$$

$$\Rightarrow \left|2z^2+2z+1\right|\cdot x^2=C^2,\ C>0.$$

Подставляя $\frac{y}{x}=z$, получаем $\left|2y^2+2xy+x^2\right|=C^2,\ C>0$.

$$\Rightarrow 2y^2+2xy+x^2=\pm C^2.$$

Переобозначим $\pm C^2$ через C. Тогда общий интеграл уравнения.

$$2y^2+2xy+x^2=C, \quad C\neq 0.$$

Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $2z^2+2z+1\neq 0$, $\forall z$, а $x=0$ не является решением. ◇

Замечание. Некоторые однородные уравнения проще интегрируются с помощью подстановки $\frac{x}{y}=z$, которая, как легко убедиться, также приводит однородное уравнение к уравнениию с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 5.2. Найти общее решение уравнения $xdy-ydx=ydy$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$(x-y)dy=ydx.$$

Функции $x-y$ и x – однородные измерения 1. Следовательно, уравнение является однородным относительно x и y. Но, так как уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{y}-1=\frac{dx}{dy},$$

то в данном случае за свободную переменную удобнее выбрать y, а за искомую функцию x=$x(y)$.

Положим $\frac{x}{y} = z$.

$$\Rightarrow \quad x = z \cdot y \qquad \text{и} \qquad x' = z + y \cdot z'.$$

Подставляя в уравнение выражения для x и x', получаем

$$z - 1 = z + y \cdot z'.$$

Приводя подобные и разделяя переменные, находим:

$$\frac{dy}{y} = -dz \qquad (y \neq 0).$$

Отсюда после интегрирования будем иметь

$$\ln|y| = \ln C - z, \quad C > 0;$$

$$\Rightarrow \quad y = Ce^{-z}, \quad C \neq 0.$$

Заменяя z на $\frac{x}{y}$, получаем общий интеграл

$$y = Ce^{-\frac{x}{y}}.$$

При делении на y мы могли потерять решение $y=0$. Подстановкой в дифференциальное уравнение убеждаемся, что $y=0$ является решением. Из общего интеграла оно может быть получено при $C = 0$.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенством:

$$y = Ce^{-\frac{x}{y}}, \ \forall C. \diamond$$

ПРИМЕР 5.3. Найти общее решение уравнения

$$\frac{dx}{x^2 - xy + y^2} = \frac{2dy}{y^2 - 4xy}.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' = \frac{y^2 - 4xy}{2(x^2 - xy + y^2)} \qquad \text{или} \qquad x' = \frac{2(x^2 - xy + y^2)}{y^2 - 4xy}.$$

Функции $f(x, y) = \frac{y^2 - 4xy}{x^2 - xy + y^2}$ и $\varphi(x, y) = \frac{2(x^2 - xy + y^2)}{y^2 - 4xy}$ – однородные нулевого измерения. Следовательно, рассматриваемое уравнение однородное, причем здесь замены $\frac{x}{y} = z$ и $\frac{y}{x} = z$ приведут к уравнениям одинаковой сложности. Например, будем работать с уравнением

$$x' = \frac{2(x^2 - xy + y^2)}{y^2 - 4xy}.$$

Тогда свободной переменной является y, а искомая функция $x=x(y)$. Полагаем
$$\frac{x}{y}=z,$$
$$\Rightarrow\ x=z\cdot y,\qquad x'=z+y\cdot z'.$$
Подставляя в уравнение выражения для x и x' получаем
$$z+yz'=\frac{2z^2-2z+2}{1-4z},$$
$$yz'=\frac{6z^2-3z+2}{1-4z}.$$
Разделяя переменные и интегрируя, находим
$$\frac{1-4z}{6z^2-3z+2}dz=\frac{dy}{y}\quad \text{или}\quad \frac{1}{3}\frac{d(6z^2-3z+2)}{6z^2-3z+2}=-\frac{dy}{y},$$
$$\Rightarrow\quad \ln(6z^2-3z+2)=\ln C^3-\ln|y^3|,\quad C>0;$$
$$6z^2-3z+2=\frac{C^3}{y^3},\quad C\neq 0.$$
Подставляя $\frac{x}{y}=z$, получаем общий интеграл
$$6x^2y-3xy^2+2y^3=C^3,\quad C\neq 0.$$
Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $6z^2-3z+2\neq 0$, $\forall z$, а $y=0$ не является решением. ◇

§ 6. Уравнения, приводящиеся к однородным

6.1. Уравнение вида $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$

Рассмотрим уравнение
$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right).\tag{6.1}$$
Если $c_1=c_2=0$, то уравнение (6.1) будет однородным. В противном случае, в зависимости от коэффициентов при x и y, оно может быть с помощью замены приведено либо к уравнению с разделяющимися переменными, либо к однородному. Рассмотри каждый из этих двух случаев.

1) Пусть хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отлично от нуля, а коэффициенты при x и y удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Тогда система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \qquad (6.2)$$

будет иметь единственное решение.

Сделаем замену переменных:

$$\boxed{x = t + \alpha, \ y = z + \beta,}$$

где α и β – решения системы (6.2). Тогда $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dt}$ и из уравнения (6.1) получим:

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1(t+\alpha)+b_1(z+\beta)+c_1}{a_2(t+\alpha)+b_2(z+\beta)+c_2}\right),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t+b_1z+(a_1\alpha+b_1\beta+c_1)}{a_2t+b_2z+(a_2\alpha+b_2\beta+c_2)}\right).$$

Но α и β – решения системы (6.2). Следовательно,

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0,$$

и имеет место однородное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = f\left(\frac{a_1t+b_1z}{a_2t+b_2z}\right).$$

2) Теперь рассмотрим случай, когда хотя бы одно из чисел c_1 или c_2 отлично от нуля, а коэффициенты при x и y удовлетворяют условию

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Равенство нулю определителя второго порядка с ненулевыми элементами означает, что его строки пропорциональны, т. е.

$$a_2 = \lambda a_1, \quad b_2 = \lambda b_1.$$

Но тогда уравнение (6.1) можно записать в виде

$$y' = f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{\lambda(a_1x+b_1y)+c_2}\right) \quad \text{или} \quad y' = \varphi(a_1x+b_1y).$$

Это уравнение вида (4.2), которые мы уже рассмотрели ранее в §4. Мы показали, что оно приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены $z = a_1 x + b_1 y$.

ПРИМЕР 6.1. Найти общий интеграл уравнения

$$(4y - 3x - 5)y' - 3y + 7x + 2 = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' = \frac{-7x + 3y - 2}{-3x + 4y - 5}.$$

Это уравнение вида (6.1). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} -7x + 3y - 2 = 0, \\ -3x + 4y - 5 = 0. \end{cases}$$

Она имеет единственное решение

$$x_0 = \frac{7}{19}, \; y_0 = \frac{29}{19}.$$

Следовательно, уравнение приводится к однородному заменой

$$x = t + x_0 = t + \frac{7}{19}, \quad y = z + y_0 = z + \frac{29}{19}.$$

В результате получим однородное уравнение

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-7t + 3z}{-3t + 4z}.$$

Сделаем еще одну замену переменных:

$$z = ut \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dt} = u + t\frac{du}{dt}.$$

Это приведет нас к уравнению

$$u + t\frac{du}{dt} = \frac{-7 + 3u}{-3 + 4u},$$

$$\Rightarrow \quad t\frac{du}{dt} = \frac{-4u^2 + 6u - 7}{-3 + 4u}.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными. Запишем его в виде

$$\frac{dt}{t} + \frac{4u - 3}{4u^2 - 6u + 7}du = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\frac{d(4u^2 - 6u + 7)}{4u^2 - 6u + 7} = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$\ln|t| + \frac{1}{2}\ln(4u^2 - 6u + 7) = \ln\widetilde{C}, \quad \widetilde{C} > 0;$$

$$\Rightarrow\ (4u^2 - 6u + 7)\cdot t^2 = \widetilde{C}^2, \quad \widetilde{C} > 0;$$

$$\Rightarrow\ (4u^2 - 6u + 7)t^2 = C, \quad C>0.$$

Сделаем обратную замену переменных $u=\frac{z}{t}$ и получим:

$$4z^2-6zt+7t^2=C, \quad C>0.$$

Но $z=y-\frac{29}{19}$, $t=x-\frac{7}{19}$. Следовательно

$$7x^2 + 4y^2 - 6xy + 4x - 10y = C - \frac{131}{19}.$$

Переобозначив $C - \frac{131}{19}$ через C, окончательно получим

$$7x^2+4y^2-6xy+4x-10y=C, \text{ где } C > -\frac{131}{19}.$$

Потери решений в процессе интегрирования не произошло, так как $4u^2 - 6u + 7 > 0\ \ \forall u$, а $t = 0$ не является решением. ◇

ПРИМЕР 6.2. Найти общий интеграл уравнения

$$(x + 2y + 1)y' = 2x + 4y + 3.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' = \frac{2x + 4y + 3}{x + 2y + 1}.$$

