# Примерный вариант. Решение.

① а) $f(t) = e^{5(t-1)}\eta(t-1)$ Построить изображение

$$e^{5t} \risingdotseq \frac{1}{p-5}$$

По свойству запаздывания оригинала $f(t-\alpha) \risingdotseq e^{-\alpha}F(p)$

$$e^{5(t-1)} \risingdotseq \frac{e^{-p}}{p-5}$$

b) $f(t) = \int_0^t t \operatorname{ch} 7t \, dt.$

$t \operatorname{ch} 7t \risingdotseq -\left[\frac{p}{p^2-7^2}\right]' =$ (по свойству дифференц. изображение)

$$= -\left[\frac{p^2-7^2-2p^2}{(p^2-49)^2}\right] = \frac{p^2+49}{(p^2-49)^2}$$

По свойству интегрирования оригинала: $\int_0^t f(\tau)\,d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}$

$$\Rightarrow \int_0^t t \operatorname{ch} 7t \, dt \risingdotseq \frac{p^2+49}{p(p^2-49)^2}$$

② а) $f(t) = \left[\left[(t\eta(t))'\cdot t\right]' t^2\right]'' t^3$ Построить изображение

a – дифференцирование оригинала

b – дифференцирование изображение

c = a

d = b

e = a

f = b

В задаче 6 раз используются свойства дифференцирования оригинала и изображение.

1) $(t\eta(t))' \risingdotseq p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

2) $(t\eta(t))'\cdot t \risingdotseq -\left(\frac{1}{p}\right)' = \frac{1}{p^2}$

3) $\left[(t\eta(t))'\cdot t\right]' \risingdotseq p\cdot\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p}$

4) $[\quad]'\cdot t^2 \risingdotseq \left(\frac{1}{p}\right)'' = \frac{2}{p^3}$

5) $\left([\quad]'\cdot t^2\right)'' \risingdotseq p^2\cdot\frac{2}{p^3} = \frac{2}{p}$

6) $(\quad)''\cdot t^3 \risingdotseq -\left(\frac{2}{p}\right)''' = \frac{2\cdot2\cdot3}{p^4} = \frac{12}{p^4}$

Ответ: $F = \frac{12}{p^4}$

б) $F(p) = \dfrac{-3e^{-3p}}{(p+4)(p-2)^2}$ Построить оригинал.

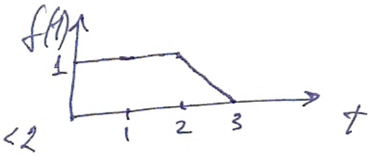
$$\frac{1}{(p+4)(p-2)^2} = \frac{A}{p+4} + \frac{B}{p-2} + \frac{C}{(p-2)^2} = \frac{(p-2)^2 A + (p+4)(p-2)B + (p+4)C}{(p+4)(p-2)}$$

$$\begin{array}{l|lll} p=-4 & 36A = 1 & A = \frac{1}{36} & \\ p=2 & 6C = 1 & C = \frac{1}{6} & \Rightarrow F = -\frac{3}{36}\frac{e^{-3p}}{p+4} - \frac{3}{6}\frac{e^{-3p}}{(p-2)^2} + \frac{3}{36}\frac{e^{-3p}}{p-2} \\ p^2 & A+B=0 & B = -\frac{1}{36} & \end{array}$$

По свойству запаздывание оригинала и смещ. арг. изобр.

$$f(t) = -\frac{1}{12}e^{-4(t-3)}\eta(t-3) - \frac{1}{2}(t-3)e^{2(t-3)}\eta(t-3) + \frac{1}{12}e^{2(t-3)}\eta(t-3)$$

(3) $y'' - 10y' + 25y = f(t)$ $\quad y(0) = y'(0) = 0$




Аналитическое выражение $f(t) = \begin{cases} 1, & 1 < x < 2 \\ 3-t, & 2 < x < 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$

$$f(t) = \eta(t) - \eta(t-2) + (3-t)\eta(t-2) - (3-t)\eta(t-3) =$$
$$= \eta(t) - \eta(t-2) - (t-2-1)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3) = \eta(t) - (t-2)\eta(t-2) + (t-3)\eta(t-3)$$

Подготовим изображения для $y, y', y''$ и $f(t)$

$y \risingdotseq Y$

$y' \risingdotseq pY - y(0) = pY$

$y'' \risingdotseq p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y$

$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p} - \frac{e^{-2p}}{p^2} + \frac{e^{-3p}}{p^2}$

Переходим к операторному уравнению

$$p^2Y - 10pY + 25Y = \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2}e^{-2p} + \frac{1}{p^2}e^{-3p}$$

$$(p-5)^2 Y = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2}\left(e^{-3p} - e^{-2p}\right)$$

$$Y = \frac{1}{p(p-5)^2} + \frac{1}{p^2(p-5)^2}\left(e^{-3p} - e^{-2p}\right)$$

$$\frac{1}{p(p-5)^2} \;\Big/\text{по II теореме разложения}\Big/ \doteqdot \operatorname*{res}_{p=0} \frac{1}{p(p-5)^2} e^{pt} + \operatorname*{res}_{p=5} \frac{e^{pt}}{p(p-5)^2}$$

$$= \frac{e^0}{25} + \lim_{p\to 5}\left(\frac{e^{pt}}{p}\right)'_p = \frac{1}{25} + \lim_{p\to 5}\frac{te^{pt}\cdot p - e^{pt}}{p^2} = \frac{1}{25} + \frac{5te^{5t} - e^{5t}}{25}$$

