ВАРИАНТ 6

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = \frac{2}{3}, \quad y_2(0) = 2\sqrt{3}$
$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 + 1, \\ y_2' = -y_1 + 2y_2 + x. \end{cases}$$
2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду
$$\begin{cases} y_2'' - y_1 = 0 \\ y_1'' - 2y_2'' + y_2 = 0. \end{cases}$$
3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию
$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{x}{y_2}, \\ y_2'' = y_2{}^2 \cdot y_1'' - x \cdot y_2'. \end{cases}$$
4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{подсказка: (k=2,5,0)}$$
5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{подсказка: } (k_{1,2} = -3,\ k_3 = 6)$$
6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение
$$\begin{cases} y_1' = y_2 + \ln(1+e^x), \\ y_2' = y_1 + \ln(1+e^{-x}). \end{cases}$$
7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям
$$(z-y)\frac{\partial u}{\partial x} + z\frac{\partial u}{\partial y} + y\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{при условии } u(x,0,z) = x + z^2$$
8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям
$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2 \qquad z = x^2 - a^2 \text{ при } y = a$$
9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи
$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 3/4 \le x \le 1 \\ y(3/4) = y'(1) = 0 \end{cases}$$
10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи
$$y'' - 2\pi y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le \pi$$
$$y(0) = 0, \ y(\pi) = 0$$

Ответ: $\lambda_k = k^2 + \pi^2; \quad y_k = C e^{\pi x} \sin kx$

ВАРИАНТ 7

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = -\dfrac{18}{125}$, $y_2(0) = -\dfrac{14}{125}$

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 - y_2 + x, \\ y_2' = y_1 - 2y_2 + x^2. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} y_1'' = 2y_1 - 3y_2 \\ y_2'' = y_1 - 2y_2 \end{cases}$$

3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{y_1}{y_2}, \\ y_2' = \dfrac{1}{y_1}. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{подсказка: (k=3,-2,6)}$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{подсказка: } (k_{1,2} = 2,\ k_3 = -7)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2 + \dfrac{e^{3x}}{1+e^{-x}}, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 + \dfrac{e^{2x}}{1+e^{-x}}. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$\frac{(1-x^2)}{2}\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial y} + (z-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{при условии } u(0,y,z) = y+z$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2 \qquad z = 1 + 2y + 3y^2 \text{ при } x = a$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \pi \le x \le 2\pi \\ y(\pi) = y'(2\pi) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' + 2\sqrt{3}\, y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

$$y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ответ: $\lambda_k = 4k^2 - 3; \quad y_k = C e^{-\sqrt{3}x}\left(\dfrac{2k}{\sqrt{3}}\cos 2kx + \sin 2kx\right)$

ВАРИАНТ 8

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0)=0, \quad y_2(0)=-\dfrac{14}{45}$

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - 10y_2 + 1, \\ y_2' = -5y_1 + 10y_2 + x. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} y_1'' = 3y_1 + 4y_2 \\ y_2'' = -y_1 - y_2 \end{cases}$$

3. Решите задачу Коши, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1' = y_2'' e^{y_2'+1}, \\ y_2' = \dfrac{y_1'}{y_1}. \end{cases} \quad \text{при н.у.} \quad \begin{cases} y_1(0) = 1, \\ y_2(0) = y_2'(0) = 0. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{подсказка: (k=0,7,-2)}$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{подсказка: } (k_{1,2} = 3,\ k_3 = 6)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 + \dfrac{1}{\sin^2 x}, \\ y_2' = y_1 - y_2 + 1. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$(1-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial y} + (z-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{при условии } u(x,0,z) = x^2 z$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z - xy \qquad z = y^2 + 1 \text{ при } x = 2$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ \ \pi/2 \le x \le 3\pi/4 \\ y(\pi/2) = y'(3\pi/4) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' - \frac{2}{\sqrt{3}} y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$y'(0) = 0, \ \ y'(1) = 0$$

Ответ: $\lambda_k = k^2\pi^2 + \dfrac{1}{3}; \quad y_k = C e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x}(-\sqrt{3}\pi k \cos \pi kx + \sin \pi kx)$

ВАРИАНТ 9

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = -\dfrac{97}{125}$, $y_2(0) = -\dfrac{278}{125}$

$$\begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 + x, \\ y_2' = 2y_2 - 3y_1 + x^2. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} 2y_1' + 3y_2' = y_1 + 5y_2 \\ y_1' + y_2' = -y_1 - y_2. \end{cases}$$

3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1' = y_2' \cdot \sin y_2, \\ y_2' = y_1' \cdot \cos y_1. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{подсказка: (k=0,2,5)}$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{подсказка: } (k_{1,2} = 3,\ k_3 = 6)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + tg^2 x - 1, \\ y_2' = tgx - y_1. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$(x^3 + 3xy^2)\frac{\partial u}{\partial x} + 2y^3\frac{\partial u}{\partial y} + 2y^2 z\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \qquad \text{при условии } u(x, y, 1) = \frac{y^6}{x^2}$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$tgx\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2 \qquad z = x^3 \text{ при } y = 1$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 1 \le x \le 3/2 \\ y(1) = y'(3/2) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' - \frac{2}{\sqrt{3}}y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le 1$$

$$y(0) = 0, \ y(1) = 0$$

Ответ: $\lambda_k = k^2\pi^2 + \dfrac{1}{3}$; $\quad y_k = C e^{\frac{1}{\sqrt{3}}x} \sin \pi kx$

ВАРИАНТ 10

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0)=\frac{11}{108}$, $y_2(0)=-\frac{43}{108}$

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 - y_2 + 1, \\ y_2' = 2y_2 - 4y_1 + x^2. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} 3y_1' + 2y_2' = 5y_1 + y_2 \\ y_1' + y_2' = y_1 + y_2. \end{cases}$$

3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} x \cdot y_1' = y_1 \dfrac{1}{\ln x}, \\ y_2'' = \dfrac{y_1}{x}. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad (k=-2,3,6)$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$ подсказка: ($k_{1,2,3}= 0$)

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2 + \dfrac{1}{1+e^x}, \\ y_2' = 3y_1 + 2y_2 + 1. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$(y-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0$$ при условии $u(x,y,0) = \frac{x}{y}$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = z^2(x-3y)$$ $yz + 1 = 0$ при $x = 1$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad 1/4 \le x \le 1/2 \\ y(1/4) = y'(1/2) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' + 10y' + \lambda y = 0, \quad 0 \le x \le 1$$
$$y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0$$

Ответ: $\lambda_k = k^2\pi^2 + 25; \quad y_k = C e^{-5x}\left(\frac{\pi k}{5}\cos \pi kx + \sin \pi kx\right)$