Это уравнение вида (6.1). Рассмотрим систему

$$\begin{cases} 2x + 4y + 3 = 0, \\ x + 2y + 1 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель ее матрицы $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, то система не имеет решений и исходное дифференциальное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью замены

$$z = x + 2y.$$

В этом случае имеем: $\qquad z' = 1 + 2y',$

$$\Rightarrow\ y' = \frac{1}{2}\cdot(z' - 1),$$

и из уравнения получаем:

$$\frac{1}{2}\cdot(z'-1)=\frac{2z+3}{z+1}.$$

Разделяя переменные и интегрируя, находим:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{4z+6}{z+1}+1 \quad \text{или} \quad \frac{dz}{dx}=\frac{5z+7}{z+1},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{z+1}{5z+7}dz=dx \quad (5z+7\neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad \int\frac{z+1}{5z+7}dz=\int dx+C,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{5}\int\left(1-\frac{2/5}{z+7/5}\right)dz=\int dx+C,$$

$$\Rightarrow \quad z-\frac{2}{5}\ln\left|z+\frac{7}{5}\right|=5x+C.$$

Заменяя $z=x+2y$, получаем:

$$x+2y-\frac{2}{5}\ln\left|x+2y+\frac{7}{5}\right|=5x+C,$$

$$\Rightarrow \quad 2y-\frac{2}{5}\ln\left|x+2y+\frac{7}{5}\right|=4x+C,$$

$$\Rightarrow \quad y-\frac{1}{5}\ln\left|x+2y+\frac{7}{5}\right|=2x+C,$$

$$\Rightarrow \quad 5y-\ln\left|5x+10y+7\right|=10x+C.$$

В процессе интегрирования, при делении на $5z+7$, было потеряно решение $5x+10y+7=0$. Оно может быть включено в общий интеграл, если переписать общий интеграл в виде:

$$5x+10y+7=Ce^{5y-10x}, \quad \forall C. \diamond$$

6.2. Обобщенно однородные уравнения

Уравнение первого порядка называется ***обобщённо однородным***, если существует такое рациональное число α, что каждое слагаемое уравнения – однородная функция степени m относительно x, y, y' (относительно x, y, dx, dy), если считать x – величиной измерения 1, y – величиной измерения α, $y'(dy)$ – величиной измерения $\alpha-1$, dx – величиной измерения 0.

Иначе говоря, уравнение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ является обобщено однородным, если существует такое рациональное число α, что

$$P(tx,t^{\alpha}y)dx+Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot(t^{\alpha-1}dy)=t^{m}\cdot\left[P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right]$$

или, что тоже, выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} P(tx,t^{\alpha}y)dx=t^{m}\cdot P(x,y)dx,\\ Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot(t^{\alpha-1}dy)=t^{m}\cdot Q(x,y)dy.\end{aligned}\right\} \qquad (6.3)$$

Обобщенно однородное уравнение приводится к однородному уравнению заменой

$$\boxed{y=z^{\alpha}.}$$

Действительно, после замены $y=z^{\alpha}$ получим уравнение

$$\underbrace{P(x,z^{\alpha})}_{P_1(x,z)}dx+\underbrace{Q(x,z^{\alpha})\cdot\alpha z^{\alpha-1}}_{Q_1(x,z)}dz=0. \qquad (6.4)$$

Рассмотрим функцию $P_1(x,z)$. Имеем:

$$P_1(tx,tz)dx=P(tx,(tz)^{\alpha})dx=P(tx,t^{\alpha}z^{\alpha})dx=P(tx,t^{\alpha}y)dx.$$

По условию (6.3)

$$P(tx,t^{\alpha}y)dx=t^{m}\cdot P(x,y)dx.$$

$$\Rightarrow\quad P_1(tx,tz)dx=t^{m}\cdot P(x,y)dx=t^{m}\cdot P(x,z^{\alpha})dx=t^{m}\cdot P_1(x,z)dx,$$

$$\Rightarrow\quad P_1(tx,tz)=t^{m}P_1(x,z).$$

Аналогично, для $Q_1(x,z)$, имеем:

$$Q_1(tx,tz)dz=Q(tx,(tz)^{\alpha})\cdot\alpha(tz)^{\alpha-1}dz=Q(tx,t^{\alpha}z^{\alpha})\cdot t^{\alpha-1}\cdot\alpha z^{\alpha-1}dz=$$
$$=Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot t^{\alpha-1}\cdot dy$$

По условию (6.3)

$$Q(tx,t^{\alpha}y)\cdot(t^{\alpha-1}dy)=t^{m}\cdot Q(x,y)dy.$$

$$\Rightarrow\quad Q_1(tx,tz)dz=t^{m}Q(x,y)dy=t^{m}\cdot Q(x,z^{\alpha})\cdot\alpha z^{\alpha-1}dz=t^{m}\cdot Q_1(x,z)dz;$$

$$\Rightarrow\quad Q_1(tx,tz)=t^{m}Q_1(x,z).$$

Итак, функции $P_1(x,z)$ и $Q_1(x,z)$ – однородные одинаковой степени и, следовательно, уравнение (6.4) – однородное.

Обобщенно однородное уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными заменой

$$\boxed{y=zx^{\alpha}.}$$

Действительно, из определения обобщенного однородного уравнения, получаем:

$$P(tx,t^{\alpha}y)=t^{m}\cdot P(x,y) \quad \text{и} \quad Q(tx,t^{\alpha}y)=t^{m-\alpha+1}Q(x,y).$$

Положим $t=\dfrac{1}{x}$. Тогда:

$$P(tx,t^{\alpha}y)=P\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right)=\frac{1}{x^{m}}P(x,y),$$

$$Q(tx,t^{\alpha}y)=Q\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right)=\frac{1}{x^{m-\alpha+1}}Q(x,y).$$

Следовательно,

$$P(x,y)=x^{m}\cdot P\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right), \qquad Q(x,y)=x^{m-\alpha+1}\cdot Q\left(1,\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=x^{\alpha-1}\cdot\varphi\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right).$$

Таким образом, обобщенно однородное уравнение, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y'=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=x^{\alpha-1}\cdot\varphi\left(\frac{y}{x^{\alpha}}\right)$$

Делая в этом уравнении замену $y=zx^{\alpha}$ получим:

$$z'x^{\alpha}+z\cdot\alpha\cdot x^{\alpha-1}=x^{\alpha-1}\cdot\varphi(z),$$

$$\Rightarrow \quad z'x=\varphi(z)-\alpha z.$$

Но последнее уравнение, очевидно, является уравнением с разделяющимися переменными.

ПРИМЕР 6.3. Найти все решения уравнения $\left(\dfrac{2}{x^{2}}-y^{2}\right)dx+dy=0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$\frac{2}{x^{2}}dx-y^{2}dx+dy=0.$$

Слагаемое $\dfrac{2}{x^{2}}dx$ имеет измерение $1\cdot(-2)+0=-2$, слагаемое $y^{2}dx$ – измерение $\alpha\cdot 2+0=2\alpha$, слагаемое dy – измерение $\alpha-1$. Равенства

$$-2=2\alpha=\alpha-1$$

справедливы при $\alpha=-1$. Следовательно, данное уравнение – обобщённо однородное, $\alpha=-1$.

Приведем исходное уравнение к уравнению с разделяющимися переменными, сделав замену $y=zx^{-1}$. Тогда:

$$dy=\frac{dz}{x}-\frac{zdx}{x^2},$$

и уравнение примет вид:

$$\frac{2}{x^2}dx-\frac{z^2}{x^2}dx+\frac{dz}{x}-\frac{zdx}{x^2}=0 \quad \text{или} \quad (2-z-z^2)dx+xdz=0,$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{dz}{2-z-z^2}=0,$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=0 \quad \text{или} \quad 3\frac{dx}{x}+\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=0.$$

Интегрируя, находим

$$3\int\frac{dx}{x}+\int\left(\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z-1}\right)dz=\ln C, \quad C>0,$$

$$\Rightarrow 3\cdot\ln|x|+\ln\left|\frac{z+2}{z-1}\right|=\ln C, \quad C>0,$$

$$\Rightarrow \frac{z-1}{z+2}=Cx^3 \text{ или } 1-\frac{3}{z+2}=Cx^3, \quad C\neq 0,$$

$$\Rightarrow z+2=\frac{3}{1-Cx^3}, \quad C\neq 0,$$

$$\Rightarrow z=\frac{1+2Cx^3}{1-Cx^3}, \quad C\neq 0.$$

Сделаем обратную замену переменных $z=yx$ и получим:

$$yx=\frac{1+2Cx^3}{1-Cx^3}, \quad C\neq 0,$$

$$\Rightarrow y=\frac{1+2Cx^3}{x-Cx^4}, \quad C\neq 0.$$

В процессе преобразований было потеряно решение $y=x^{-1}$ (т. е. $z=1$). Оно может быть включено в общее при $C=0$. Решение $y=-2x^{-1}$ (т. е. $z=-2$) входит в общее при $\frac{1}{C}=0$, т. е. при $C=\infty$.

Таким образом, все решения уравнения имеют вид:

$$y=\frac{1+2Cx^3}{x-Cx^4}, \ \forall C. \ \diamond$$

§ 7. Линейные уравнения первого порядка

Линейным дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, которое может быть записано в виде

$$\boxed{y' + p(x)y = f(x)}, \qquad (7.1)$$

где $p(x)$, $f(x)$ – заданные непрерывные функции.

Иначе говоря, линейное дифференциальное уравнение первого порядка это уравнение, в которое неизвестная функция y и ее производная y' входят в первых степенях и не перемножаясь[1].

Если $f(x) \equiv 0$, то линейное уравнение называется ***однородным***. В противном случае уравнение называется ***неоднородным***. Рассмотрим их по отдельности.

7.1. Линейные однородные уравнения

Линейное однородное уравнение

$$\boxed{y' + p(x)y = 0} \qquad (7.2)$$

является уравнением с разделяющимися переменными.