$$\frac{1}{p^2(p-5)^2} \;\Big/\text{разложим на сумму дробей}\Big/ = \frac{2}{125}\frac{1}{p} + \frac{1}{25}\frac{1}{p^2} - \frac{2}{125}\frac{1}{p-5} + \frac{1}{25}\frac{1}{(p-5)^2}$$

$$\frac{1}{p^2(p-5)^2}\left(e^{-3p} - e^{-2p}\right) = \left(\frac{2}{125}\frac{1}{p} + \frac{1}{25}\frac{1}{p^2} - \frac{2}{125}\frac{1}{p-5} + \frac{1}{25}\frac{1}{(p-5)^2}\right)e^{-3p} -$$

$$-\left( \qquad — \,//\, — \qquad \right)e^{-2p}$$

$$\frac{1}{p^2(p-5)^2}\left(e^{-3p} - e^{2p}\right) \doteqdot \left[\frac{2}{125} + \frac{1}{25}(t-3) - \frac{2}{125}e^{5(t-3)} + \frac{t-3}{25}e^{5(t-3)}\right]\eta(t-3)$$

$$- \left[\frac{2}{125} + \frac{1}{25}(t-2) - \frac{2}{125}e^{5(t-2)} + \frac{t-2}{25}e^{5(t-2)}\right]\eta(t-2)$$

Т.о.

$$y(t) = \frac{1}{25} + \frac{5t-1}{25}e^{5t} + \left[\frac{2}{125} + \frac{t-3}{25} - \frac{2e^{5(t-3)}}{125} + \frac{t-3}{25}e^{5(t-3)}\right]\eta(t-3) -$$

$$- \left[\frac{2}{125} + \frac{t-2}{25} - \frac{2e^{5(t-2)}}{125} + \frac{t-2}{25}e^{5(t-2)}\right]\eta(t-2)$$

④ $$\begin{cases} x' - 2x - 2y = e^{t} \\ y' + 3y + 3x = 2e^{-t} \end{cases} \quad \begin{matrix} x(0)=0 \\ y(0)=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} X \risingdotseq x \\ Y \risingdotseq y \end{matrix} \quad \begin{matrix} x' \risingdotseq pX \\ y' \risingdotseq pY \end{matrix} \quad \begin{matrix} e^{t} \risingdotseq \frac{1}{p-1} \\ e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1} \end{matrix}$$

Запишем операторную систему:

$$\begin{cases} pX - 2X - 2Y = \frac{1}{p-1} \\ 3X + pY + 3Y = \frac{2}{p+1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (p-2)X - 2Y = \frac{1}{p-1} & \times(-3) \\ 3X + (p+3)Y = \frac{2}{p+1} & \times(p-2) \end{cases} + \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[(p+3)(p-2)+6\right]Y = \frac{2(p-2)}{p+1} - \frac{3}{p-1} \Rightarrow (p^2+p)Y = \frac{2p^2-6p+4-3p-3}{p^2-1}$$

$$X = \frac{2}{3(p+1)} - \frac{p+3}{3}Y$$

$$\Rightarrow Y = \frac{2p^2-9p+1}{p(p-1)(p+1)^2}$$ По II теор. разложения

$$y(t) = \frac{1}{-1} + \frac{-6e^{t}}{4} + \lim_{p\to -1}\left(\frac{2p^2-9p+1}{p^2-p}e^{pt}\right)'_p = -1 - \frac{3}{2}e^{t} + \left[\frac{(4p-9)(p^2-p)-(2p-1)(2p^2-9p+1)}{(p^2-p)^2} + t\,\frac{2p^2-9p+1}{p^2-p}\right]e^{pt}\Big|_{p=-1}$$

Т.о. $$y(t) = -1 - \frac{3}{2}e^{t} + \frac{5+6t}{2}e^{-t}$$
$$x(t) = 1 - (3+4t)e^{-t} + 2e^{t}$$

⑤ $$f(n+2) - 4f(n) = 4^n \qquad f(0) = f(1) = 1$$

$$f(n) \risingdotseq F\ ;\quad f(n+2) \risingdotseq e^{2q}\left[F - f(0) - f(1)e^{-q}\right] = e^{2q}F - e^{2q} - e^{q}$$

$$4^n \risingdotseq \sum_{n=0}^{\infty} 4^n e^{-nq} = \sum_{n=0}^{\infty}(4e^{-q})^n = \frac{1}{1-4e^{-q}} = \frac{e^q}{e^q-4}$$

Запишем операторное уравнение

$$e^{2q}F - e^{2q} - e^{q} - 4F = \frac{e^q}{e^q-4} \qquad /\ \text{положим } e^q = z\ /$$

$$(z^2-4)F = \frac{z}{z-4} + z^2 + z \Rightarrow F = \frac{z}{(z-4)(z^2-4)} + \frac{z^2}{z^2-4} + \frac{z}{z^2-4}$$

$$z^2 \,\big)\, -4+4$$

$$F = \frac{z}{(z-4)(z^2-4)} + 1 + \frac{z+4}{z^2-4}$$ По II теореме разложения и $D^{-1}[1] = 0$ ответ

$$f(n) = \frac{z}{z^2-4}z^{n-1}\Big|_{z=4} + \frac{z\,z^{n-1}}{(z-4)(z-2)}\Big|_{z=-2} + \frac{z\cdot z^{n-1}}{(z-4)(z+2)}\Big|_{z=2} + \frac{z+4}{z-2}z^{n-1}\Big|_{z=-2} + z^{n-1}\frac{z+4}{z+2}\Big|_{z=2} = \frac{4^{n-1}}{3} + (-1)^n\frac{2^n}{24} - \frac{2^n}{8} + (-1)^n\frac{2^n}{4} + \frac{3}{2}\cdot 2^{n-1}$$