

ВАРИАНТ 11

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = -\frac{116}{343}$, $y_2(0) = \frac{116}{343}$

$$\begin{cases} y_1' = 6y_1 - y_2 + x^2, \\ y_2' = 2y_2 - 5y_1. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} 5y_1' + 6y_2' = y_1 + y_2 \\ 4y_1' + 5y_2' = y_1 - y_2. \end{cases}$$

3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1'' \cdot y_2' = y_1' \cdot y_2'', \\ y_1' = y_2' \cdot e^{y_2}. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{подсказка: } (k=1, -1, 2, 3)$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{подсказка: } (k_{1,2}=0, k_3=3)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + \frac{1}{1+e^x}, \\ y_2' = y_1 + e^{2x}. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$(y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x+y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при условии } u(x, 0, z) = \frac{x}{z}$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$yz \frac{\partial z}{\partial x} + xz \frac{\partial z}{\partial y} = xy \quad y^2 + z^2 = a^2 \quad \text{при } x = a$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \pi/2 \leq x \leq 3\pi/2 \\ y(\pi/2) = y'(3\pi/2) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' - 8y' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi \\ y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \lambda_k = k^2 + 16; \quad y_k = C e^{4x} \left(-\frac{k}{4} \cos kx + \sin kx \right)$$

ВАРИАНТ 12

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = -\frac{137}{256}$, $y_2(0) = \frac{129}{256}$

$$\begin{cases} y_1' = 7y_1 - y_2 + 1, \\ y_2' = 2y_2 - 6y_1 + x^2. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} 7y_1' + 6y_2' = y_1 - y_2 \\ 8y_1' + 7y_2' = y_2 - y_1. \end{cases}$$

3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{x}, \\ e^{y_2'} = \frac{y_1}{y_2''}. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ подсказка: } (k=1,2,3)$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ подсказка: } (k_{1,2,3} = 2)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = y_2 + y_2 + \frac{1}{\cos x}, \\ y_2' = -y_2 - 2y_1 + \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$(y-x)\frac{\partial u}{\partial x} + (x+y+z)\frac{\partial u}{\partial y} + (x-y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при условии } u(0, y, z) = \operatorname{arctg} \frac{y^2}{z}$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$z \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} = 2xz \quad x + y = 2 \text{ при } yz = 1$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, & 3/4 \leq x \leq 5/4 \\ y(3/4) = y'(5/4) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' - 8y' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y'(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Ответ: $\lambda_k = 4k^2 + 16$; $y_k = C e^{4x} \sin 2kx$

ВАРИАНТ 13

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$

$$\begin{cases} y_1' = y_2 - y_1 + x^3, \\ y_2' = y_1 - y_2 + 1. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} y_1'' + y_2' + y_1 = 0 \\ y_2'' + y_1' = 0 \end{cases}$$

3. Решите задачу Коши, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1'' = \frac{y_2'}{1 + y_2^2}, \\ y_2' = \frac{y_1'}{\cos^2 y_1}. \end{cases} \quad \text{при н.у.} \quad \begin{cases} y_1(0) = y_2(0) = 0, \\ y_1'(0) = 1. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \quad (k=1, -2, 4)$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{подсказка: } (k_{1,2,3} = 1)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + y_2 + e^x, \\ y_2' = -y_1 + y_2 + \frac{e^x}{\sin x}. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$z \frac{\partial u}{\partial x} + xz \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при условии } u(0, y, z) = z^2 \ln y$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$z \frac{\partial z}{\partial x} + (z^2 - x^2) \frac{\partial z}{\partial y} = -x \quad y = x^2 \text{ при } z = 2x$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad 1/2 \leq x \leq 3/2 \\ y(1/2) = y'(3/2) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + 2\sqrt{3}y' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } \lambda_k = \pi^2 k^2 + 3; \quad y_k = C e^{-\sqrt{3}x} \left(\frac{\pi k}{\sqrt{3}} \cos \pi kx + \sin \pi kx \right)$$

ВАРИАНТ 14

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$

$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 2x, \\ y_2' = y_2 - y_1 + 1. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} y_1' + y_2'' + y_1 = 0 \\ y_2' + 2y_1'' = 0 \end{cases}$$

3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1}{y_2}, \\ y_2' = \frac{y_2^2}{y_1}. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad (k=-1, 2, 5)$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{подсказка: } (k_{1,2}=-1, k_3=1)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = y_2, \\ y_2' = -y_1 + \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$(y-z)\frac{\partial u}{\partial x} + (x-z)\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при условии } u(x, y, 0) = x(y-2)$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + xy \frac{\partial z}{\partial y} = x \quad z = y^2 \text{ при } x = 0$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \pi/2 \leq x \leq 5\pi/4 \\ y(\pi/2) = y'(5\pi/4) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' - 2\sqrt{3}y' + \lambda y = 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$y'(0) = 0, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\text{Ответ: } \lambda_k = 4k^2 + 3; \quad y_k = C e^{\sqrt{3}x} \left(-\frac{2k}{\sqrt{3}} \cos 2kx + \sin 2kx\right)$$

ВАРИАНТ 15

1. Найдите общее решение методом исключения переменных, выделить решение, удовлетворяющее начальным условиям $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$

$$\begin{cases} y_1' = 5y_1 + 6y_2 + 1, \\ y_2' = -5y_1 - 6y_2 + 4x^3. \end{cases}$$

2. Найдите общее решение системы, не приведенной к нормальному виду

$$\begin{cases} y_1'' + y_2' + y_1' = 0 \\ y_2'' + 2y_1 = 0 \end{cases}$$

3. Найдите общее решение, составив интегрируемую комбинацию

$$\begin{cases} y_1' = \frac{y_1^2}{y_2 - x}, \\ y_2' = y_1 + 1. \end{cases}$$

4. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (k=1, -1, 2, 3)$$

5. Найдите общее решение системы дифференциальных уравнений $X' = AX$ методом Эйлера, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 3 & -4 & -3 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{подсказка: } (k_{1,2} = 2, k = -5)$$

6. Методом вариации произвольных постоянных найдите общее решение

$$\begin{cases} y_1' = -2y_1 + y_2 + \frac{1}{e^{-x} - 1}, \\ y_2' = -3y_1 + 2y_2 + \frac{1}{e^{-x} + 1}. \end{cases}$$

7. Найти общее решение однородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$(2x+y+z)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + (y-x)\frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad \text{при условии } u(x, 0, z) = \sin \frac{z+3}{x-5}$$

8. Найти общее решение неоднородного уравнения с частными производными и решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям

$$y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + z^2 \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad y^3 z - 3 = 0 \quad \text{при } x = 1$$

9. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \quad \pi \leq x \leq 3\pi/2 \\ y(\pi) = y'(3\pi/2) = 0 \end{cases}$$

10. Найти собственные значения и собственные функции краевой задачи

$$y'' + 8y' + \lambda y = 0, \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad y(\pi) = 0$$

Ответ: $\lambda_k = 4k^2 + 16; \quad y_k = C e^{-4x} \sin 2kx$