Действительно, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dy}{y} + p(x)dx = 0 \quad (\text{где} \quad y \neq 0).$$

Откуда находим

$$\ln|y| + \int p(x)dx = \ln C, \quad C > 0$$

(здесь для удобства постоянная C представлена в виде $\ln C$);

$$\Rightarrow \ |y| \cdot e^{\int p(x)dx} = C,$$

$$\Rightarrow \ y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \quad C \neq 0. \qquad (7.3)$$

В процессе преобразований было потеряно решение $y = 0$. Оно может быть получено по формуле (7.3) при $C = 0$. Следовательно, общее решение линейного однородного уравнения (7.2) будет иметь вид

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \ \forall C. \qquad (7.4)$$

[1] Т. е. ***линейное*** относительно неизвестной функции и ее производной.

7.2. Линейные неоднородные уравнения

Имеются два метода интегрирования линейных неоднородных уравнений первого порядка.

1) ***Метод вариации постоянной (метод Лагранжа).***

Сначала решаем однородное уравнение, которое имеет ту же левую часть, что и уравнение (7.1) (его называют ***однородным уравнением, соответствующим данному неоднородному уравнению***). Общим решением такого уравнения, как было показано выше, является функция

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Далее полагаем, что решение неоднородного уравнения по структуре совпадает с решением соответствующего линейного однородного уравнения, т. е. имеет вид

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}.$$

Функцию $C(x)$ можно найти, подставив y и y' в исходное неоднородное уравнение (7.1). Действительно,

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x).$$

Подставляя выражения для y и y' в (7.1) получим

$$\frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \cdot p(x) + p(x) \cdot C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x),$$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dx} = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx},$$

$$\Rightarrow dC = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx.$$

Интегрируя, находим

$$C(x) = \int \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right] dx + C_1.$$

И, окончательно получим, что общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y(x) = \left(\int \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right] dx + C_1 \right) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

или

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx} \cdot \int \left[f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} \right] dx. \qquad (7.5)$$

Замечания. 1) С формальной точки зрения общее решение неоднородного уравнения получается из общего решения соответствующего однородного уравнения заменой константы C на функцию $C(x)$. Такой «произвол» объясняет происхождение названия метода «вариация постоянной».

2) Формула (7.5) трудна для запоминания. Поэтому в конкретных примерах обычно повторяют проведенные выше рассуждения.

3) Заметим, что первое слагаемое в (7.5) совпадает с общим решением однородного уравнения, а второе – функция

$$\varphi(x)=e^{-\int p(x)dx}\cdot\int\left[f(x)\cdot e^{\int p(x)dx}\right]dx$$

является частным решением линейного неоднородного уравнения (получается из общего решения при $C=0$).

ПРИМЕР 7.1. Решить уравнение $xy'+2y-x^4=0$. Найти частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(1)=0$.

РЕШЕНИЕ. Это линейное неоднородное уравнение. Запишем его в виде

$$y'+2\frac{y}{x}=x^3.$$

Интегрируем соответствующее однородное уравнение

$$y'+2\frac{y}{x}=0 \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx}+2\frac{y}{x}=0.$$

Имеем:
$$\frac{dy}{y}=-\frac{2dx}{x},$$

$$\Rightarrow \ln|y|=-2\ln|x|+\ln C, \quad C>0.$$

Откуда получаем, что общее решение рассматриваемого линейного однородного уравнения

$$y=\frac{C}{x^2}, \quad \forall C.$$

Теперь полагаем, что решение неоднородного уравнения совпадает по структуре с решением соответствующего однородного уравнения, т. е. имеет вид:

$$y=\frac{C(x)}{x^2}. \tag{7.6}$$

Тогда
$$\frac{dy}{dx}=\frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{2C}{x^3}.$$

Подставим y и $\frac{dy}{dx}$ в исходное уравнение. Получим:

$$\frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}-\frac{2C}{x^3}+\frac{2}{x}\cdot\frac{C}{x^2}-x^3=0,$$

$$\Rightarrow\ \frac{dC}{dx}\cdot\frac{1}{x^2}-x^3=0,$$

$$\Rightarrow\frac{dC}{dx}=x^5 \quad \text{и} \quad C(x)=\frac{x^6}{6}+C.$$

Подставим найденное $C(x)$ в (7.6) и получим, что общее решение линейного неоднородного уравнения имеет вид

$$y=\frac{1}{x^2}\cdot\left(\frac{x^6}{6}+C\right)=\frac{x^4}{6}+\frac{C}{x^2}.$$

Теперь найдем частное решение, удовлетворяющее условию $y(1)=0$. Подставляя в общее решение начальные значения $x_0=1$, $y_0=0$, находим $C=-\frac{1}{6}$. Следовательно, искомым частным решением уравнения будет функция

$$y=\frac{x^4}{6}-\frac{1}{6\cdot x^2}=-\frac{1}{6}\cdot\left(x^4-\frac{1}{x^2}\right).\ \diamond$$

2) *Метод Бернулли.*

Решение уравнения (7.1) может быть сведено к последовательному интегрированию двух уравнений с разделяющимися переменными.

Будем искать решение уравнения (7.1) в виде произведения двух непрерывно дифференцируемых функций от x:

$$\boxed{y=u(x)\cdot v(x).} \tag{7.7}$$

Тогда

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u.$$

Подставим y и y' в линейное неоднородное уравнение (7.1) и получим:

$$\frac{du}{dx}\cdot v+\frac{dv}{dx}\cdot u+puv=f(x),$$

или
$$\frac{du}{dx}\cdot v+u\cdot\left(\frac{dv}{dx}+pv\right)=f(x). \tag{7.8}$$

Имеем одно дифференциальное уравнение (7.8), содержащее две неизвестные функции u и v. Так как число неизвестных больше числа уравнений, то одно неизвестное можно выбрать произвольно. Выберем $v(x)$ так, чтобы выражение в скобках в (7.8) обратилось в нуль. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{dv}{dx} + pv = 0, & (7.9) \\ \dfrac{du}{dx} \cdot v = f(x). & (7.10) \end{cases}$$

Уравнение (7.9) совпадает с (7.2). Его решением является функция (7.4), причем, учитывая свободу выбора $v(x)$, можно в (7.4) принять $C = 1$, т. е.

$$v(x) = e^{-\int p(x)dx}.$$

Полученную функцию $v(x)$ подставим в уравнение (7.10) и найдем $u(x)$:

$$\frac{du}{dx} \cdot e^{-\int p(x)dx} = f(x) \quad \text{или} \quad du = f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx,$$

$$\Rightarrow u(x) = \int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C.$$

Подставив найденные таким образом $u(x)$ и $v(x)$ в (7.7), мы получим, что общее решение линейного неоднородного уравнения (7.1) имеет вид:

$$y = e^{-\int p(x)dx} \cdot \left[\int f(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx + C \right].$$

ПРИМЕР 7.2. Найти общее решение уравнения

$$\cos x \cdot y' + \sin x \cdot y = 2^x \cdot \cos^2 x.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' + tgx \cdot y = 2^x \cdot \cos x.$$

Полагаем $y = u(x) \cdot v(x)$. Подставляя $y = uv$ и $y' = u'v + uv'$ в исходное уравнение, будем иметь

$$u'v + uv' + tgx \cdot uv = 2^x \cdot \cos x \quad \text{или} \quad u'v + u(v' + tgx \cdot v) = 2^x \cdot \cos x.$$

Согласно (7.9) полагаем

$$v' + tgx \cdot v = 0. \qquad (7.11)$$

Тогда

$$u'v = 2^x \cdot \cos x. \qquad (7.12)$$

Находим одно решение уравнения (7.11). Имеем:

$$\frac{dv}{dx} = -v \cdot tgx \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = -tgxdx,$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \ln|\cos x| + \ln C, \quad C > 0,$$

$$\Rightarrow v = C\cos x, \quad \forall C.$$

Так как нам требуется какое-нибудь одно решение, то полагаем $C = 1$ и получаем

$$v(x) = \cos x.$$

Подставим найденную функцию $v(x)$ в уравнение (7.12):

$$u'\cdot\cos x = 2^x\cdot\cos x\,.$$

Откуда находим

$$u' = 2^x \qquad \text{или} \qquad du = 2^x\,dx\,,$$

$$\Rightarrow\quad u(x) = \frac{2^x}{\ln 2} + C\,.$$

Так как по предположению $y = u(x)\cdot v(x)$, то окончательно получаем, что общее решение заданного линейного уравнения имеет вид

$$y = u(x)\cdot v(x) = \left(\frac{2^x}{\ln 2} + C\right)\cdot\cos x\,.\ \diamond$$

ПРИМЕР 7.3. Найти общее решение уравнения

$$y' = \frac{1}{2x - y^2}\,.$$

РЕШЕНИЕ. Уравнение является линейным, если x считать функцией, а y аргументом. Действительно, в этом случае оно принимает вид

$$x' = 2x - y^2\,.$$

Полагаем $x = u(y)\cdot v(y)$. Подставляя $x = uv$ и $x' = u'v + uv'$ в исходное уравнение, будем иметь

$$u'v + uv' - 2uv = -y^2$$

$$\Rightarrow\ u'v + u(v' - 2\cdot v) = -y^2\,.$$

Согласно (7.9) полагаем

$$v' - 2\cdot v = 0\,. \tag{7.13}$$

Тогда

$$u'v = -y^2\,. \tag{7.14}$$

Находим одно решение уравнения (7.13). Имеем:

$$\frac{dv}{dy} = 2v \qquad \text{или} \qquad \frac{dv}{v} = 2dy\,,$$

$$\Rightarrow\quad \ln|v| = 2y + \ln C\,,\quad C > 0$$

$$\Rightarrow\quad v = Ce^{2y}\,,\quad \forall C\,.$$

Так как нам требуется какое-нибудь одно решение, то полагаем $C = 1$ и получаем

$$v(y) = e^{2y}\,.$$

Подставим найденную функцию $v(y)$ в уравнение (7.14):

$$u'\cdot e^{2y} = -y^2\,.$$

Откуда находим

$$u' = -y^2\cdot e^{-2y}\,,$$

$$\Rightarrow \quad du = -y^2 \cdot e^{-2y} dy .$$

Интегрируя два раза по частям, находим:

$$u(y) = \frac{e^{-2y}}{2}\left(y^2 + y + \frac{1}{2}\right) + C .$$

Так как по предположению $x = u(y) \cdot v(y)$, то окончательно получаем, что общее решение заданного линейного уравнения имеет вид

$$x = u(y) \cdot v(y) = \left[\frac{e^{-2y}}{2}\left(y^2 + y + \frac{1}{2}\right) + C\right] \cdot e^{2y} . \ \diamond$$

§ 8. Уравнения Бернулли

Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$\boxed{y' + p(x) \cdot y = f(x) \cdot y^n ,} \qquad (8.1)$$

где $p(x), f(x)$ – непрерывные функции, $n \neq 0$, $n \neq 1$ (в противном случае это будет линейное уравнение).

Уравнение Бернулли можно привести к линейному уравнению. Для этого достаточно обе части уравнения Бернулли разделить на y^n, а затем сделать замену

$$\boxed{z = y^{1-n} .}$$

Действительно, разделив обе части уравнения на y^n, получим:

$$\frac{y'}{y^n} + \frac{p(x)}{y^{n-1}} = f(x) \quad \text{или} \quad y' \cdot y^{-n} + p(x) \cdot y^{1-n} = f(x) . \qquad (8.2)$$

Теперь полагаем $z = y^{1-n}$. Тогда

$$\frac{dz}{dx} = (1-n) y^{-n} \frac{dy}{dx} \quad \Rightarrow \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{y^n}{1-n} \frac{dz}{dx} .$$

Подставим $z = y^{1-n}$ и $y' = \dfrac{y^n}{1-n} \dfrac{dz}{dx}$ в уравнение (8.2) и получим:

$$\frac{y^n}{1-n} \cdot \frac{1}{y^n} \frac{dz}{dx} + p(x) z = f(x) ,$$

$$\Rightarrow \ \frac{1}{1-n} \frac{dz}{dx} + p(x) z = f(x) ,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dz}{dx}+(1-n)\cdot p(x)\cdot z=(1-n)\cdot f(x).$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно z и z'. Найдя его общее решение методом Бернулли, получим:

$$z=u(x)\cdot v(x) \quad \text{или} \quad \frac{1}{y^{n-1}}=u(x)\cdot v(x),$$

$$\Rightarrow \quad y^{n-1}=\frac{1}{u(x)}\cdot\frac{1}{v(x)},$$

$$\Rightarrow \quad y=\left(\frac{1}{u(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}\cdot\left(\frac{1}{v(x)}\right)^{\frac{1}{n-1}}=\widetilde{u}(x)\cdot\widetilde{v}(x).$$

Таким образом, решение уравнения Бернулли можно сразу искать в виде произведения двух функций методом Бернулли, не приводя предварительно к линейному уравнению.

Замечание. Уравнение Бернулли при $n>0$ имеет решение $y=0$. Оно будет частным решением при $n>1$ (обычно входит в общее при $C=\infty$) и особым при $0<n<1$.

ПРИМЕР 8.1. Найти общее решение уравнения $xydy=(y^2+x)dx$.
РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2+x}{xy} \quad \text{или} \quad y'-\frac{y}{x}=y^{-1}.$$

Это уравнение Бернулли, в котором $n=-1$. Приведем его к линейному. Для этого разделим обе части уравнения на y^{-1}:

$$yy'-\frac{y^2}{x}=1.$$

Далее полагаем $z=y^{1-n}=y^2$. Тогда

$$\frac{dz}{dx}=2y\frac{dy}{dx} \quad \text{или} \quad z'=2yy'.$$

Подставим $z=y^2$ и $z'=2yy'$ в исходное уравнение и получим

$$\frac{1}{2}z'-\frac{z}{x}=1 \quad \text{или} \quad z'-\frac{2}{x}z=2.$$

Это линейное неоднородное уравнение относительно z и z'. Решим его методом вариации произвольной постоянной. Для соответствующего однородного уравнения $z'=\frac{2z}{x}$ имеем:

$$\frac{dz}{z} = 2\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow \quad \ln|z| = 2\ln|x| + \ln C, \quad C > 0;$$

$$\Rightarrow \quad z = Cx^2, \quad \forall C.$$

Считаем, что решение неоднородного уравнения имеет вид

$$z = C(x) \cdot x^2.$$

Тогда $$\frac{dz}{dx} = \frac{dC}{dx} \cdot x^2 + 2x \cdot C.$$

Подставляем z и z' в линейное неоднородное уравнение и находим:

$$\frac{dC}{dx} \cdot x^2 + 2x \cdot C - \frac{2}{x} \cdot Cx^2 = 2,$$

$$\frac{dC}{dx} \cdot x^2 = 2 \quad \text{или} \quad dC = \frac{2}{x^2} dx,$$

$$\Rightarrow \ C(x) = -\frac{2}{x} + C.$$

Найденное $C(x)$ подставим в общее решение $z = C(x) \cdot x^2$ неоднородного уравнения и получим:

$$z = x^2 \left(C - \frac{2}{x} \right) = Cx^2 - 2x.$$

Вернемся к переменной y (по формуле $z = y^2$):

$$y^2 = Cx^2 - 2x.$$

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = \pm\sqrt{Cx^2 - 2x}. \ \diamond$$

ПРИМЕР 8.2. Найти все решения уравнения $xy' - y = 3x^2\sqrt{y}$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$y' - \frac{1}{x} y = 3x\sqrt{y}.$$

Это уравнение Бернулли. Проинтегрируем его, не приводя к линейному. По методу Бернулли полагаем $y = u(x) \cdot v(x)$. Тогда $y' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставив эти выражения в уравнение Бернулли, получим

$$u'v + uv' - \frac{1}{x} uv = 3x\sqrt{u \cdot v},$$

$$\Rightarrow \ u'v + u\left(v' - \frac{1}{x} v \right) = 3x\sqrt{u \cdot v}.$$

Полагая выражение в скобках равным нулю, запишем систему:

$$\begin{cases} v' - \dfrac{1}{x} v = 0, \\ u'v = 3x\sqrt{u \cdot v}. \end{cases}$$

Находим одно из решений первого уравнения:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x},$$

$$\Rightarrow \ln|v| = \ln|x| + \ln C, \quad C > 0;$$

$$\Rightarrow \quad v = Cx, \quad \forall C.$$

Положим $C = 1$, тогда

$$v = x.$$

Из второго уравнения при $v = x$ находим $u(x)$:

$$u' \cdot x = 3x\sqrt{u \cdot x},$$

$$\frac{du}{dx} = 3\sqrt{x} \cdot \sqrt{u} \quad \text{или} \quad \frac{du}{\sqrt{u}} = 3\sqrt{x}dx,$$

$$2\sqrt{u} = 2\sqrt{x^3} + 2C \quad \text{или} \quad \sqrt{u} = \sqrt{x^3} + C,$$

$$\Rightarrow \quad u = \left(\sqrt{x^3} + C\right)^2.$$

В итоге получим, что общее решение данного уравнения имеет вид

$$y = u \cdot v = x \cdot \left(\sqrt{x^3} + C\right)^2.$$

В процессе интегрирования было потеряно решение $y = 0$. Так как оно может быть получено из общего решения при $C = C(x) = -\sqrt{x^3}$, то это решение – особое.

Таким образом, все решения дифференциального уравнения определяются равенствами:

$$y = x \cdot \left(\sqrt{x^3} + C\right)^2, \quad \forall C; \qquad y = 0. \ \diamond$$

ПРИМЕР 8.3. Решить уравнение $(x^2 + y^2 + 1)dy + xydx = 0$.

РЕШЕНИЕ. Запишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 + y^2 + 1}{xy} \quad \text{или} \quad x' + \frac{x}{y} = -\frac{y^2 + 1}{xy}.$$

Сравним полученное уравнение с (8.1) и заметим, что это уравнение Бернулли, но теперь роль свободной переменной играет y, а искомой функции – $x(y)$. Полагаем $x = u(y) \cdot v(y)$. Тогда $x' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Подставив эти выражения в уравнение Бернулли, получим

$$u'\cdot v+u\cdot v'+\frac{u\cdot v}{y}=-\frac{y^2+1}{u\cdot v\cdot y},$$

$$u'\cdot v+u\left(v'+\frac{v}{y}\right)=-\frac{y^2+1}{u\cdot v\cdot y}.$$

Полагая выражение в скобках равным нулю, запишем систему:

$$\begin{cases} v'+\dfrac{1}{y}v=0, \\ u'v=-\dfrac{y^2+1}{u\cdot v\cdot y}. \end{cases}$$

Находим одно из решений первого уравнения:

$$\frac{dv}{dy}=-\frac{v}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v}=-\frac{dy}{y},$$

$$\Rightarrow \ \ln|v|=-\ln|y|+\ln C, \quad C>0;$$

$$\Rightarrow \ v=\frac{C}{y}, \quad \forall C.$$

Пусть $C=1$, тогда

$$v=\frac{1}{y}.$$

Из второго уравнения при $v=\dfrac{1}{y}$ находим $u(y)$:

$$\frac{u'}{y}=-\frac{y^2+1}{u\cdot\frac{1}{y}\cdot y},$$

$$\Rightarrow \ u\cdot du=-(y^3+y)dy,$$

$$\Rightarrow \ \frac{u^2}{2}=-\left(\frac{y^4}{4}+\frac{y^2}{2}\right)+\frac{C}{2},$$

$$u=\pm\sqrt{C-\frac{1}{2}y^4-y^2}.$$

В итоге получим, что общее решение данного уравнения имеет вид

$$x(y)=u\cdot v=\pm\frac{1}{y}\cdot\sqrt{C-\frac{1}{2}y^4-y^2}, \quad \forall C.$$

Потерянных решений нет. ◇

§ 9. Уравнения в полных дифференциалах

Уравнение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{9.1}$$

называется ***уравнением в полных дифференциалах***, если его левая часть является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, т. е. если

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y).}$$

Очевидно, что общий интеграл уравнения в полных дифференциалах будет иметь вид

$$u(x,y) = C.$$

Таким образом, задача интегрирования дифференциального уравнения в полных дифференциалах фактически сводится к задаче отыскания функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

Критерий, когда выражение $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ представляет собой дифференциал некоторой функции $u(x,y)$ и один из возможных способов ее нахождения, дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 9.1. *Пусть функции $M(x,y)$, $N(x,y)$ определены и непрерывны в области D плоскости xOy и имеют в ней непрерывные частные производные $\frac{\partial M}{\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}$. Для того чтобы выражение*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

представляло собой полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках области D выполнялось условие

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.

1) ***Необходимость*** $(\Rightarrow)$. Пусть

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = du(x,y).$$

Но

$$du(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Следовательно,

$$M(x,y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad N(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

По условию теоремы $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ и $\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ – непрерывны в области D и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

2) ***Достаточность*** ($\Leftarrow$). Пусть

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.$$

Найдем функцию $u(x,y)$ такую, что

$$du(x,y)=M(x,y)dx+N(x,y)dy,$$

или, что то же самое, функцию, для которой

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y), \qquad \frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

Сначала найдем любую функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y).$$

Для этого достаточно проинтегрировать это равенство по x, считая y – постоянной. Получим:

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\varphi(y),$$

где $\varphi(y)$ – произвольная функция.

Теперь необходимо подобрать $\varphi(y)$ так, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

Имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx+\varphi(y)\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\varphi'(y)$$

и

$$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y).$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)+\varphi'(y)=N(x,y),$$

$$\Rightarrow \quad \varphi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right).$$

Следовательно, искомая функция $\varphi(y)$ будет существовать, если выражение $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$ не зависит от x. Убедимся в этом, продифференцировав его по x (если выражение не зависит от x, то в результате дифференцирования должен получиться ноль):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right] = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial x}\left(\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}\left(\int M(x,y)dx\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\big(M(x,y)\big) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0.$$

Итак, выражение $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)$ действительно не зависит от x, и, следовательно, проинтегрировав его по y, получим:

$$\int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy + C = \varphi(y)$$

и

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)dx\right)\right]dy + C. \quad \blacksquare$$

ПРИМЕР 9.1. Найти общий интеграл уравнения

$$(3x^2 + 6xy^2)dx + (6x^2y + 4y^3)dy = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$M(x,y) = 3x^2 + 6xy^2, \qquad N(x,y) = 6x^2y + 4y^3,$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 12xy, \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 12xy.$$

Так как условие $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. левая часть этого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Найдем эту функцию так, как это было сделано в теореме. Имеем:

1) $u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) = \int (3x^2 + 6xy^2)dx + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)$.

2) $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y)\right) = 6x^2y + \varphi'(y), \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x, y) = 6x^2y + 4y^3. \end{cases}$

$$\Rightarrow \ 6x^2y + \varphi'(y) = 6x^2y + 4y^3,$$

$$\Rightarrow \ \varphi'(y) = 4y^3 \quad \text{и} \quad \varphi(y) = y^4 + C.$$

Таким образом, получили:

$$u(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + \varphi(y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C,$$

и общий интеграл уравнения будет иметь вид:

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C. \ \diamond$$

Существуют и другие способы нахождения функции $u(x, y)$. Например, она может быть найдена по одной из следующих формул, которые появляются при изучении свойств криволинейных интегралов II рода:

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy + C, \tag{9.2}$$

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy + C, \tag{9.3}$$

где (x_0, y_0) – любая точка области D непрерывности функций $M(x, y)$, $N(x, y)$, а интеграл $\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx$ в (9.2) $\left(\int_{y_0}^{y} N(x, y)dy \text{ в } (9.3)\right)$ вычисляется в предположении, что переменная y (переменная x) является константой.

ПРИМЕР 9.2. Найти общий интеграл уравнения

$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$M(x, y) = e^{-y}, \quad N(x, y) = -(2y + xe^{-y}),$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -e^{-y}.$$

Так как условие $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. левая часть этого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x, y)$.

Найдем функцию $u(x,y)$ по формуле (9.3). Так как функции $M(x,y)$ и $N(x,y)$ определены и непрерывны в любой точке плоскости xOy, то можно взять в качестве точки (x_0, y_0) начало координат. Тогда

$$u(x,y)=\int_0^x e^0 dx-\int_0^y (2y+xe^{-y})dy+C=\int_0^x dx-\int_0^y (2y+xe^{-y})dy+C=$$

$$=x\Big|_0^x-\left(y^2-xe^{-y}\right)\Big|_0^y+C=x-y^2+xe^{-y}-x+C=xe^{-y}-y^2+C.$$

Следовательно, общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$xe^{-y}-y^2=C. \diamond$$

Иногда функцию $u(x,y)$ можно найти, сгруппировав члены выражения $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ и приведя его таким образом к виду $du(x,y)$. Этот метод получил название ***метод интегрируемых комбинаций***.

ПРИМЕР 9.3. Найти общий интеграл уравнения

$$2xydx+(x^2-3y^2)dy=0.$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$M(x,y)=2xy, \qquad N(x,y)=x^2-3y^2.$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2x, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2x.$$

Так как условие $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ выполнено, то уравнение является уравнением в полных дифференциалах, т. е. левая часть этого уравнения есть полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$.

Чтобы найти функцию $u(x,y)$, группируем члены уравнения следующим образом

$$(2xydx+x^2dy)-3y^2dy=0.$$

Имеем

$$2xydx+x^2dy=d(x^2y) \quad \text{и} \quad 3y^2dy=d(y^3).$$

Следовательно, уравнение можно записать в виде

$$d(x^2y)-d(y^3)=0,$$

$$\Rightarrow\ d\left(x^2y-y^3\right)=0.$$

Таким образом, $\qquad u(x,y)=yx^2-y^3,$

и общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$yx^2-y^3=C. \diamond$$

§ 10. Интегрирующий множитель

Если условие $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ не выполнено, то уравнение

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{10.1}$$

не является уравнением в полных дифференциалах. Но в некоторых случаях удается подобрать функцию $\mu(x,y)$, после умножения на которую левая часть уравнения становится полным дифференциалом. Такая функция называется ***интегрирующим множителем*** уравнения.

Покажем, как можно в некоторых случаях найти интегрирующий множитель. Поскольку уравнение

$$\mu M(x,y)dx+\mu N(x,y)dy=0$$

является уравнением в полных дифференциалах, то выполняется условие

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$

т. е.

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}M+\frac{\partial M}{\partial y}\mu=\frac{\partial\mu}{\partial x}N+\frac{\partial N}{\partial x}\mu,$$

или

$$\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{\partial\mu}{\partial x}N-\frac{\partial\mu}{\partial y}M\ .$$

Разделив обе части этого равенства на μ, получим

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial x}N-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial y}M\,, \tag{10.2}$$

$$N\frac{\partial\ln\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\ln\mu}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{10.3}$$

Таким образом, всякая функция μ, удовлетворяющая уравнению (10.3), является интегрирующим множителем уравнения (10.1). Следовательно, для нахождения $\mu(x,y)$ нужно проинтегрировать дифференциальное уравнение в частных производных (10.3). В общем случае эта задача является сложной, поэтому рассмотрим два частных случая.

1) Пусть $\mu=\mu(x)$. Тогда условие (10.3) принимает вид

$$N\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

или

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Откуда находим

$$\ln\mu(x) = \int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx + C$$

и

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx}$$

(так как достаточно иметь какой-нибудь один интегрирующий множитель, то можно взять $C = 0$).

Итак, если выражение

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

зависит только от x, то интегрирующий множитель $\mu = \mu(x)$ существует и может быть найден из уравнения

$$\boxed{\frac{d\ln\mu}{dx} = \varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).} \qquad (10.4)$$

В противном случае интегрирующего множителя вида $\mu(x)$ не существует.

2) Пусть $\mu = \mu(y)$. Тогда уравнение (10.3) принимает вид

$$-M\frac{d\ln\mu}{dy} = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

или

$$\frac{d\ln\mu}{dy} = -\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).$$

Откуда находим

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)dy}.$$

Таким образом, если

$$\frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

зависит только от y, то интегрирующий множитель $\mu = \mu(y)$ существует и может быть найден из уравнения

$$\boxed{\frac{d\ln\mu}{dy} = -\psi(y), \quad \text{где} \quad \psi(y) = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right).} \qquad (10.5)$$

В противном случае интегрирующего множителя вида $\mu(y)$ не существует.

ПРИМЕР 10.1. С помощью интегрирующего множителя, найти общий интеграл уравнения $(x^2+y^2+x)dx+ydy=0$.
РЕШЕНИЕ. Для данного уравнения

$$M(x,y)=x^2+y^2+x, \qquad N(x,y)=y,$$

$$\Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}=2y, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=0, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2y.$$

Это уравнение не является уравнением в полных дифференциалах, но отношение $\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=\frac{1}{y}\cdot 2y=2$ не зависит от y. Следовательно, существует интегрирующий множитель $\mu=\mu(x)$, который может быть найден из уравнения (10.4):

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=\varphi(x), \quad \text{где } \varphi(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=2.$$

Имеем:

$$\frac{d\ln\mu}{dx}=2,$$

$$\Rightarrow \ln\mu=2x+C \quad \text{или} \quad \mu(x)=Ce^{2x},$$

$$\Rightarrow \mu(x)=e^{2x} \quad (\text{при } C=1).$$

Умножим обе части исходного уравнения на e^{2x} и получим

$$e^{2x}(x^2+y^2+x)dx+e^{2x}ydy=0.$$

Тогда

$$du=e^{2x}(x^2+y^2+x)dx+e^{2x}ydy.$$

Для нахождения функции $u(x,y)$ применим формулу (9.3), выбрав в качестве точки (x_0,y_0) начало координат. В этом случае будем иметь

$$u(x,y)=\int_0^x e^{2x}(x^2+x)dx+\int_0^y e^{2x}ydy+C=\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big|_0^x+\frac{1}{2}y^2e^{2x}\Big|_0^y+C=$$

$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\frac{1}{2}y^2e^{2x}+C=\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+y^2\right)+C.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид

$$\frac{1}{2}e^{2x}\left(x^2+y^2\right)=\widetilde{C}$$

или

$$e^{2x}\left(x^2+y^2\right)=C, \quad \text{где } C=2\widetilde{C}. \ \diamond$$

ПРИМЕР 10.2. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^3+xy^2)dx+(x^2y+y^3)dy+ydx-xdy=0$$

Если известно, что для него существует интегрирующий множитель вида $\mu=\mu(x^2+y^2)$.

РЕШЕНИЕ. Если $\mu=\mu(x^2+y^2)=\mu(t)$, то

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial x}=\frac{d\mu}{dt}\cdot 2x, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}\cdot\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{d\mu}{dt}\cdot 2y.$$

Следовательно, из (10.2) получаем:

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}\cdot 2xN-\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}\cdot 2yM,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{\mu}\cdot\frac{d\mu}{dt}\cdot\left(2xN-2yM\right),$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=\frac{d\ln\mu}{dt}\cdot\left(2xN-2yM\right),$$

$$\Rightarrow\ \frac{d\ln\mu}{dt}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}. \qquad (10.6)$$

Таким образом, интегрирующий множитель $\mu=\mu(x^2+y^2)$ существует, если функция

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}$$

зависит только от $t=x^2+y^2$, и находится он в этом случае по формуле (10.6).

Для заданного уравнения

$$M(x,y)=x^3+xy^2+y, \qquad N(x,y)=x^2y+y^3-x,$$

$$\Rightarrow\ \frac{\partial M}{\partial y}=2xy+1, \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=2xy-1, \qquad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2,$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2xN-2yM}=\frac{2}{2x(x^2y+y^3-x)-2y(x^3+xy^2+y)}=-\frac{1}{x^2+y^2}.$$

Следовательно, интегрирующий множитель $\mu=\mu(x^2+y^2)=\mu(t)$ существует. Из уравнения (10.6) находим:

$$\frac{d\ln\mu}{dt} = -\frac{1}{x^2+y^2} = -\frac{1}{t},$$

$$\Rightarrow \quad d\ln\mu = -\frac{dt}{t}$$

$$\Rightarrow \quad \ln\mu = -\ln t + C \qquad \text{или} \qquad \mu = \frac{C}{t},$$

$$\Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{t} = \frac{1}{x^2+y^2} \qquad (\text{при } C = 1).$$

Умножив заданное дифференциальное уравнение на $\dfrac{1}{x^2+y^2}$, получим:

$$\frac{x^3+xy^2}{x^2+y^2}dx + \frac{x^2y+y^3}{x^2+y^2}dy + \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad xdx + ydy + \frac{ydx}{x^2+y^2} - \frac{xdy}{x^2+y^2} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x\right)dx + \left(y - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy = 0.$$

По формуле (9.3) (полагая $x_0 = 1,\ y_0 = 0$) находим:

$$u(x,y) = \int_1^x \left(\frac{0}{x^2+0^2} + x\right)dx + \int_0^y \left(y - \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy + C,$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2}{2}\bigg|_1^x + \left(\frac{y^2}{2} - x\cdot\frac{1}{x}\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)\right)\bigg|_0^y + C,$$

$$\Rightarrow \quad u(x,y) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C.$$

Следовательно, общий интеграл заданного дифференциального уравнения имеет вид

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = \widetilde{C}$$

или

$$x^2 + y^2 - 2\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) = C, \quad \text{где } C = 2\widetilde{C}. \ \diamond$$

§ 11. Дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

До сих пор рассматривались дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, то есть уравнения, которые можно было записать в виде

$$y' = f(x, y). \tag{11.1}$$

В общем случае дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{11.2}$$

причем непосредственный переход от уравнения вида (11.2) к уравнению вида (11.1) не удается. Такие уравнения называются ***не разрешенными относительно производной.***

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнений, не разрешенных относительно производной, и укажем способы их интегрирования.

11.1. Уравнения, разрешаемые относительно y' неоднозначно

Пусть уравнение (11.2) таково, что его можно разрешить (в элементарных функциях) относительно y' неоднозначно. Т. е. уравнение (11.2) эквивалентно k различным уравнениям

$$y' = f_1(x, y), \quad y' = f_2(x, y), \quad y' = f_3(x, y), \quad \ldots, \quad y' = f_k(x, y). \tag{11.3}$$

Предположим, что для каждого из уравнений (11.3) найден общий интеграл:

$$\Phi_1(x, y, C) = 0, \quad \Phi_2(x, y, C) = 0, \quad \ldots, \quad \Phi_k(x, y, C) = 0. \tag{11.4}$$

Совокупность общих интегралов (11.4) называется общим интегралом уравнения, разрешаемого относительно y' неоднозначно. Эту совокупность можно записать в виде

$$\boxed{\Phi_1(x, y, C) \cdot \Phi_2(x, y, C) \cdot \ldots \cdot \Phi_k(x, y, C) = 0.}$$

Замечание. Если уравнение (11.2) разрешается относительно y' неоднозначно, то через каждую точку (x_0, y_0) области, в которой рассматривается это уравнение, будет проходить не менее k интегральных кривых. Однако условие единственности для этой точки будет считаться нарушенным только в том случае, когда хотя бы две кривые в этой точке будут иметь общую касательную. Т. е. если $f_i(x_0, y_0) \neq f_j(x_0, y_0)$ $(i \neq j)$ и через точку (x_0, y_0) не проходят особые кривые семейств $\Phi_i(x, y, C) = 0$ $(i = \overline{1, k})$, то решение уравнения, удовлетворяющее условию $y(x_0) = y_0$ считается единственным.

ПРИМЕР 11.1. Найти общий интеграл уравнения $(y')^2 - 4x^2 = 0$. Найти решение, удовлетворяющее условию а) $y(1) = 1$, б) $y(0) = 0$.

РЕШЕНИЕ. Разрешая уравнение относительно y', получаем:

$$y' = 2x, \qquad y' = -2x.$$

Интегрируя каждое из этих уравнений, находим:

$$y = x^2 + C, \qquad y = -x^2 + C.$$

Общий интеграл исходного уравнения имеет вид

$$\left(y - x^2 - C\right)\cdot\left(y + x^2 - C\right) = 0.$$

а) Найдем решение, удовлетворяющее условию $y(1) = 1$. Имеем:

$$y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 1 = 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0;$$

$$y = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 1 = -1 + C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Таким, образом, искомое решение $y = x^2$ и $y = -x^2 + 2$. Решение единственное, так как указанные кривые имеют в точке $(1;\,1)$ разные касательные (рис. 11.1).

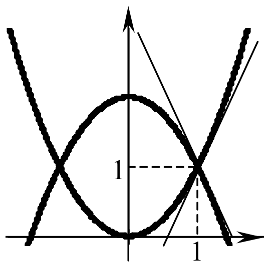

Рис. 11.1

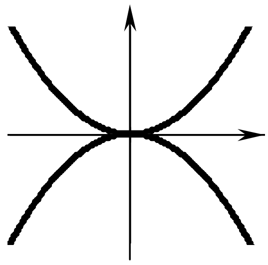

Рис. 11.2.

б) Найдем решение, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$. Имеем:

$$y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 0 = 0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0;$$

$$y = -x^2 + C \quad \Rightarrow \quad 0 = -0 + C \quad \Rightarrow \quad C = 0.$$

Таким, образом, искомое решение $y = x^2$ и $y = -x^2$. Кривые $y = x^2$ и $y = -x^2$ имеют в точке $(0;\,0)$ общую касательную. Следовательно, единственности решения в точке $(0;\,0)$ нет (рис. 11.2). ◇

Если уравнение (11.2) не удается разрешить относительно y' даже неоднозначно, либо полученные в результате уравнения сложно интегрировать, то в ряде случаев все же можно найти общее решение в параметрическом виде. Рассмотрим этот метод на примере неполных уравнений, т. е. уравнений, не содержащих явно x или y.

11.2. Неполные уравнения

а) Уравнения, содержащие только производную

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$F(y')=0. \qquad (11.5)$$

Так как уравнение (11.5) не содержит x и y, то его корни тоже не будут зависеть от x и y, т. е. будут постоянными. Пусть существует хотя бы один вещественный корень $y'=k_i$ этого уравнения. Интегрируя уравнение $y'=k_i$, получаем:

$$y=k_i x+C \quad \text{или} \quad k_i=\frac{y-C}{x}.$$

Так как k_i – корень уравнения (11.5), то

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$$

Уравнению $F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0$ удовлетворяют, очевидно, все решения дифференциального уравнения и, следовательно, оно является общим интегралом уравнения (11.5).

ПРИМЕР 11.2. Общим интегралом уравнения

$$(y')^4-2(y')^3+(y')^2-4y'+4=0$$

является выражение:

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^4-2\left(\frac{y-C}{x}\right)^3+\left(\frac{y-C}{x}\right)^2-4\left(\frac{y-C}{x}\right)+4=0$$

(вещественные корни уравнения существуют, например корнем будет $y'=1$). ◇

б) Уравнения, не содержащие искомой функции

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,y')=0, \qquad (11.6)$$

в котором отсутствует искомая функция y. Возможны 2 случая:

1) уравнение (11.6) разрешимо относительно y' неоднозначно;
2) уравнение (11.6) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, т. е. может быть заменено двумя уравнениями вида

$$\boxed{x=\varphi(t), \qquad y'=\psi(t).}$$

Первый случай сводится к уравнению, рассмотренному в п. 11.1. Во втором случае можно попытаться найти его решение в параметрическом виде. Имеем:

$$dy = y'dx, \qquad dx = \varphi'(t)dt,$$

$$\Rightarrow \quad dy = \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (11.6) определяются в параметрическом виде следующими уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt + C. \end{cases}}$$

Исключая здесь (и далее в подобных ситуациях) из параметрических уравнений параметр t, получаем общий интеграл исходного уравнения.

Если уравнение (11.6) можно разрешить относительно x, т. е. записать в виде

$$\boxed{x = \varphi(y'),}$$

то в качестве параметра удобно взять $t = y'$. Тогда

$$x = \varphi(t), \qquad dy = y'dx = t \cdot \varphi'(t)dt,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int t \cdot \varphi'(t)dt + C.$$

Общее решение уравнения в этом случае определяется в параметрическом виде уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \int t \cdot \varphi'(t)\,dt + C. \end{cases}}$$

ПРИМЕР 11.3. Проинтегрировать уравнение $x = (y')^3 + y'$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит y и разрешено относительно x. Следовательно, его решения можно найти в параметрическом виде.

Полагаем $y' = t$. Тогда

$$x = t^3 + t, \qquad dx = (3t^2 + 1)dt,$$

$$dy = y'dx = t \cdot (3t^2 + 1)dt,$$

$$\Rightarrow \quad y = \int t \cdot (3t^2 + 1)dt + C = \frac{3}{4}t^4 + \frac{t^2}{2} + C.$$

Таким образом, уравнения $\begin{cases} x = t^3 + t, \\ y = \dfrac{3}{4}t^4 + \dfrac{t^2}{2} + C \end{cases}$ определяют в параметрическом виде общее решение заданного уравнения. ◇

ПРИМЕР 11.4. Проинтегрировать уравнение $y'(x - \ln y') = 1$.
РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит y и может быть разрешено относительно x:

$$x = \frac{1}{y'} + \ln y'.$$

Следовательно, его решения можно найти в параметрическом виде.

Полагаем $y' = t$. Тогда

$$x = \frac{1}{t} + \ln t, \qquad dx = \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt,$$

$$\Rightarrow \quad dy = y'dx = t \cdot \left(-\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\right)dt = \left(-\frac{1}{t} + 1\right)dt.$$

Интегрируя, получаем

$$y = \int \left(-\frac{1}{t} + 1\right)dt + C = -\ln|t| + t + C.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t} + \ln t, \\ y = -\ln|t| + t + C \end{cases}$$

определяют общее решение уравнения в параметрической форме. ◇

в) Уравнения, не содержащие независимой переменной

Рассмотрим уравнение вида

$$F(y, y') = 0, \tag{11.7}$$

в котором отсутствует свободная переменная x. Возможны 2 случая:

1) уравнение (11.7) разрешимо относительно y' неоднозначно;
2) уравнение (11.7) неразрешимо относительно y', но допускает параметрическое представление, т. е. может быть заменено двумя уравнениями вида

$$\boxed{y = \varphi(t), \qquad y' = \psi(t).}$$

Первый случай мы рассмотрели выше в п.11.1. Во втором случае можно попытаться найти его решение в параметрическом виде. Имеем:

$$dy = \varphi' dt \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dx} = \psi(t).$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{\psi(t)} = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt \quad \text{и} \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C.$$

Таким образом, интегральные кривые уравнения (11.7) определяются в параметрическом виде следующими уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}}$$

Если уравнение (11.7) можно разрешить относительно y, т. е. записать в виде

$$\boxed{y = \varphi(y'),}$$

то в качестве параметра удобно взять $t = y'$. Тогда

$$y = \varphi(t), \quad dy = \varphi' dt$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{dy}{y'} = \frac{\varphi'(t)}{t} dt \quad \text{и} \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{t} dt + C.$$

Общее решение уравнения в этом случае определяется в параметрическом виде уравнениями:

$$\boxed{\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{t} dt + C, \\ y = \varphi(t). \end{cases}}$$

ПРИМЕР 11.5. Проинтегрировать уравнение $y = (y')^4 - 3(y')^3 + y' - 6$.
РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит x и разрешено относительно y. Найдем его решения в параметрическом виде. Полагаем $y' = t$. Тогда

$$y = t^4 - 3t^3 + t - 6 \quad \text{и} \quad dy = \left(4t^3 - 9t^2 + 1\right) dt.$$

Из $y' = \dfrac{dy}{dx}$ следует

$$dx = \frac{dy}{y'} = \frac{4t^3 - 9t^2 + 1}{t} dt = \left(4t^2 - 9t + \frac{1}{t}\right) dt \quad (t \neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad x = \int \left(4t^2 - 9t + \frac{1}{t}\right) dt + C = \frac{4}{3} t^3 - \frac{9}{2} t^2 + \ln|t| + C.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{3}t^3 - \dfrac{9}{2}t^2 + \ln|t| + C, \\ y = t^4 - 3t^3 + t - 6 \end{cases}$$

определяют общее решение уравнения в параметрическом виде.

Общее решение получено в предположении, что $t \neq 0$. При $t = 0$ получаем $y = -6$. Проверка показывает, что это тоже решение уравнения, которое не входит в общее решение.◇

ПРИМЕР 11.6. Проинтегрировать уравнение $y^{2/3} + (y')^{2/3} = 1$.

РЕШЕНИЕ. Уравнение не содержит x и допускает параметрическое представление

$$y = \cos^3 t, \quad y' = \sin^3 t \ \ (\text{где } \ t \in [0; \pi/2]).$$

Следовательно, его решения можно найти в параметрическом виде.

Имеем:

$$y = \cos^3 t \quad \Rightarrow \quad dy = -3\cos^2 t \cdot \sin t dt.$$

Из $y' = \dfrac{dy}{dx} = \sin^3 t$ следует

$$dx = \frac{dy}{\sin^3 t} = \frac{-3\cos^2 t \cdot \sin t}{\sin^3 t} dt = -3 \cdot \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt \quad (\sin t \neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad x = -3 \cdot \int \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t} dt + C = -3 \cdot \int \frac{1 - \sin^2 t}{\sin^2 t} dt + C = 3\operatorname{ctg} t + 3t + C.$$

Таким образом, уравнения

$$\begin{cases} x = 3\operatorname{ctg} t + 3t + C, \\ y = \cos t \end{cases}$$

определяют общее решение уравнения в параметрическом виде.

Общее решение получено в предположении, что $\sin t \neq 0$. Уравнение $\sin t = 0$ имеет множество решений $t = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$), но только $t = 0$ попадает в промежуток $[0; \pi/2]$. При $t = 0$ получаем $y = 1$. Проверка показывает, что это тоже решение уравнения, которое не входит в общее решение.◇

Замечание. Уравнение в примере 11.6 можно было разрешить относительно y и проинтегрировать его также, как уравнение примера 11.5. Но тогда решение окажется более трудоемким, чем приведенное выше (убедитесь в этом самостоятельно).

11.3. Уравнение Лагранжа

Пусть уравнение $F(x, y, y') = 0$ не может быть разрешено относительно y', но является линейным относительно x и y. В этом случае его можно записать в виде

$$\boxed{y = x \cdot \varphi(y') + \psi(y').} \tag{11.8}$$

Такое уравнение называется ***уравнением Лагранжа***.

Решение уравнения Лагранжа можно найти в параметрической форме.

Полагаем $y' = t$. Тогда уравнение (11.8) запишется в виде

$$y = x \cdot \varphi(t) + \psi(t).$$

Дифференцируя это выражение по x, получаем:

$$y' = \varphi(t) + x\varphi'(t)\frac{dt}{dx} + \psi'(t)\frac{dt}{dx},$$

$$t - \varphi(t) = [x\varphi'(t) + \psi'(t)]\frac{dt}{dx},$$

$$\frac{dx}{dt}[t - \varphi(t)] - x\varphi'(t) = \psi'(t),$$

$$\frac{dx}{dt} - x \cdot \frac{\varphi'(t)}{t - \varphi(t)} = \frac{\psi'(t)}{t - \varphi(t)}, \quad (\text{где } t - \varphi(t) \neq 0). \tag{11.9}$$

Последнее уравнение является линейным относительно x и $\frac{dx}{dt}$ и, следовательно, легко интегрируется методом вариации постоянной или методом Бернулли. Пусть $x = \mu(t, C)$ – общее решение уравнения (11.9). Тогда общее решение уравнения Лагранжа в параметрическом виде

$$\boxed{\begin{cases} x = \mu(t, C), \\ y = \mu(t, C) \cdot \varphi(t) + \psi(t). \end{cases}}$$

Общее решение уравнения Лагранжа получено нами в предположении, что $t - \varphi(t) \neq 0$. Если уравнение $t - \varphi(t) = 0$ имеет действительные корни t_i, то к найденному общему решению уравнения Лагранжа надо еще добавить $y = x \cdot \varphi(t_i) + \psi(t_i)$. Непосредственная проверка показывает, что это будут решения, которые теряются в процессе интегрирования.

ПРИМЕР 11.6. Проинтегрировать уравнение $y = 2xy' - 4(y')^3$.
РЕШЕНИЕ. Данное уравнение является уравнением Лагранжа. Полагаем $y' = t$. Тогда уравнение запишется в виде

$$y = 2xt - 4t^3.$$

Дифференцируя это выражение по x, находим:

$$y' = 2t + 2x\frac{dt}{dx} - 12t^2\frac{dt}{dx},$$

$$\Rightarrow \quad t = 2t + \left[2x - 12t^2\right]\frac{dt}{dx},$$

$$\Rightarrow \quad t + \left[2x - 12t^2\right]\frac{dt}{dx} = 0,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} + \frac{2x - 12t^2}{t} = 0 \quad (\text{где } t \neq 0),$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx}{dt} + \frac{2}{t}x = 12t.$$

Получили линейное неоднородное уравнение относительно x и $\frac{dx}{dt}$. Найдем его решение методом Бернулли. Полагаем $x = u \cdot v$. Тогда $x' = u'v + uv'$. Подставим x и x' в уравнение и получим следующую систему для функций u и v:

$$\begin{cases} v' + \dfrac{2}{t}v = 0, \\ u'v = 12t. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем $v = \frac{1}{t^2}$, $u = 3t^4 + C$ и общее решение линейного неоднородного уравнения будет иметь вид

$$x = \frac{1}{t^2}\left(3t^4 + C\right) = 3t^2 + \frac{C}{t^2}.$$

Следовательно, интегральные кривые исходного уравнения определяются уравнениями:

$$\begin{cases} x = 3t^2 + \dfrac{C}{t^2}, \\ y = 2xt - 4t^3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = 3t^2 + \dfrac{C}{t^2}, \\ y = 2t^3 + \dfrac{2C}{t}. \end{cases}$$

Это решение получено в предположении, что $t \neq 0$. При $t = 0$ получаем

$$y = 2x \cdot 0 - 4 \cdot 0^3 \quad \Rightarrow \quad y = 0.$$

Проверка показывает, что это тоже решение уравнения, которое не входит в общее. ◇

11.4. Уравнение Клеро

Получить уравнение (11.9) невозможно, когда $t-\varphi(t)\equiv 0$. В этом случае $t=\varphi(t)$ или $\varphi(y')=y'$ и уравнение Лагранжа принимает вид

$$\boxed{y=x\cdot y'+\psi(y').} \tag{11.10}$$

Уравнение вида (11.10) называется ***уравнением Клеро***.

Так же как для уравнения Лагранжа, для интегрирования уравнения Клеро применяют параметрический метод.

Полагаем $y'=t$. Тогда уравнение (11.10) запишется в виде

$$y=x\cdot t+\psi(t). \tag{11.11}$$

Дифференцируя обе части уравнения (11.11) по x, получаем:

$$y'=t+x\frac{dt}{dx}+\psi'(t)\frac{dt}{dx},$$

$$t=t+[x+\psi'(t)]\frac{dt}{dx},$$

$$[x+\psi'(t)]\frac{dt}{dx}=0.$$

Последнее уравнение распадается на два уравнения:

$$\frac{dt}{dx}=0 \qquad \text{или} \qquad x+\psi'(t)=0.$$

В первом случае решение уравнения определяется системой

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{dx}=0,\\ y=xt+\psi(t).\end{cases}$$

Откуда находим $t=C$ и

$$\boxed{y=x\cdot C+\psi(C).} \tag{11.12}$$

Функция (11.12) является общим решением уравнения Клеро (однопараметрическое семейство прямых).

Замечание. Сравнивая выражения (11.10) и (11.12), замечаем, что для получения общего решения уравнения Клеро достаточно в исходном уравнении заменить производную y' на произвольную постоянную C.

Во втором случае решение определяется системой

$$\begin{cases}x+\psi'(t)=0,\\ y=xt+\psi(t),\end{cases}$$

из которой находим решение

$$\begin{cases} x = -\psi'(t), \\ y = -\psi'(t) \cdot t + \psi(t). \end{cases} \tag{11.13}$$

Убедимся, что кривая (11.13) действительно является интегральной кривой уравнения Клеро.

Из (11.13) находим:

$$dx = -\psi''(t)dt,$$

$$dy = [-\psi''(t) \cdot t - \psi'(t) + \psi'(t)]dt = -\psi''(t) \cdot tdt,$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-\psi''(t) \cdot tdt}{-\psi''(t)dt} = t.$$

Следовательно, подставляя (11.13) в уравнение (11.10) получим тождество:

$$\underbrace{-\psi'(t) \cdot t + \psi(t)}_{y} = \underbrace{-\psi'(t)}_{x} \cdot \underbrace{t}_{y'} + \psi(\underbrace{t}_{y'}).$$

Более того, обычно решение (11.13) является особым. Действительно, пусть

$$\psi'(t) \neq const.$$

Тогда из уравнения $x + \psi'(t) = 0$ можно выразить t:

$$t = \chi(x).$$

Это позволит записать (11.13) в явном виде:

$$y = x \cdot \chi(x) + \psi(\chi(x)).$$

Предположим, что это решение получается из общего при некотором значении постоянной C_0:

$$x \cdot \chi(x) + \psi(\chi(x)) = C_0 x + \psi(C_0).$$

Тогда

$$\frac{d}{dx}\big(x \cdot \chi(x) + \psi(\chi(x))\big) = \frac{d}{dx}\big(C_0 x + \psi(C_0)\big),$$

$$\Rightarrow \quad \chi(x) + x \cdot \chi'(x) + \underbrace{\psi'(\chi(x))}_{-x} \cdot \chi'(x) = C_0,$$

$$\Rightarrow \quad \chi(x) = C_0.$$

Следовательно, решение (11.13) может быть получено из общего только если допустить, что $C = C(x)$. Но это означает, что решение является особым.

ПРИМЕР 11.7. Проинтегрировать уравнение $y = y'x + (y')^{-1}$.

РЕШЕНИЕ. Данное уравнения является уравнением Клеро. Полагаем $y' = t$. Тогда уравнение запишется в виде

$$y = tx + t^{-1}.$$

Дифференцируя обе части этого равенства по x, получаем:

$$y' = \frac{dt}{dx}x + t - t^{-2}\cdot\frac{dt}{dx},$$

$$\Rightarrow\ t = \frac{dt}{dx}x + t - t^{-2}\cdot\frac{dt}{dx} \quad \text{или} \quad \frac{dt}{dx}\left(x - t^{-2}\right) = 0.$$

$$\Rightarrow\ \frac{dt}{dx} = 0 \quad \text{или} \quad x - t^{-2} = 0.$$

В первом случае имеем:

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{dx} = 0, \\ y = tx + t^{-1}. \end{cases}$$

Откуда получаем $t = C$ и общее решение уравнения Клеро (однопараметрическое семейство прямых)

$$y = x\cdot C + C^{-1}.$$

Во втором случае

$$\begin{cases} x - t^{-2} = 0, \\ y = tx + t^{-1}. \end{cases}$$

Откуда находим

$$\begin{cases} x = t^{-2}, \\ y = t\cdot t^{-2} + t^{-1} = 2t^{-1}. \end{cases}$$

Избавляясь от параметра t, получаем в итоге решение

$$y^2 = 4x.$$

Таким образом, парабола $y^2 = 4x$ есть огибающая семейства прямых $y = x\cdot C + C^{-1}$ (рис. 11.3) и является особым решением заданного уравнения Клеро. ◇

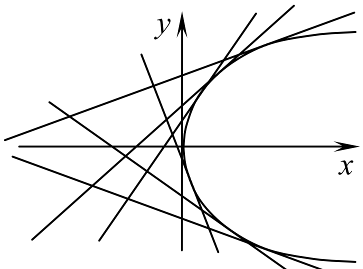

Рис. 11.3.